



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

**FEUP**

Mestrados Integrados em Eng Mecânica e em Eng Industrial e Gestão

**ANÁLISE MATEMÁTICA III**

**DEMec**

2011-Outubro-24

**1ª PROVA DE AVALIAÇÃO**

- A duração do exame é 2 horas + 30 minutos de tolerância.
- Cotação: As perguntas 1 a 6 valem 16/6 valores e as 7 e 8 restantes 2 valores cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar.

**PARTE 1 (16 VALORES)**

1. Determine a solução geral da equação diferencial  $2xy^2 dx + \left(3yx^2 + \frac{\ln y}{y^2}\right) dy = 0$ .
2. Determine a solução da equação  $2y^2 dx + (y + x) x dy = 0$  com  $y(1)=1$ .
3. Resolva a equação diferencial  $y'' - 4y' + 5y = 2e^{2t} \cos(t)$ , pelo método da variação das constantes.
4. Resolva a equação diferencial  $y'' + 3y = 4e^{t-2} u(t-2)$ ,  $y(0)=0$ ,  $y'(0)=0$  usando Transformadas de Laplace.
5. Calcule a inversa da transformada de Laplace  $F(s) = \frac{e^{-3s}}{(s+2)^2} + \frac{s}{s^2 - 2s + 3}$
6. Determine a solução de  $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + e^t \\ y_2' = 4y_1 - 3y_2 + 2e^t \end{cases}$  usando o método da variação das constantes.

**PARTE 2 (4 VALORES)**

7. Considere a equação diferencial de ordem  $n$   
$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + a_2(x)y^{(n-2)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = f(x)$$
Sejam  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  soluções linearmente independentes da equação diferencial homogénea associada. Mostre que é possível obter uma solução da equação diferencial completa sob a forma  $y(x) = A_1(x)u_1(x) + A_2(x)u_2(x) + \dots + A_n(x)u_n(x)$
8. Mostre, justificando convenientemente, que a Transformada de Laplace da convolução de duas funções é o produto das Transformadas de Laplace de cada uma dessas funções.



- A duração do exame é 2 horas + 30 minutos de tolerância.
- Cotação: As perguntas de 1 a 5 valem 16/5 valores cada e as restantes 2 cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar.

1 Calcule diretamente  $\int_C z^3 dx - x^3 dz$ , onde  $C$  é a curva de interseção do cilindro  $x^2 + z^2 = 1$  e do plano  $x + y + z = 1$ .

2 Resolva o exercício 1 aplicando o teorema de Stokes.

3 Considere o volume  $V$  limitado pelas superfícies  $y = z^2 + x^2$  e por  $y = 1$ . Calcule o fluxo do campo  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, 2y, -2z)$  para o interior de  $V$ .  
Verifique o Teorema de Gauss.

4 Considere o campo de vetores  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, x^2 + y, -1)$

a) Verifique se é um gradiente.

b) Considere a aplicação de  $\mathbf{F}$  a uma partícula que se desloca segundo o segmento de reta que une o ponto  $(0, 1, 1)$  ao ponto  $(1, 2, 2)$ . Calcule o trabalho realizado por  $\mathbf{F}$ .

5 Desenvolva em série de co-senos a função  $f(x) = -x$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ .

6 Seja  $\varphi$  um campo escalar diferenciável em que o gradiente  $\nabla\varphi$  é contínuo num conjunto aberto conexo  $S \subset \mathbb{R}^n$ .  
Mostre que para cada dois pontos  $A$  e  $B$  de  $S$  ligados por um caminho regular em  $S$  se tem

$$\int_A^B \nabla\varphi d\alpha = \varphi(B) - \varphi(A)$$

7 Enuncie o teorema de Green e mostre que as coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  do centroide de uma região plana  $S$ , limitada por uma curva simples fechada  $C$  com área  $A$ , são dadas por:

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \oint_C x^2 dy \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \oint_C y^2 dx$$



- A duração do exame é 2horas + 30minutos.
- Cotação: As perguntas 1 a 5 valem 16/5 valores, e as duas restantes 2 valores cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar.

1. Determine a solução da equação  $(2x^2e^{x^2} - y^2)dx - 2xy \ln(x)dy = 0$
2. Dada a equação diferencial  $y' + \frac{1}{x+2}y + x - 2 = 0$ 
  - a) Classifique a equação
  - b) Determine a solução que satisfaz  $y(-1)=3$
3. Resolva a equação diferencial  $y'' + 4y = 2 + 4x$  pelo método da variação das constantes
4. Determine a solução da equação diferencial  $y'' + 4y = 10r(t)$ , que satisfaz as condições  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ , onde  $r(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ e^t, & t > 1 \end{cases}$ .
5. Calcule a inversa da Transformada de Laplace  $F(s) = \frac{s+2}{s^2 + 2s+5} + \frac{e^{-5s}}{s^2 + 2s+5}$
6. Considere um sistema diferencial linear homogéneo dado por

$$\bar{Y}'(t) = A\bar{Y}(t)$$

onde  $A$  é uma matriz real,  $n \times n$ . Supondo que  $A$  possui os valores próprios  $\lambda = \alpha + i\beta$  e  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ , descreva, justificadamente, como pode associar a esses valores duas soluções reais do sistema.

