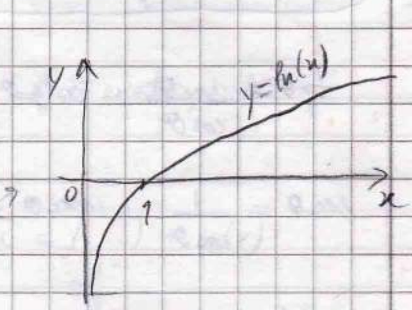
Propriedades do logaritmo natural

- se $e^{b} = a$, $\ln(a) = b$
- $e^{\ln(x)} = x$
- $\ln(e^{x}) = x$
- $\frac{d \ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$
- $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^{y}) = y \cdot \ln(x)$
- $y = \ln(x)$



Outras

$$a+b=c \Rightarrow (a+b)^2 = c^2$$

$$a+b=c \Rightarrow \sqrt{a+b} = \sqrt{c}$$

$$\frac{a+b}{cd} = \frac{e}{f} = \left(\frac{a+b}{cd}\right)^{-1} = \left(\frac{e}{f}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{cd}{a+b} = \frac{f}{e}$$

$$a = b+c \Rightarrow \ln(a) = \ln(b+c)$$

$\frac{(\ldots)}{(\ldots)}$ ← numerador / ← denominador

Integrais e derivadas importantes

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$\int 3^{6x} dx = \frac{3^{6x}}{\ln(3)}$$

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$$

$$\int u' \operatorname{tg} u \, du = -\ln|\cos u|$$

Frações parciais

Casos especiais:

- expressões quadráticas irredutíveis

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

- numerador tem de ter grau inferior ao denominador, senão tem de se simplificar p/ se isso aconteça

$$\frac{1}{(\ldots)(1+x)^2} = \frac{A}{(\ldots)} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{(1+x)^2}$$

Integração por partes

$\boxed{1}$ escolher 1 parte do integral p/ derivar e outra p/ integrar

$f(x) = (\ldots) \rightarrow f'(x)$ $\quad 1^a \cdot \int 2^a - \int 1^{a'} \int 2^a$

$g'(x) - (\ldots) \rightarrow g(x)$

2 $\boxed{2}$ $\int f g' = fg - \int f' g$

Divisão polinomial

- dividir 1 polinómio por outro de grau = ou + baixo, p/ simplificar

ex: $\int \frac{x^2-1}{x^2-16} dx \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} x^2-1 & x^2-16 \\ \hline -(x^2-16) & 1 \\ 0 \quad 15 & \end{array}$$

$$\int \frac{1 \cdot (x^2-16)}{(x^2-16)} + \frac{15}{x^2-16} dx = \int dx + \int \frac{15}{(x+4)(x-4)}$$

Identidades trigonométricas

$tg\,\theta = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}$ $cotg\,\theta = \frac{cos\,\theta}{sen\,\theta}$

$sec\,\theta = \frac{1}{cos\,\theta}$ $cosec\,\theta = \frac{1}{sen\,\theta}$

$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$

$sec^2\theta = 1 + tg^2\theta$

$cos(2\theta) = cos^2\theta - sen^2\theta =$

$sen(2\theta) = 2 sen\theta cos\theta$

$(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$

equação $\underline{n}$º grau $x^n + \ldots = \ldots$

" 2º grau $x^2 + 3 = x$

eq. diferencial ordem $\underline{n}$ $y^{(n)} \ldots = \ldots$

" 1 $y' = xy \ldots$

" 2 $y''x + y = 5 \cdot y$

Fórmula resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Matrizes

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A}^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} e^x & 2 \\ 2e^x & 6 \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2e^x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Propriedades do determinante

Equações diferenciais exatas

$Mdx + Ndy = U$, ver se é exata: se $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ → é exata, então

Receita: $dU = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}}_{M} dx + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial y}}_{N} dy$ → (A) $U = \int M dx = (\ldots) + \varphi(y)$

$dU = 0$

$U = cte$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left[(\ldots) + \varphi(y)\right]}_{U} = N}_{\text{daqui 2 parcelas cortam, e tira-se } \varphi'(y)}$$

Objetivo: tentar encontrar U

$U = (\ldots) + \varphi(y) \leftarrow \varphi(y) \xleftarrow{\text{primitiva-se}} \varphi'(y)$

(B) primitivar M e N e comparar (se um dos integrais for + difícil de primitivar, ir pelo (A))

