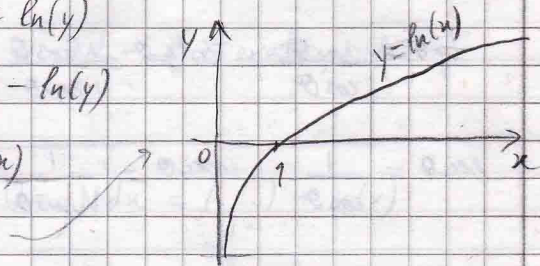


Propriedades do logaritmo natural

- se $e^b = a$, $\ln(a) = b$
- $e^{\ln(x)} = x$
- $\ln(e^x) = x$
- $\frac{d \ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$
- $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$
- $y = \ln(x)$



Outras

$$a + b = c \Rightarrow (a + b)^2 = c^2$$

$$a + b = c \Rightarrow \sqrt{a + b} = \sqrt{c}$$

$$\frac{a+b}{cd} = \frac{e}{f} = \left(\frac{a+b}{cd}\right)^{-1} = \left(\frac{e}{f}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{cd}{a+b} = \frac{f}{e}$$

$$a = b + c \Rightarrow \ln(a) = \ln(b + c)$$

(...) ← numerador
(...) ← denominador

Frações parciais

Casos especiais:

- expressões quadráticas irredutíveis

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

- numerador tem de ter grau inferior ao denominador, senão tem de se simplificar p/ q/ se isso acontecer

$$\frac{1}{(\dots)(1+x)^2} = \frac{A}{(\dots)} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{(1+x)^2}$$

Integrais e derivadas imediatas

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \quad \int 3^{6x} dx = \frac{3^{6x}}{\ln(3)}$$

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$$

$$\int u' \cos u du = -\ln|\cos u|$$

Integração por partes

- 1] escolher 1 parte do integral p/ derivar e outra p/ integrar

$$f(x) = (\dots) \rightarrow f'(x) \quad 1^a \cdot 2^a - \int 1^a \cdot 2^a$$

$$g'(x) = (\dots) \rightarrow g(x)$$

$$2] \int fg' = fg - \int f'g$$

Divisão polinomial

- dividir 1 polinómio por outro de grau = ou + baixo, p/ simplificar

$$\text{ex: } \int \frac{x^2 - 1}{x^2 - 16} dx \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 - 16} = \frac{x^2 - 16 + 15}{x^2 - 16} = 1 + \frac{15}{x^2 - 16}$$

$$\int \frac{1 \cdot (x^2 - 16)}{x^2 - 16} + \frac{15}{x^2 - 16} dx = \int dx + \int \frac{15}{(x+4)(x-4)}$$

Identidades trigonométricas

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} \quad \operatorname{cotg} \theta = \frac{\operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\operatorname{sec} \theta = \frac{1}{\operatorname{cos} \theta} \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{sec}^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta$$

$$\operatorname{cos}(2\theta) = \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta =$$

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta$$

$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

equações n° grau $x^n + \dots = \dots$

" 2^o grau $x^2 + 3 = x$

eq. diferencial ordem n $y^{(n)} = \dots$

" 1 $y' = \kappa y \dots$

" 2 $y'' \kappa + y = 3 + y$

Fórmula resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

A

$$\lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} e^n & 2 \\ 2e^n & 6 \end{vmatrix} = e^n \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2e^n \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Propriedades do determinante

Equações diferenciais exatas

$Mdx + Ndy = U$, ou se é exata: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow$ é exata, então

Recita: $dU = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}}_M dx + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial y}}_N dy$
 \downarrow
 $dU = 0$
 \downarrow
 $U = cte$

$U = \int M dx = (\dots) + \varphi(y)$ (A)

$\frac{d}{dy} [(\dots) + \varphi(y)] = N$
 \downarrow
 daí 2 parcelas constam, e tira-se $\varphi(y)$

depois tenta encontrar U

$U = (\dots) + \varphi(y)$ ← $\varphi(y)$ primitiva-se

(B) primitivar M e N e comparar

(se um dos integrais for + difícil de primitivar, ir pelo (A))

Equações diferenciais homogêneas

$Mdx + Ndy = 0$, $y' = F(x,y)$

Recita: 1] por em ordem a y'