7. Seja  $F(x,y,C)=0$  uma família de curvas a um parâmetro  $C$  ( $C \in \mathbf{R}$ ).
  - a) Defina trajetórias ortogonais a essa família de curvas.
  - b) Indique, justificadamente, como pode obter a partir de  $F(x,y,C)=0$ , a equação diferencial que define essas trajetórias ortogonais.



- A duração do exame: 2 horas e 30 minutos.
- Cotação: As perguntas nº1 a 3 valem 13/3 valores, a nº4 3 valores e as restantes 2 cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

1. Seja  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(x, y) = (-y + 1, x)$ . Considere a região do plano limitada por  $x = y^2$  com  $x \leq 4$ .

- a) Calcule o integral de  $f(x, y)$  ao longo da linha  $C$  que é fronteira dessa região, percorrida no sentido retrógrado.
- b) Verifique o Teorema de Green.

2. a) Calcule a área da superfície  $z + x^2 + y^2 = 4$ ,  $z \geq 2$

b) Calcule o fluxo do campo  $f(x, y, z) = (e^{y^2}, \frac{1}{1+z^2}, zx)$ , através da superfície fechada limitada superiormente pela superfície referida na alínea a) e inferiormente por  $z - 2 = 0$ .

3. Desenvolva em série de Fourier a função periódica  $f(x) = \frac{1}{2}|x|$ ,  $-1 < x < 1$ .

4. Seja  $\mathbf{F}$  o campo vectorial conservativo definido em  $\mathbb{R}^n$  por  $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{2}{1+r^2}\right)(x, y, z)$ ,

onde  $r = \|(x, y, z)\|$ . Determine uma função potencial de  $\mathbf{F}$  e usando o 2º Teorema fundamental para o cálculo de integrais de linha determine  $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\alpha$ .

5. Enuncie com rigor o teorema de Gauss. Mostre, utilizando-o, que sendo  $\varphi$  uma função de campo escalar definida em  $\mathbb{R}^3$ , e sendo  $V$  um volume cuja superfície fronteira  $S$  é um conjunto de nível dessa função, se tem:

$$\iiint_V \Delta \varphi \, dx \, dy \, dz = \iint_S \|\nabla \varphi\| \, dS$$

6. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de campo escalar em  $\mathbb{R}^3$ . Considere a função de campo vectorial  $f\nabla g$ .

- a) Calcule  $\nabla \times (f\nabla g)$ .
- b) Mostre, justificando convenientemente, que sendo  $S$  uma superfície regular e  $C$  a linha fechada que é bordo dessa superfície, se tem:

$$\iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot dS = \oint_C (f\nabla g) \cdot d\alpha$$



- A duração do exame é 2horas + 30minutos.
- Cotação: As perguntas 1 a 6 valem 16/6 valores, e as duas restantes 2 valores cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar.

1. Determine a solução da equação  $(2x^2e^{x^2} - y^2)dx - 2xy \ln(x)dy = 0$
2. Resolva a equação diferencial  $y'' + 4y = 2 + 4x$  pelo método da variação das constantes.
3. a) Determine a solução da equação diferencial  $y'' + 4y = 10r(t)$ , que satisfaz as condições  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ , onde  $r(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ e^t, & t > 1 \end{cases}$ .

b) Calcule a inversa da Transformada de Laplace  $F(s) = \frac{e^{-5s}}{s^2 + 2s + 5}$

4. Seja  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(x, y) = (-y + 1, x)$ . Considere a região do plano limitada por  $x = y^2$  com  $x \leq 4$ .

Calcule o integral de  $f(x, y)$  ao longo da linha  $C$  que é fronteira dessa região, percorrida no sentido retrógrado. Verifique o Teorema de Green.

5. Desenvolva em série de Fourier a função periódica  $f(x) = \frac{1}{2}|x|, -1 < x < 1$ .

6. a) Calcule a área da superfície  $z + x^2 + y^2 = 4, z \geq 2$

b) Calcule o fluxo do campo  $f(x, y, z) = (e^{y^2}, \frac{1}{1+z^2}, zx)$ , através da superfície fechada limitada superiormente pela superfície referida na alínea a) e inferiormente por  $z - 2 = 0$ .

7. Considere um sistema diferencial linear homogéneo dado por

$$\vec{Y}'(t) = A\vec{Y}(t)$$

onde  $A$  é uma matriz real,  $n \times n$ . Supondo que  $A$  possui os valores próprios  $\lambda = \alpha + i\beta$  e  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ , descreva, justificadamente, como pode associar a esses valores duas soluções reais do sistema.

8. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de campo escalar em  $\mathbb{R}^3$ . Considere a função de campo vectorial  $f\nabla g$ .

a) Calcule  $\nabla \times (f\nabla g)$ .

b) Mostre, justificando convenientemente, que sendo  $S$  uma superfície regular e  $C$  a linha fechada bordo dessa superfície, se tem:

$$\iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot dS = \oint_C (f\nabla g) \cdot d\alpha$$



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

**FEUP**

Mestrados Integrados em Engenharia Mecânica e em Eng Industrial e Gestão

## ANÁLISE MATEMÁTICA III

DEMec

2010-11-02

1ºTESTE

- A duração do exame é 2horas + 30minutos.
- Cotação: As perguntas 1 e 6 valem 2 valores, as 2 a 5 valem 3 e as três restantes da PARTE II 2 valores cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

### PARTE I (cotação: 16valores)

1. Determine a solução da equação diferencial  $y' + \frac{1}{x-1}y = (x-1)^{-3}$

2. Resolva a equação diferencial  $y'' - 2y' + y = \frac{2e^x}{x-x^2}$ .

3. Determine a solução geral da equação diferencial

$$\left(\frac{1}{1-\cos x} - 2y^3 \cos x\right) dx - (3y^2 \sin x) dy = 0.$$

4. Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais usando o método da variação

das constantes. 
$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 - x_2 + t \\ x_2' = -3x_1 - 3t \end{cases}$$

5. Determine a solução da equação diferencial  $y'' + 2y' + 4y = 4u(t-2)$ , que satisfaz as condições  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ , onde  $u(t)$  é a função de Heaviside com descontinuidade em  $t=2$ .