Equações diferenciais homogéneas

$Mdx + Ndy = 0$, $y' = F(x,y)$

Receita:
1. pôr em ordem a y'
2. substituir x por λx e y por λy (verificação q é homogénea)
3. substituir $y = ux$ e $y' = u'x + u$ (transformação em eq. dif. de variáveis separáveis)

   $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u$

   ou $x' = v'x - v$
4. integrar $\int (\ldots)(x)\, dx = \int (\ldots)(u)\, du$
5. fazer substituição final $u = \frac{y}{x}$

Equações diferenciais exatas. Fator integrante

Partindo de $Mdx + Ndy = 0$

$\boxed{1}$ ver se é exata $\xrightarrow{\text{sim}}$ resolver pelo processo das exatas
não → continuar os passos

$\boxed{2}$ escolher a parcela mais simples entre M e N para inverter e fazer

$$f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \quad \text{ou} \quad g(y) = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$\boxed{3}$ fazer

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx} \quad \text{ou} \quad \mu(y) = e^{-\int g(y)dy}$$

$\boxed{4}$ multiplicar $\mu(x)$ ou $\mu(y)$ por $(Mdx + Ndy)$ ⇒ torna-se eq. dif. exata

M^*
N^*

método p/ eq. exatas $\xleftarrow{\text{sim}}$ confirmar ←

não → contas mal feitas

Equações diferenciais lineares

Partindo de eq. linear $y' + P(x)y = Q(x)$

$\boxed{1}$ encontrar solução da eq. homogénea $\quad y' \to \frac{dy}{dx}$

EHA: $y' + P(x) = 0$ que é diferencial variáveis separáveis → resolver p/ integração, $\boxed{y_h = \dots + c}$

"h" de homogénea

MVC

$\boxed{2}$ $c \to c(x) \Rightarrow y = \dots c$, $y' = [(\dots)c]'$

$\boxed{3}$ substituir y e y' na eq. original

$\boxed{4}$ pôr em ordem a $c'(x) = \dots$ e integrar p/ tirar $\underline{c}$

$\boxed{5}$ substituir $\underline{c}$ na solução da eq. homogénea (2)

Equações diferenciais lineares de ordem n, coeficientes ctes

→ partindo de uma eq do tipo $ay'' + by' + cy = d$ (NH)

$\boxed{1}$ fazê-la homogénea (se já for homogénea a solução fica dada em $\boxed{3}$)

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$\boxed{2}$ usar o polinómio associado característico e tirar as soluções:

$$ar^2 + br + b = 0$$ — pela fórmula resolvente — fatorizando

raízes podem ser • reais — dupla r (A) — distintas r_1 e r_2 (B)

• imaginárias — conjugadas $r_1 = a + ib$, $r_2 = a - ib$ (C)

$\boxed{3}$

(B) → $y = c_1 \overbrace{e^{r_1 x}}^{A} + c_2 \overbrace{e^{r_2 x}}^{B}$

(A) → $y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$

(C) → $y = c_1 \underbrace{e^{ax}\cos(bx)}_{A} + c_2 \underbrace{e^{ax}\sen(bx)}_{B}$

Não homogéneas ^{*2}

$\boxed{4}$ MVC, $c_1 \to c_1(x)$, etc. Escrever na forma

$$\begin{array}{l} \text{1ª derivada} \\ \text{2ª derivada} \\ \vdots \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ A' & B' \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$$

$\boxed{5}$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & B \\ d & B' \end{vmatrix}^{*}}{\det(M)} \xrightarrow[\text{p/ tirar } c_1(x)]{\text{primitivar}}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} A & 0 \\ A' & d \end{vmatrix}}{\det(M)} \xrightarrow[\text{p/ tirar } c_2(x)]{\text{primitivar}}$$

$\boxed{6}$ substituir c_1 e c_2 na eq homogénea

$*^1$ substituir coluna da esq. por $\begin{matrix} 0 \\ d \end{matrix}$

numa matriz 3x3 é igual

$*^2$ e, nesse caso, em $\boxed{3}$ obtivemos y_h e não y.