6. Determine a função  $f(t)$  cuja Transformada de Laplace é  $F(s) = \frac{s + e^{-3s}}{(s-1)^2}$

v.s.f.f.

**PARTE II** (cotação: 4 valores)

7. Mostre, por indução matemática, que sendo  $\mathcal{L}$  a transformada de Laplace se tem

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

8. Considere um sistema diferencial linear homogéneo dado por

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

onde  $A$  é uma matriz real,  $n \times n$ ,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ . Supondo que  $A$  possui  $n$  valores próprios

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  distintos e sendo  $\vec{u}^{(1)}, \dots, \vec{u}^{(n)}$  os respectivos vectores próprios, demonstre justificando,

que o sistema tem  $n$  soluções linearmente independentes da forma  $\vec{x}^{(i)} = e^{\lambda_i t} \vec{u}^{(i)}$ .

**v.s.f.f.**



- A duração do exame é 2horas + 30minutos.
- Cotação: As perguntas 1 e 2 valem 3 valores, as 3 a 5 valem 10/3 e as duas restantes da PARTE II 2 valores cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

**PARTE I** (cotação: 16valores)

1. Calcule  $\int_C y dx + (3x + \sqrt{1 + y^4}) dy$  em que  $C$  é a fronteira da região plana limitada pelos gráficos de  $x=y^2$  e  $x=1$  percorrida no sentido retrógrado.
2. a) Calcule o fluxo do rotacional de  $f(x,y,z)=(y, -x, z)$ , de fora para dentro, sobre a superfície  $z = 2 - x^2 - y^2$  limitada por  $z=0$ , usando o Teorema de Stokes.  
b) Verifique o Teorema.
3. Calcule o trabalho realizado por  $f(x,y,z)=(x, x, zy)$  ao longo da curva de intersecção das superfícies  $x^2 + y^2 = 4y$  e  $z = 4$  percorrida no sentido directo quando vista de cima.
4. Calcule o fluxo de  $f(x,y,z)=(yx, y, 0)$  para dentro da superfície limitada superiormente por  $z = 4$  e inferiormente por  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 
  - a) Por cálculo directo
  - b) Usando o Teorema de Gauss
5. Determine a série de Fourier da função periódica  $f(x)$  definida a partir de

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & -1 < x < 0 \\ -x+1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

**PARTE II** (cotação: 4 valores)

6. Seja  $f(x)$  uma função periódica ímpar de período  $2\pi$ , contínua e derivável por secções. Considere uma função  $g(x)$  obtida por uma combinação linear de um número finito de funções trigonométricas tal  $g(x) = \sum_{n=1}^N c_n \operatorname{sen} nx$ . Define-se o erro quadrático com que

$g(x)$  representa  $f(x)$  pela função  $E(c_1, \dots, c_n, \dots, c_N) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx$ .

Mostre que o erro quadrático é mínimo quando os coeficientes  $c_1, \dots, c_n, \dots, c_N$  são obtidos pelas fórmulas de Euler da série de Fourier que representa a função  $f(x)$ .

7. Enuncie com rigor o teorema de Gauss. Mostre, utilizando-o, que sendo  $\varphi$  uma função de campo escalar harmónica ( $\Delta\varphi = 0$ ) em  $V \subset \mathbb{R}^3$  e sendo  $S$  a superfície envolvente de  $V$  e  $n$  o versor da normal exterior, se tem

$$\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = 0$$

*v.s.f.f.*



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

**FEUP**

Mestrados Integrados em Engenharia Mecânica e em Eng Industrial e Gestão

## ANÁLISE MATEMÁTICA III

**DEMec**

2011-02-10

**RECURSO 1ªParte**

- A duração do exame é 2horas + 30minutos de tolerância.
- Cotação: As perguntas de 1 a 5 valem 16/5 valores e as restantes 2 cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

### PARTE I (16 VALORES)

1. Resolva a equação diferencial  $\left( \frac{4}{x(1+x^2)} + 3y^2 \right) dx + 2xydy = 0$ .

2. Determine a solução do seguinte sistema diferencial usando o método da variação das constantes

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + e^t \\ y_2' = 4y_1 + y_2 - 2e^t \end{cases}$$

3. Resolva, usando o método da variação das constantes, a equação diferencial  $y'' - 6y' + 10y = 6e^{3x} \sin x \cos x$

4. Determine a solução da equação diferencial  $y'' + 4y' + 5y = e^{t-\pi} u(t-\pi)$ , que satisfaz as condições  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -4$ , sendo  $u(t-\pi)$  a função de Heaviside com descontinuidade em  $\pi$ .