Sistemas de equações

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + cy_2 \cdots + f(x) \\ y_2' = by_1 + dy_2 \cdots + f(x) \end{cases}$$

raízes (v. próprios)

homogéneos (H): reais distintos (A); reais duplos (B); imaginárias (C)

não-homogéneos (NH): reais distintos (A); reais duplos (B); imaginárias (C) X ñ sai

$\boxed{1}$ (se não é homogénea → EHA)

- pôr na forma matricial (ter atenção à ordem dos coeficientes) (H) e (NH)

$\boxed{2}$ $|A - \lambda I|$ e tirar raízes: fatorizando; fórmula resolvente

$\boxed{3}$ (A) calcular os vetores próprios $\underline{u}$ p/ cada valor próprio λ_1 e λ_2 ...

solução será

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 x} \underline{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} \underline{u}_2$$

(B) calcular o vetor próprio $\underline{u}$ do valor próprio λ

$\boxed{4}$ fazer

$$(\underline{A} - \lambda \underline{I}) \underline{v} = \underline{u}$$

solução será

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda x} \underline{u} + c_2 e^{\lambda x} (\underline{u} x + \underline{v})$$

(C) calcular os vetores próprios $\underline{u}$ p/ cada valor próprio complexo

o 2º vetor próprio é o conjugado do 1º (ou fazer as contas p/ confirmar)

$\boxed{4}$ solução complexa ficaria $\lambda_1 = (a+bi)$ $\lambda_2 = (a-bi)$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{c_1 e^{x(a+bi)} \underline{u}_1}_{\underline{z}_1(x)} + \underbrace{c_2 e^{x(a-bi)} \underline{u}_2}_{\underline{z}_2(x)} \quad (1)$$

mas queremos a solução real, usando a fórmula de Euler

$\boxed{5}$ $e^{x(a+bi)} = e^{xa} (\cos bx + i \sin bx)$

$$\underline{z}_1(x) = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}^{\underline{u}_1}$$

fazer a multiplicação e depois separar a parte complexa da real

$$\underline{z}_1(x) = e^{ax}\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} + ie^{ax}\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}$$

tendo confiança nos resultados
$\underline{z}_2(x)$ = conjugado de $\underline{z}_1(x)$

$\boxed{6}$ $\bar{z}_1 = \frac{z_1 + z_2}{2}$ (vai dar parte real)

$\bar{z}_2 = \frac{z_1 - z_2}{2i}$ (vai dar parte imaginária de $\underline{z}_1(x)$)

$\boxed{7}$ substituir $\bar{z}_1$ e $\bar{z}_2$ em (1)

Ⓐ $c_1 e^{\lambda_1 x} \underline{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} \underline{u}_2$

Ⓑ $c_1 e^{\lambda x} \underline{u} + c_2 e^{\lambda x}(\underline{u}x + \underline{v})$

Ⓒ $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{ax}\begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix} + c_2 e^{ax}\begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix}$

NH

ⒶⒷ MVC $c \longrightarrow c(x)$

$\boxed{8}$ escrever $\underline{y}$ na forma matriz × vetor

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}}_{S}\begin{bmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{bmatrix}$$

Não esquecer o

$\boxed{9}$ fazer $\underline{c}'(x) = \underline{S}^{-1} \underline{f}(x)$

$$\underline{S}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{\det(u)}$$

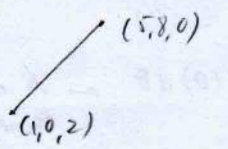
$\boxed{10}$ integrar

$$\int \underline{c}'(x)\,dx = \int \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \cdots + c_3 \\ \cdots + c_4 \end{bmatrix}$$

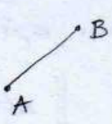
$\boxed{11}$ substituir em y, ver o que é y_p e o que é y_h

(5,8,0)

(1,0,2)



$\alpha(t) = (1,0,2) + t[(5,8,0)-(1,0,2)] \to t\in[0,1]$ $\quad t=0 \to A$, $t=1\to B$



$\alpha(t) = (1,0,2) + t(4,8,-2)$

$\alpha(t) = (4t+1,\ 8t,\ -2t+2)$ $\quad$ i.e. $\alpha(t) = A + t(B-A)$

Partes $\quad 1^a . \int 2^a - \int 1^a . \int 2^a$

$x^2+y^2+z^2 = r^2$

$x^2+y^2 \pm z^2 = 0$ $\quad (-z)$
$z \geq 0$

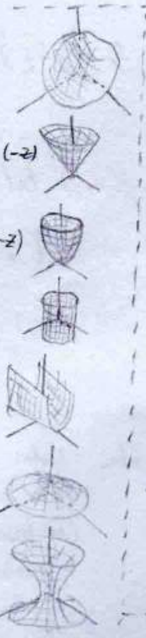
$x^2+y^2 \pm z = 0$ $\quad (-z)$

$x^2+y^2 = r^2$

$x^2 - z = 0$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=d$



$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

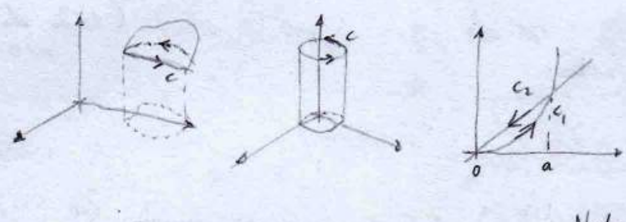
$\int u'u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$