5. Determine a função  $f(t)$ ,  $(t \in \mathbb{R}_0^+)$ , cuja transformada de Laplace é  $F(s) = \frac{3 + se^{-3s}}{(s-1)^3}$

*v.s.f.f.*

## PARTE II (4 VALORES)

6. Considere uma equação diferencial de 1ª ordem da forma

$$y' = f(x, y)$$

onde  $f$  é uma função homogénea de grau zero. Demonstre que por uma mudança de variável conveniente esta equação pode ser transformada numa equação de variáveis separáveis.

7. Seja  $F(x,y,C)=0$  uma família de curvas a um parâmetro  $C$  ( $C \in \mathbf{R}$ ).

a) Defina trajectórias ortogonais a essa família de curvas.

b) Indique, justificadamente, como pode obter a partir de  $F(x,y,C)=0$ , a equação diferencial que define essas trajectórias ortogonais.

*v.s.f.f.*



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia  
**FEUP**

Mestrados Integrados em Engenharia Mecânica e em Eng Industrial e Gestão

## ANÁLISE MATEMÁTICA III

DEMec

2011-02-10

RECURSO 2ªParte

- A duração do exame é 2horas + 30minutos de tolerância.
- Cotação: As perguntas de 1 a 5 valem 16/5 valores e as restantes 2 cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

### PARTE I (16 VALORES)

1. Calcule a área da região do plano limitada superiormente por  $x^2 + y^2 = 2$  e inferiormente por  $y = x^2$ , usando o Teorema de Green.
2. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças  $f(x, y, z) = (z, z, 2y)$  ao longo da curva de intersecção das superfícies  $x^2 - y + z^2 = 0$  e  $x^2 + z^2 = y^2$  para  $y \geq 0$ , usando para o efeito o teorema de Stokes.
3. Mostre que o integral  $\int_{(a,0,1)}^{(a,\pi,3)} \text{sen} y \, dx + x \cos y \, dy + 2z \, dz$  é independente do caminho e calcule-o.
4. a) Considere o volume  $V$  limitado pela superfície envolvente  $S$  definida por  $x = y^2 + z^2$  e por  $x = 3$ . Calcule o fluxo do campo vectorial  $F(x, y, z) = (2, y, z)$  de fora para dentro do volume  $V$ .  
b) Verifique o teorema de Gauss.
5. Desenvolva em série de co-senos a função  $f(x) = x + 2$ ,  $x \in ]-\pi, 0[$ .

v.s.f.f.

## PARTE II (4 VALORES)

6. Enuncie o teorema de Stokes. Mostre, utilizando-o, que sendo  $\mathbf{v} = (a, b, c)$  um vector constante de  $\mathbf{R}^3$  e considerando a função de campo vectorial  $\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ , sendo  $\mathbf{r}$  o vector  $\left(-\frac{x}{2}, \frac{y}{2} - x, \frac{z}{2} - x\right) \in \mathbf{R}^3$ , se tem:

$$\iint_S (a, a, a) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\alpha}$$

7. Considere a equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Determine, justificando convenientemente, a solução da equação com as condições

$y(x, 0) = f(x)$ ,  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x)$  e considerando a corda de extremos  $x=0$  e  $x=L$  fixos e com ordenada 0, usando o método de separação de variáveis e séries de Fourier.

*v.s.f.f.*



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

**FEUP**

Mestrados Integrados em Engenharia Mecânica e em Eng Industrial e Gestão

## ANÁLISE MATEMÁTICA III

**DEMec**

2011-02-10

**RECURSO**

- A duração do exame é 2horas + 30minutos de tolerância.
- Cotação: As perguntas de 1 a 6 valem 16/6 valores e as restantes 2 cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

### PARTE I (16 VALORES)

1. Resolva, usando o método da variação das constantes, a equação diferencial  $y'' - 6y' + 10y = 6e^{3x} \operatorname{sen} x \cos x$
2. Determine a solução da equação diferencial  $y'' + 4y' + 5y = e^{t-\pi} u(t-\pi)$ , que satisfaz as condições  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -4$ , sendo  $u(t-\pi)$  a função de Heaviside com descontinuidade em  $\pi$ .
3. Determine a função  $f(t)$ , ( $t \in \mathbb{R}_0^+$ ), cuja transformada de Laplace é  $F(s) = \frac{3}{(s-1)^3} + \frac{e^{-3s}}{(s-1)^3}$
4. a) Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças  $f(x, y, z) = (z, z, 2y)$  ao longo da curva de intersecção das superfícies  $x^2 - y + z^2 = 0$  e  $x^2 + z^2 = y^2$  para  $y \geq 0$ , usando para o efeito o teorema de Stokes.  
b) Verifique o Teorema.
5. a) Considere o volume  $V$  limitado pela superfície envolvente  $S$  definida por  $x = y^2 + z^2$  e por  $x = 3$ . Calcule o fluxo do campo vectorial  $F(x, y, z) = (2, y, z)$  de fora para dentro do volume  $V$ .  
b) Verifique o teorema de Gauss.
6. Desenvolva em série de co-senos a função  $f(x) = x + 2$ ,  $x \in ]-\pi, 0[$ .

## PARTE II (4 VALORES)

7. Considere uma equação diferencial de 1ª ordem da forma

$$y' = f(x, y)$$

onde  $f$  é uma função homogénea de grau zero. Demonstre que por uma mudança de variável conveniente esta equação pode ser transformada numa equação de variáveis separáveis.