$(u^n)' = n u^{n-1} \cdot u'$

$\int_a^b dx = [x]_{x=a}^{x=b} = b-a$

Integrais de linha, ao longo de um caminho $\underline{c}$. $\int_c$ se caminho fechado $\to \oint_c$

Apenas se parametriza a linha. $\to$ 1 parâmetro $(\alpha(\theta), \alpha(t), \dots)$



sentido direto ↺
" retrógrado ↻

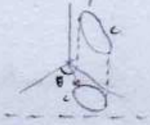
$\oint_c = -\oint_c$

Nota: $\int_{0\ c_1}^{a}(\dots) + \int_{a\ c_2}^{0}(\dots)$

ou $\begin{matrix}\theta \\ t\end{matrix} \in [\ ,\ ]$ limites

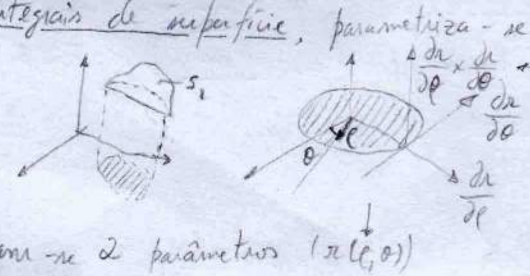
$\int_c \underline{f}\, d\underline{\alpha} = \int_c f(\alpha(\theta)) . \alpha'(\theta) d\theta$

Na param. projetando o caminho quando este se encontra no espaço ajuda a fazer a param.



$x =$ raio $\cdot \cos\theta$
$y =$ raio $\cdot \sin\theta$
$z =$ tira-se da função

Integrais de superfície, parametriza-se a superfície. $\to$ 2 parâmetros $(r(\rho,\theta))$



$\iint_S$ se sup. fechada $\to \oiint_S$

produto vetorial fundamental: obtido pela regra da mão direita, neste caso aponta p/ cima.

Usam-se 2 parâmetros $(r(\rho,\theta))$

$\boxed{\text{Área da superfície}} = \iint_S \left\| \frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \rho} \right\| d\rho d\theta$

• de função escalar

$\iint_S f\, dS = \iint_S f(\underline{r}(\rho,\theta)) . \left\| \frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \rho} \right\| d\rho d\theta$

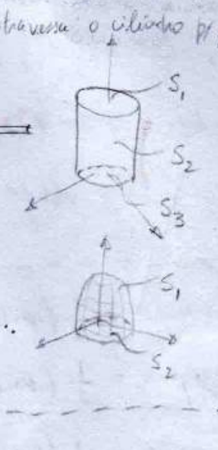
Nota: • determinar o fluxo q atravessa o cilindro p/ fora/dentro:

dá o $\boxed{\text{fluxo}}$ a atravessar a superfície

• de função vetorial

$\iint_S \underline{f} \cdot \underline{n}\, dS = \iint_S \underline{f}(\underline{r}(\rho,\theta)) . \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \rho}\right) d\rho d\theta$

• fluxo total = soma do fluxo q atravessa cada superfície



$\iint_{S_1} f(r_1(\rho,\theta))\left(\frac{\partial r}{\partial \rho}\times\frac{\partial r}{\partial \theta}\right) + \iint_{S_2} f(r_2(\rho,\theta)\dots$

Integrais de volume,

são sempre "coisas" fechadas, portanto cada superfície q constitui o volume é fechada (ver T. Gauss), e daí o $\oiint$.