8. Considere a equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Determine, justificando convenientemente, a solução da equação com as condições

$y(x,0) = f(x)$ ,  $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g(x)$  e considerando a corda de extremos  $x=0$  e  $x=L$  fixos e com ordenada 0, usando o método de separação de variáveis e séries de Fourier.

*v.s.f.f.*



- Resolva as partes I e II separadamente em cada uma das 2 folhas de capa fornecidas.
- Não é permitido sair da sala durante a prova e a sua duração é de 2h.
- As folhas de continuação deverão ser também devidamente preenchidas.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

**PARTE I**

1. Determine a solução geral da equação diferencial

$$(2x) dx + (e^{-(y+\cos(y))} - x^2 \sin(y)) dy = 0$$

2. Resolva a seguinte equação diferencial pelo método da variação das constantes

$$y'' + 4y' = 4t$$

3. Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais usando o método da variação das constantes:

$$\begin{cases} x_1' = 3x_2 + \cos 3t \\ x_2' = -3x_1 + \sin 3t \end{cases}$$

4. a) Determine a função  $f(t)$ , ( $t \in \mathbb{R}_0^+$ ), cuja transformada de Laplace é  $F(s) = \frac{1}{(3-s)^3}$

b) Calcule, usando Transformada de Laplace, a solução da equação diferencial  $y' + 3y = \sin(t - \pi)u(t - \pi)$ , com  $y(0)=2$

(Cotação: As perguntas de 1 a 4 valem 4 valores e as restantes 2 cada.)

v.s.f.f.



- Resolva as partes I e II separadamente em cada uma das 2 folhas de capa fornecidas.
- Não é permitido sair da sala durante a prova e a sua duração é de 2h.
- As folhas de continuação deverão ser também devidamente preenchidas.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

**PARTE II**

5. Considere a equação diferencial linear de coeficientes constantes  $y''' + ay'' + by' = 0$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais. Discuta as soluções dessa equação, em função de  $a$  e  $b$ , justificando convenientemente.

6. Enuncie e demonstre o Teorema da Convolução para a transformada de Laplace da convolução de duas funções  $f$  e  $g$ .

(Cotação: As perguntas de 1 a 4 valem 4 valores e as restantes 2 cada.)

*v.s.f.f.*



- A duração do exame é 2 horas.
- Cotação: As perguntas de 1 a 4 valem 4 valores e as restantes 2 cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

1. Calcule o fluxo do rotacional de  $f(x,y,z)=(y,-x,z)$ , de fora para dentro, sobre a superfície  $z = \frac{x^2}{4} + y^2$  limitada por  $z=1$ , usando o Teorema de Stokes.

2. Calcule a área da casca definida por  $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z \geq 0$ .

3. Calcule o fluxo de  $f(x,y,z)=(0, 0, z^2)$  para dentro da superfície limitada superiormente por  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e inferiormente por  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

4. Determine a série de Fourier da função periódica  $f(x)$  definida a partir de  $f(x) = \begin{cases} -x-1 & -1 < x < 0 \\ x-1, & 0 < x < 1 \end{cases}$ .

5. Considere a superfície regular  $S$  definida por

$$r(u,v) = X(u,v)i + Y(u,v)j + Z(u,v)k, \quad (u,v) \in T \subset \mathbf{R}^2.$$

Mostre, justificando convenientemente, que o vector fundamental é perpendicular à superfície  $S$  em cada um dos seus pontos

6. Sejam  $U$  e  $V$  dois campos escalares diferenciáveis em  $\mathbf{R}^3$ . Considere o campo vectorial  $W = \nabla U \times \nabla V$ .

a) Mostre que  $\text{div}W = 0$ .

b) Diga, justificando convenientemente, qual o valor de  $\oiint_S W \cdot dS$ , sendo  $S$  uma superfície fechada regular.



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

**FEUP**

Licenciaturas em Eng Mecânica e em Gestão e Eng Industrial

## ANÁLISE MATEMÁTICA III

2010-02-09

EXAME

- A duração do exame é 2 horas.
- Cotação: As perguntas de 1 a 4 valem 4 valores e as restantes 2 cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

1. Resolva, usando o método da variação das constantes, a equação diferencial  $y'' + 8y' + 20y = e^{-4x}$
2. a) Calcule, usando Transformadas de Laplace, a solução da equação diferencial  $y'' + 9y = 9$ , com  $y(0)=0$  e  $y'(0)=0$ .  
b) Determine a função  $f(t)$ ,  $(t \in \mathbb{R}_0^+)$ , cuja transformada de Laplace é  $F(s) = \frac{4 + e^{-3s}}{s^2 + 2s + 5}$
3. Sejam  $P(x,y)$  e  $Q(x,y)$  funções homogéneas do mesmo grau de homogeneidade. Considere a equação diferencial  $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ . Mostre que efectuando a mudança de variáveis  $x = \rho \cos \theta$  e  $y = \rho \sin \theta$ , a nova equação obtida é de variáveis separáveis.
4. Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial  $\mathbf{f}(x,y,z) = z^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$  através da superfície  $x^2 + y^2 + z^2 = 7$  com  $x \geq \sqrt{3}$ .
5. Desenvolva em série de Fourier a função periódica  $f(x) = -x - 1$ ,  $x \in ]-1, 1[$ .
6. Mostre que sendo  $f$  e  $g$  duas funções de campo escalar harmónicas ( $\text{div}(\nabla f) = 0$  e  $\text{div}(\nabla g) = 0$ ) em  $V \subset \mathbb{R}^3$  e sendo  $S$  a superfície envolvente de  $V$  se tem

$$\iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \iint_S g \frac{\partial f}{\partial n} dS$$

onde  $\frac{\partial f}{\partial n}$  e  $\frac{\partial g}{\partial n}$  representam as derivadas direccionais dos campos escalares respectivos na direcção do versor da normal  $n$ .