$\iiint_V dV$ $\quad$ 3 parâmetros $\quad$ ex: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z\end{cases}$ $\quad r = (\rho, \theta, z)$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos^2(m\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2m\theta)$

$\sin^2(m\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2m\theta)$

$ax + by + cz = d$

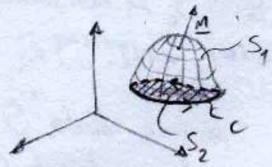
$\to$ p 112, 1ª parte

Há algumas expressões q̄ nos permitem relacionar certos $\oint_c$ c/ $\iint_s$ e v.v. e certos $\oiint_s$ c/ $\iiint_V$

$\boxed{\text{Stokes}}$: $\iint_S rot(\underline{f})\cdot \underline{n}\, ds = \oint_c \underline{f}\, d\alpha \iff \iint \underbrace{\underline{\nabla}\times f}_{rot(f)} \left(\frac{\partial r}{\partial \rho}\times\frac{\partial r}{\partial \theta}\right) d\rho\, d\theta = \int_c f(\alpha(\theta))\cdot\alpha'(\theta)\, d\theta$ ← dá o fluxo do rotacional

$\underline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ ← vetor gradiente

$rot(\underline{f}) = \underline{\nabla}\times\underline{f} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ $\quad f(x,y,z) = (\underbrace{\ldots}_{P}, \underbrace{\ldots}_{Q}, \underbrace{\ldots}_{R})$



(só esta sup. e o jacob. n̄ entra) (tanto dá usar S_1 ou S_2)

$\boxed{\text{Green}}$: $\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \oint_c \underbrace{P dx + Q dy}$ $\quad f(x,y) = (\underbrace{\ldots}_{P}, \underbrace{\ldots}_{Q})$

$\oint = -\iint_A$ (sentido retrógrado) $\quad f(\alpha(\theta))\cdot\alpha'(\theta)\, d\theta$

se escolhermos $f(x,y)$ tal q̄ $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \Rightarrow$ o $\iint_s$ e o $\oint_c$ dão-nos a área da superfície (q̄ é plana)

Nota: é um caso particular de Stokes. (2D). se fizermos $rot(f)$ em q̄ f for $f(x,y) = (\underbrace{\ldots}_{P}, \underbrace{\ldots}_{Q})$ vai dar $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

$\boxed{\text{Gauss}}$: $\underbrace{\iiint_V div(f)\, dV}$ $= \underbrace{\sum_{i=1}^{NS}\oiint_S \underline{f}_i\cdot\underline{n}_i\, dS}$, $\quad div(f) = \underline{\nabla}\cdot\underline{f} = \frac{\partial(\ldots)}{\partial x} + \frac{\partial(\ldots)}{\partial y} + \frac{\partial(\ldots)}{\partial z}$ = escalar

$f(x,y,z) = (\ldots, \ldots, \ldots)$

dá-nos o fluxo através do volume todo (fluxo total) p/ fora

fluxo total = soma do fluxo em cada superfície*

o fluxo calculado daqui é para fora. Para dentro é só multiplicar por (-1)

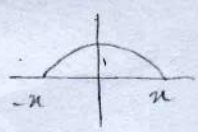
Nota: como o div. é feito s/ param. no integral (se param.) é necessário por o jacobiano.

Funções periódicas e extensões de funções a funções periódicas: $\boxed{\text{Fourier}}$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$

$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx$ $\quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx$ $\quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx$

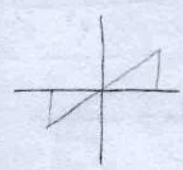
Função par



$f(x) = f(-x)$

$b_n = 0$

Função ímpar



$f(x) = -f(-x)$

$a_0 = 0$, $a_n = 0$

• $\cos(n\pi) = (-1)^n$ • se função par $\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\ldots$ se ímpar (produto de ímpar × ímpar = par)

Seja $f(x,y,z) = (f_x, f_y, f_z)$. Se as derivadas cruzadas de $\underline{f}$ forem iguais, i.e, $\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}$; $\frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x}$; $\frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}$

$\underline{f}$ é gradiente e $\int_c \underline{f}\cdot d\underline{\alpha} = \int_A^B \underline{f}\cdot d\alpha$ não depende do caminho, i.e., $\int_A^B \underline{f}\cdot d\underline{\alpha} = \varphi(B) - \varphi(A)$ em q̄ φ é uma função potencial de $\underline{f}$. $f_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$; $f_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$; $f_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ ⇒ A função potencial $\varphi(x,y,z)$ é obtida por primitivação

$\left.\begin{array}{l} \varphi(x,y,z) = \int f_x\, dx = (\ldots) + K_1(y,z) \\ \varphi(x,y,z) = \int f_y\, dy = (\ldots) + K_2(x,z) \\ \varphi(x,y,z) = \int f_z\, dz = (\ldots) + K_3(x,y) \end{array}\right\} \varphi(x,y,z)$

$\cos nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}\left(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\right)$

$\operatorname{sen} nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(n+m)x + \operatorname{sen}(n-m)x\right)$

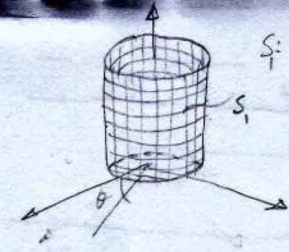
$\operatorname{sen} nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}\left(\cos(n+m)x - \cos(n-m)x\right)$

---

se $\int_c (\ldots)dx + (\ldots)dy + (\ldots)dz \Rightarrow f(x,y,z) = (\ldots, \ldots, \ldots)$

*: mas é preciso ter de ver o sentido de maneira q̄ seja p/ fora do volume

ADE

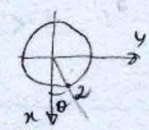


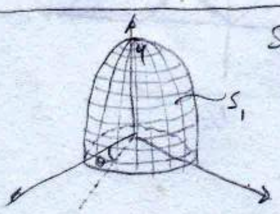
$S_1: x^2+y^2=4 \to r(\theta,z)$

param:

$$\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\,\text{sen}\,\theta \\ z=z \end{cases}$$

vista de cima



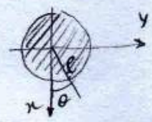


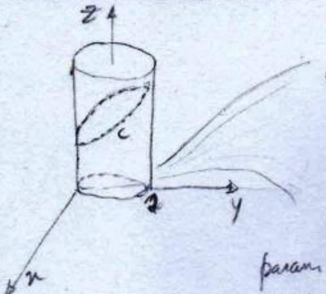
$S_1: z+x^2+y^2-4=0 \to r(\rho,\theta)$

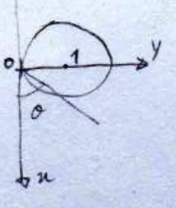
param

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\text{sen}\,\theta \\ z=4-\rho^2 \end{cases}$$

vista de cima



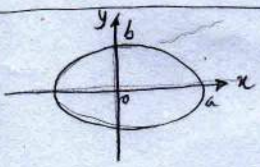




$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 \\ z=1+y \end{cases} \to \alpha(\theta)$$

param

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\text{sen}\,\theta+1 \\ z=1+\underbrace{(\text{sen}\,\theta+1)}_{y} \end{cases}$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

param:

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

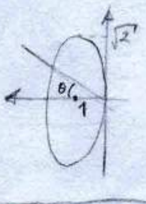
$C: y=1-|1-x|$ entre $A(0,0)$ e $B(3,-1)$

$(1-x)>0 \Rightarrow y=1-(1-x) \Rightarrow y=x \to C_1$

$(1-x)<0 \Rightarrow y=1-[-(1-x)] \Rightarrow y=2-x \to C_2$

$$C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=2(x+y) \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=2^2 \\ y=2-x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+(2-x)^2+z^2=2^2 \\ - \end{cases} \overset{(\dots)}{\Rightarrow} \begin{cases} (x-1)^2+\frac{z^2}{2}=1 \\ - \end{cases}$$

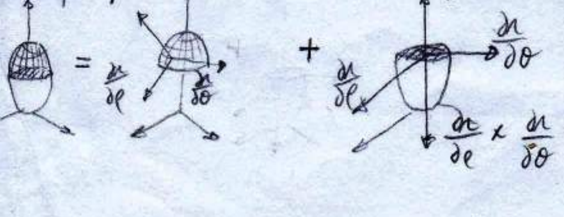


$x=1+\cos\theta$

$z=\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta$

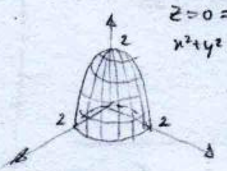
(ver fórmula da elipse)

Fluxo p/ fora do volume a escuro:



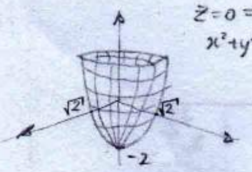
$x^2+y^2+z-2=0$

$z=0 \Rightarrow x^2+y^2=2$



$x^2+y^2-z-2=0$

$z=0 \Rightarrow x^2+y^2=2$

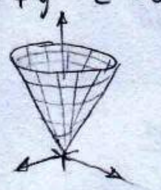


$S: x^2+y^2+z^2=a^2$, 1º octante

param.

coord. cilind.	coord. esf.
$x=\rho\cos\theta$	$x=a\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta$
$y=\rho\,\text{sen}\,\theta$	$y=a\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta$
$z=\sqrt{a^2-\rho^2}$	$z=a\cos\varphi$
$\theta\in[0,\pi/2]$	$\theta\in[0,\pi/2]$
$\rho\in[0,a]$	$\varphi\in[0,\pi/2]$