Universidade do Porto

Faculdade de Engenharia

**FEUP**

Licenciaturas em Eng Mecânica e em Gestão e Eng Industrial

## ANÁLISE MATEMÁTICA III

2010-02-09

EXAME 1ª PARTE

- A duração do exame é 2 horas.
- Cotação: As perguntas de 1 a 4 valem 4 valores e as restantes 2 cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

1. Determine a solução geral da equação diferencial  $\left(-\frac{1}{y} + x y e^{xy}\right) dy + y^2 e^{xy} dx = 0$
2. Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais usando o método da variação das constantes:
$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 - x_2 + e^{-t} \\ x_2' = x_1 + e^{-t} \end{cases}$$
3. Resolva, usando o método da variação das constantes, a equação diferencial  $y'' + 8y' + 20y = e^{-4x}$
4. a) Calcule, usando Transformadas de Laplace, a solução da equação diferencial  $y'' + 9y = 9$ , com  $y(0)=0$  e  $y'(0)=0$ .  
b) Determine a função  $f(t)$ ,  $(t \in \mathbb{R}_0^+)$ , cuja transformada de Laplace é  $F(s) = \frac{4 + e^{-3s}}{s^2 + 2s + 5}$
5. Sejam  $P(x,y)$  e  $Q(x,y)$  funções homogêneas do mesmo grau de homogeneidade. Considere a equação diferencial  $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ . Mostre que efectuando a mudança de variáveis  $x = \rho \cos \theta$  e  $y = \rho \sin \theta$ , a nova equação obtida é de variáveis separáveis.
6. Mostre, justificando convenientemente, que se  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$  então  $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}F(s)$ ,  $(a \geq 0)$ .

sendo  $u(t-a)$  a função de Heaviside com descontinuidade em  $a$ . e  $\mathcal{L}(f(t))$  a Transformada de Laplace de  $f(t)$ .



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

**FEUP**

Mestrados Integrados em Engenharia Mecânica e em Eng Industrial e Gestão

**ANÁLISE MATEMÁTICA III**

**DEMEGI**

2010-02-09

**EXAME 2ª PARTE**

- A duração do exame é 2 horas.
- Cotação: As perguntas de 1 a 4 valem 4 valores e as restantes 2 cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

1. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças  $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, xy)$  ao longo dos lados do triângulo com vértices nos pontos  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  e  $(1,0)$ . Verifique o teorema de Green.
2. Determine a área da superfície  $2y^2 - (x+z)^2 = 0$  com  $x+z \leq 2$ ,  $x \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .
3. Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$  através da superfície  $x^2 + y^2 + z^2 = 7$  com  $x \geq \sqrt{3}$ .
4. Desenvolva em série de Fourier a função periódica  $f(x) = -x - 1$ ,  $x \in ]-1, 1[$ .
5. Mostre que sendo  $f$  e  $g$  duas funções de campo escalar harmónicas ( $\text{div}(\nabla f) = 0$  e  $\text{div}(\nabla g) = 0$ ) em  $V \subset \mathbb{R}^3$  e sendo  $S$  a superfície envolvente de  $V$  se tem
$$\iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \iint_S g \frac{\partial f}{\partial n} dS$$
onde  $\frac{\partial f}{\partial n}$  e  $\frac{\partial g}{\partial n}$  representam as derivadas direccionais dos campos escalares respectivos na direcção do versor da normal  $n$ .
6. Enuncie o teorema de Stokes. Mostre, utilizando-o, que sendo  $\mathbf{v} = (a, b, c)$  um vector constante de  $\mathbb{R}^3$  e considerando a função de campo vectorial  $\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ , sendo  $\mathbf{r}$  o vector de posição do ponto genérico  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , se tem:

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\alpha}$$



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

**FEUP**

Mestrados Integrados em Eng Mecânica e em Gestão e Eng Industrial

## ANÁLISE MATEMÁTICA III

2010-02-18

**EXAME**

- A duração do exame é 2 horas.
- Cotação: As perguntas de 1, 2, 4 e 5 valem 4 valores e as restantes 2 cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