$S: x^2+y^2-z^2=0 \quad z\geq 0$

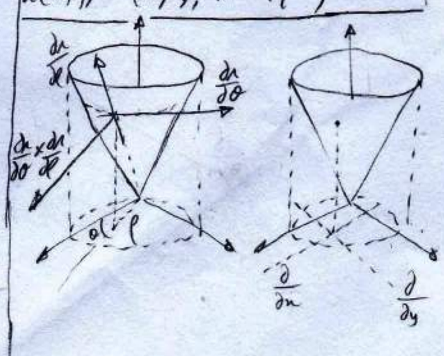


param.

coord. cilind	coord. cartesianas
$x=\rho\cos\theta$	$x=x$
$y=\rho\,\text{sen}\,\theta$	$y=y$
$z=\rho^2$	$z=\sqrt{x^2+y^2}$

$r(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta, \rho^2)$

$r(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$



esfera de centro (a,b,c)

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

$x^2+y^2=4y \Rightarrow x^2+y^2-4y+4-4=0$

$x^2+(y-2)=4$

ADF

$\int \sen\theta\cos\theta\, d\theta \Rightarrow \int u\,du \Rightarrow \frac{u^2}{2} \Rightarrow \frac{\sen^2\theta}{2}$

$u = \sen\theta$
$du = \cos\theta\, d\theta$

$\int \cos^4\theta \sen\theta\, d\theta \Rightarrow -\int u^4 du = -\frac{u^5}{5} \Rightarrow \frac{-\cos^5\theta}{5}$

$u = \cos\theta$
$du = -\sen\theta\, d\theta$

$\int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2}$ | $\int x^{-1/2} dx = 2x^{1/2}$

$\int \rho(2-\rho^2)^{1/2} d\rho = -\frac{1}{2}\int -2\rho(2-\rho^2)^{1/2} = -\frac{1}{2}\int u^{1/2} du =$

$u = 2-\rho^2$
$du = -2\rho$

$= -\frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2} u^{3/2}}{3} = -\frac{u^{3/2}}{3} = -\frac{(2-\rho^2)^{3/2}}{3}$

$\int \frac{u'}{u} du = \ln(u)$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\int \cos^3\theta\, d\theta = \int \cos^2\theta\cos\theta\, d\theta = \int (1-\sen^2\theta)\cos\theta\, d\theta$

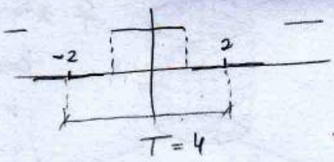
$= \int \cos\theta - \sen^2\theta\cos\theta\, d\theta = \sen\theta - \int \sen^2\theta\cos\theta\, d\theta$

$\int \sen^2\theta\cos\theta\, d\theta \Rightarrow \int u^2 du = \frac{u^3}{3} \Rightarrow \frac{\sen^3\theta}{3}$

$\sen\theta = u$
$\cos\theta\, d\theta = du$

Lembrar: $\cos(\pi) = \cos(-\pi) = -1$

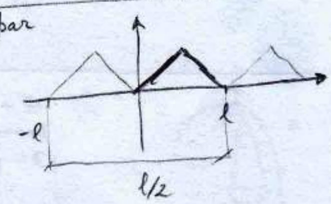
$$f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t < -1 \\ k, & -1 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$



---

ext par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2k}{\ell} t, & 0 < t < \frac{\ell}{2} \\ \frac{2k}{\ell}(\ell - t), & \frac{\ell}{2} < t < \ell \end{cases}$$



Transformadas de Laplace

$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$

$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} wt\} = \frac{w}{s^2+w^2}$ $\mathcal{L}\{\cos wt\} = \frac{s}{s^2+w}$ $\mathcal{L}\{e^{wt}\} = \frac{1}{s-w}$

———— // ———— // ———— // ———— // ———— // ————

$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0)$ $\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)$

———— // ———— // ———— // ———— // ———— // ————

1º Teorema : translação em $\underline{s}$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

———— // ———— // ———— // ———— // ———— // ————

2º Teorema : translação em $\underline{t}$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t-a)\, u(t-a)\} = e^{-as} F(s)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+7}{(s+3)^4}\right\} \quad \frac{2s+7}{(s+3)^4} = \frac{2s+6+1}{(s+3)^4} = \frac{2(s+3)}{(s+3)^4} + \frac{1}{(s+3)^4} \ldots$$

$$\mathcal{L}\{t\,u(t-1)\} = \mathcal{L}\{(t-1)\,u(t-1) + u(t-1)\} = \mathcal{L}\{(t-1)u(t-1)\} + \mathcal{L}\{1 \cdot u(t-1)\} \ldots$$