1. Determine a solução geral da equação diferencial  $y' - x^{-2}y + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2-x} = 0$
2. a) Calcule, usando Transformadas de Laplace, a solução da equação diferencial  $y'' + 4y' + 5y = 5u(t-1)$ , com  $y(0)=0$  e  $y'(0)=0$  e sendo  $u(t-1)$  a função de Heaviside com descontinuidade em 1..  
b) Determine a função  $f(t)$ ,  $(t \in \mathbb{R}_0^+)$ , cuja transformada de Laplace é  $F(s) = \frac{s}{s^2 - 2s + 1}$
3. Seja  $F(x,y,C)=0$  uma família de curvas a um parâmetro  $C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ).  
a) Defina trajectórias ortogonais a essa família de curvas.  
b) Indique, justificadamente, como pode obter a partir de  $F(x,y,C)=0$ , a equação diferencial que define essas trajectórias ortogonais.
4. Calcule o fluxo do rotacional de  $\mathbf{f}(x,y,z) = x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  através da superfície  $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$  no 1º octante.
5. Desenvolva a função  $f(x) = |x-1|$ ,  $x \in (-2,0)$  em série de co-senos.
6. Considere a superfície  $S$  fechada regular definida pela função vectorial  $\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\mathbf{i} + Y(u,v)\mathbf{j} + Z(u,v)\mathbf{k}$ ,  $(u,v) \in T \subset \mathbb{R}^2$ . Mostre que o valor do volume do sólido limitado por  $S$ , é dado por:

$$v(V) = \frac{1}{3} \iint_T \begin{vmatrix} X(u,v) & Y(u,v) & Z(u,v) \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv.$$



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

**FEUP**

Mestrados Integrados em Eng Mecânica e em Gestão e Eng Industrial

## ANÁLISE MATEMÁTICA III

2010-02-18

EXAME 1ª PARTE

- A duração do exame é 2 horas.
- Cotação: As perguntas de 1 a 4 valem 4 valores e as restantes 2 cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

1. Determine a solução geral da equação diferencial  $y' - x^{-2}y + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2-x} = 0$
2. Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais usando o método da variação das constantes:
$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + 3t^2 \operatorname{sen}(2t) \\ x_2' = 4x_1 - 6t^2 \operatorname{cos}(2t) \end{cases}$$
3. Resolva, usando o método da variação das constantes, a equação diferencial  $y'' - 3y' + 2y = te^t$
4. a) Calcule, usando Transformadas de Laplace, a solução da equação diferencial  $y'' + 4y' + 5y = 5u(t-1)$ , com  $y(0)=0$  e  $y'(0)=0$  e sendo  $u(t-1)$  a função de Heaviside com descontinuidade em 1..  
b) Determine a função  $f(t)$ ,  $(t \in \mathbb{R}_0^+)$ , cuja transformada de Laplace é  $F(s) = \frac{s}{s^2 - 2s + 1}$
5. Seja  $F(x,y,C)=0$  uma família de curvas a um parâmetro  $C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ).
  - a) Defina trajectórias ortogonais a essa família de curvas.
  - b) Indique, justificadamente, como pode obter a partir de  $F(x,y,C)=0$ , a equação diferencial que define essas trajectórias ortogonais.
6. Mostre, utilizando o princípio da indução matemática, que o operador diferencial  $(D - \alpha)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é anulador das funções  $e^{\alpha x}$ ,  $xe^{\alpha x}$ , ...,  $x^{n-1}e^{\alpha x} \forall n \in \mathbb{N}$



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

**FEUP**

Mestrados Integrados em Engenharia Mecânica e em Eng Industrial e Gestão

**ANÁLISE MATEMÁTICA III**

**DEMEGI**

2010-02-18

**EXAME 2ª PARTE**

- A duração do exame é 2 horas.
- Cotação: As perguntas de 1 a 4 valem 4 valores e as restantes 2 cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

1. Considere o campo de forças  $\mathbf{f}(x, y) = (y^2 e^{\cos y}, 2xy e^{\cos y} - xy^2 \sin y e^{\cos y})$ . Mostre que o trabalho realizado por  $\mathbf{f}$  ao longo da curva  $\mathbf{C}(t) = [x(t), y(t)]$ , entre os pontos  $\mathbf{C}(a)$  e  $\mathbf{C}(b)$ , depende somente desses pontos.

2. Calcule  $\iint_S xz dS$ , sendo superfície  $S$  dada por  $y^2 + z^2 = 9$  com  $0 \leq x \leq 3$ .

3. Calcule o fluxo do rotacional de  $\mathbf{f}(x, y, z) = x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  através da superfície  $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$  no 1º octante.

4. Desenvolva a função  $f(x) = |x-1|$ ,  $x \in (-2, 0)$  em série de co-senos.

5. Enuncie com rigor o teorema de Green.

O momento de inércia polar de uma superfície plana  $S$ , limitada por uma linha fechada  $C$ , relativamente à origem de um sistema de coordenadas cartesianas é dado por

$$I_p = \iint_S r^2(x, y) dx dy \text{ em que } r(x, y) \text{ é a distância do ponto } (x, y) \text{ à origem.}$$

Obtenha uma expressão que lhe permita obter o momento de inércia polar a partir de um integral de linha ao longo de  $C$ .

6. Considere a superfície  $S$  fechada regular definida pela função vectorial  $\mathbf{r}(u, v) = X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k}$ ,  $(u, v) \in T \subset \mathbf{R}^2$ . Mostre que o valor do volume do sólido limitado por  $S$ , é dado por:

$$v(V) = \frac{1}{3} \iint_T \begin{vmatrix} X(u, v) & Y(u, v) & Z(u, v) \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv.$$



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia  
**FEUP**

Mestrados Integrados em Engenharia Mecânica e em Gestão e Eng Industrial

## ANÁLISE MATEMÁTICA III

DEMEGI

2007-01-08

EXAME

- A duração do exame é 2 horas + 30 minutos de tolerância.
- Cotação: As perguntas de 1 a 6 valem 2,5 valores e as três restantes 5/3 cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

### PARTE I

1. Resolva a equação diferencial  $y'' + 2y' + y = \frac{2e^{-x}}{4-x^2}$ .
2. Classifique e resolva a equação diferencial  $3y' - \frac{1}{x-1}y - (x^2 - 1)y^{-2} = 0$ .
3. Determine a solução da equação diferencial  $y'' + 2y' + 4y = 4u(t-2) + 4$ , que satisfaz as condições  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , onde  $u(t)$  é a função de Heaviside com descontinuidade em  $x=2$ .