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0<t<1 \\ 2\cos(\pi t), & 1<t<2 \\ 0, & t>2 \end{cases} \qquad g(t) = 2\cos(\pi t)\left[u(t-1) - u(t-2)\right]$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0<t<4 \\ t-4, & 4<t<7 \\ 3, & t>7 \end{cases} \qquad g(t) = 3u(t-7) + (t-4)\left[u(t-4) - u(t-7)\right]$$

$$\mathcal{L}\{(t-4)\,u(t-7)\} = \mathcal{L}\{(t-7+3)\,u(t-7)\} = \mathcal{L}\cdot\{[(t-7)+3]\,u(t-7)\} = \ldots$$

$$\int tg\,x\,sen\,x = \int \frac{sen^2 x}{\cos x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\cos x} - \cos x\,dx = \int \sec x\,dx - \int \cos x\,dx$$

$$\int \frac{1}{z}\,dz = \int \frac{2x-1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{z}\,dz = \int \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln z = 2x - \ln x$$

$$\ln z = 2x + \ln x^{-1}$$

$$z = e^{2x + \ln x^{-1}}$$

$$z = e^{2x} \cdot e^{\ln x^{-1}}$$

$$z = \frac{e^{2x}}{x}$$

$$\int e^{-y-\cos y} \cdot e^{\cos y} - e^{\cos y} x^2\, sen\,y\,dy$$

$$\int e^{-y} \cdot e^{-\cos y} \cdot e^{\cos y} - x^2 \int e^{\cos y}\, sen\,y\,dy \qquad u = \cos y$$

$$du = -sen\,y\,dy$$

$$\int e^{y} + x^2 \int e^{u}\,du$$

$$-e^{-y} + x^2 \cdot e^{u} = e^{y} + x^2 e^{\cos y}$$

$$\int \ln(x-1)\cdot(x-1)\,dx \Rightarrow \int \ln u \cdot u\,du \Rightarrow$$

$$u = x-1 \qquad f \to \ln u \quad f' \to \frac{1}{u}$$

$$du = 1 \qquad g' \to u \quad g \to \frac{u^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{2}\ln u - \int \frac{u^{\cancel{2}}}{2\cancel{u}}\,du = \frac{u^2}{2}\ln u - \frac{1}{2}\int u\,du =$$

$$= \frac{u^2}{2}\ln u - \frac{1}{2}\frac{u^2}{2} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{4}\cdot(x-1)^2 \quad //$$

ADE

$$\int \frac{x}{x-1}\,dx \qquad \int \frac{u'}{u}\,du = \ln(u)$$

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \underbrace{\frac{x-1}{x-1}}_{=1} + \frac{1}{x-1}$$

$$\int dx + \int \frac{1}{x-1} = x + \ln(x-1)$$

//

//

$$\int 4xe^{x^2}\,dx = 2\int 2xe^{x^2}\,dx = 2e^{x^2}$$

//

//

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{(1-x^2)}}\,dx \qquad u = 1-x^2 \qquad du = -2x\,dx$$

$$-\int \underbrace{\frac{-2x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx}_{du} = -\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = 2\int -\frac{1}{2}u^{-3/2}\,du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{u}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

//

//

$$\int \frac{x+2y}{(x+y)^2}\,dx = \int \frac{x+y}{(x+y)^2}\,dx + \int \frac{y}{(x+y)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+y)}{(x+y)^2}\,dx + y\int \frac{1}{(x+y)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x+y)^2 - \frac{y}{x+y}$$

//

//

$$\frac{1}{s(s^2+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2}$$

$$1 = As^2 + 2A + Bs^2 + Cs$$

coef. s^2 / coef. s / coef. cte

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 0 = C \\ 1 = 2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1/2 \\ C = 0 \\ A = 1/2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{s(s^2+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+2}\right)$$

//

$$\frac{4}{(s-1)(s^2+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+3}$$

//

$$\frac{s^3-2s^2+1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \Rightarrow$$

ou

$$\frac{As+B}{s^2}$$

$$\Rightarrow \frac{As^3 + As + Bs^2 + B + Cs^3 + Ds^2}{s^2(\cancel{s^2+1})} = \frac{s^3-2s^2+1}{s^2(\cancel{s^2+1})}$$

determinar A, B, C e D e substituir

//