### PARTE II

4. Calcule  $\int_C ydx - xdy + zdz$  onde  $C$  é a curva de intersecção das superfícies  $z^2 + x^2 = 1$  e  $y + x = 1$ .
5. Considere o volume  $V$  como sendo o cubo  $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ . Calcule o fluxo do campo vectorial  $F(x, y, z) = (y^2, yx, zy)$  de fora para dentro do volume  $V$ .
6. Determine a expansão da função  $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ -1, & 1 < x < \pi \end{cases}$  em série de senos.

v.s.f.f.



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

**FEUP**

Mestrados Integrados em Engenharia Mecânica e em Gestão e Eng Industrial

## ANÁLISE MATEMÁTICA III

DEMEGI

2007-01-08

EXAME

### PARTE III

Do seguinte grupo de questões responda a **três** delas.

7. Enuncie e demonstre o Teorema da Convolução para a transformada de Laplace da convolução de duas funções  $f$  e  $g$ .

8. Considere um sistema diferencial linear homogéneo dado por

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

onde  $A$  é uma matriz real,  $n \times n$ ,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ . Supondo que  $A$  possui  $n$  valores próprios  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  e respectivos vectores próprios  $\vec{u}^{(1)}, \dots, \vec{u}^{(n)}$  demonstre, justificadamente, que o sistema tem  $n$  soluções linearmente independentes da forma  $\vec{x}^{(i)} = e^{\lambda_i t} \vec{u}^{(i)}$ .

9. Enuncie o teorema de Stokes e mostre, utilizando-o, que se a função  $F$  é uma função gradiente, então sendo  $C$  uma linha fechada regular se tem:

$$\oint_C F \cdot d\alpha = 0$$

10. Considere a equação em derivadas parciais

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Mostre, justificando convenientemente, que a solução da equação é dada por

$$z = f(ay - bx) + xg(ay - bx)$$

v.s.f.f.



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

**FEUP**

Mestrados Integrados em Engenharia Mecânica e em Gestão e Eng Industrial

## ANÁLISE MATEMÁTICA III

DEMEGI

2007-02-05

EXAME

- A duração do exame é 2horas + 30minutos de tolerância.
- Cotação: As perguntas de 1 a 6 valem 2,5 valores e as três restantes 5/3 cada.
- Justifique convenientemente todos os cálculos que efectuar.

### PARTE I

1. Resolva a equação diferencial  $y'' - 2y' + 5y = 2e^x \cos(2x)$ .
2. Determine a solução geral da equação diferencial  $(\sin x - 2y^3 \cos x) dx - (3y^2 \sin x) dy = 0$ .
3. Determine a solução da equação diferencial  $y'' - 4y' + 5y = 5tu(t-5)$ , que satisfaz as condições  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ , onde  $u(t)$  é a função de Heaviside com descontinuidade em  $x=5$ .

### PARTE II

4. Considere a superfície  $z + x^2 + y^2 - 4 = 0$  com  $z \geq 0$ . Calcule o fluxo do campo  $f(x, y, z) = (x, y, z)$  através dessa superfície.
5. Calcule  $\int_C -y dx + x dy + z dz$  onde  $C$  é a curva de intersecção das superfícies  $y = z^2 + x^2$  e  $y = 4$ .
6. Determine a expansão da função  $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi \\ \pi - x, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$  em série de co-senos.

v.s.f.f.



Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

**FEUP**

Mestrados Integrados em Engenharia Mecânica e em Gestão e Eng Industrial

## ANÁLISE MATEMÁTICA III

DEMEGI

2007-02-05

EXAME

### PARTE III

Do seguinte grupo de questões responda a **três** delas.

7. Considere o sistema diferencial linear de coeficientes constantes

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f} \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^n)$$

Seja  $\vec{X} = [X_1 X_2 \dots X_n]$  a matriz das  $n$  soluções linearmente independentes do sistema homogéneo associado. Mostre que  $\vec{x} = \vec{X} \cdot U$  com  $U = \int X^{-1} \vec{f} dt$  é solução particular do sistema completo.

8. Mostre, por indução matemática, que sendo  $L$  a transformada de Laplace se tem

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

9. Considere a superfície  $S$  fechada regular definida pela função vectorial  $r(u, v) = X(u, v)i + Y(u, v)j + Z(u, v)k$ ,  $(u, v) \in T \subset \mathbf{R}^2$ . Mostre que o valor do volume do sólido limitado por  $S$ , é dado por:

$$v(V) = \frac{1}{3} \iint_T \begin{vmatrix} X(u, v) & Y(u, v) & Z(u, v) \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

(Nota: Utilize convenientemente o teorema de Gauss)

10. Mostre, justificando convenientemente, que sendo  $\alpha$  e  $\beta$  raízes reais distintas da equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , a solução da equação em derivadas parciais

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

é dada por  $z = f(\alpha x + y) + g(\beta x + y)$ .

v.s.f.f.