2] substituir x por λx e y por λy (verificação se é homogênea)

3] substituir $y = ux$ e $y' = u'x + u$ (transformação em eq. dif. de variáveis separáveis)

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$

ou $x' = v'x - v$

4] integrar $\int (\dots)(u) du = \int (\dots)(u) du$

5] fazer substituição final $u = \frac{y}{x}$

Equações diferenciais exatas. Fator integrante

Partindo de $Mdx + Ndy = 0$

1] Ver se é exata $\xrightarrow{\text{sim}}$ resolver pelo processo das exatas
 $\xrightarrow{\text{não}}$ continuar os passos

2] escolher a parcela mais simples entre M e N para inventar e fazer

$$f(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \quad \text{ou} \quad g(y) = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

3] fazer $u(x) = e^{\int f(x) dx}$ ou $u(y) = e^{-\int g(y) dy}$

4] multiplicar $u(x)$ ou $u(y)$ por $(Mdx + Ndy) \Rightarrow$ torna-se eq. dif. exata

M^*
 N^*

método p/ eq. exatas $\xrightarrow{\text{sim}}$ confirmar \leftarrow
 $\xrightarrow{\text{não}}$
 contas mal feitas \leftarrow

Equações diferenciais lineares

Partindo de eq. linear $y' + P(x)y = Q(x)$

1] encontrar solução da eq. homogênea

EHA: $y' + P(x)y = 0$ que é diferencial \rightarrow resolver p/ integração, $y_h = \dots + C$
 variáveis separáveis

"h" de homogênea

↓ MRC

2] $C \rightarrow c(x) \Rightarrow y = \dots C, y' = [\dots C]'$

3] substituir y e y' na eq. original

4] pôr em ordem e $d'(x) = \dots$ e integrar p/ tirar C

5] substituir C na solução da eq. homogênea (2)

Equações diferenciais lineares de ordem n , coeficientes ctes

→ partindo de uma eq do tipo $ay'' + by' + cy = d$ (NH)

1) fazê-la homogênea

$$ay'' + by' + cy = 0$$

(se já for homogênea a solução fica dada em [3])

2) achar o polinômio associado característico e tirar as soluções:

$$ar^2 + br + c = 0$$

- pela fórmula quadrática

As raízes podem ser:

• reais

◀ dupla r (A)

distintas r_1 e r_2 (B)

- fatorizando

• imaginárias, conjugadas $r_1 = a + ib$ (C)

$r_2 = a - ib$

3

(B) →

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

(A) → $y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$

(C) → $y = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx)$

↓ Não homogêneas^{*2}

4) MVC, $c_i \rightarrow c_i(x)$, etc. Encontrar na forma

$$\begin{matrix} \text{1ª derivada} \\ \text{2ª derivada} \\ \vdots \end{matrix} \begin{bmatrix} A & B \\ A' & B' \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$$

M

5

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & B \\ d & B' \end{vmatrix}}{\det(M)} \xrightarrow{\text{primitiva}} \text{p/ tirar } c_1(x)$$

6) substituir c_1 e c_2 na eq homogênea

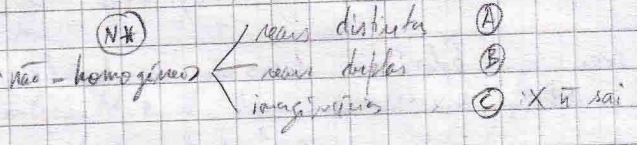
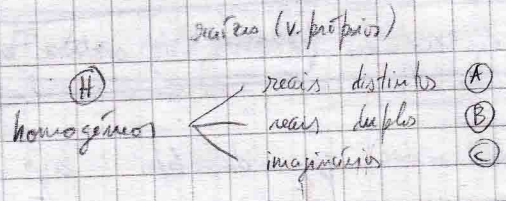
$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} A & 0 \\ A' & d \end{vmatrix}}{\det(M)} \xrightarrow{\text{primitiva}} \text{p/ tirar } c_2(x)$$

*1 substituir valores da eq. por 0
na matriz 3×3 e igual

*2 e, nesse caso, em [3] obtivemos y_h e não y .

Sistemas de equações

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + cy_2 + f(x) \\ y_2' = by_1 + dy_2 + f(x) \end{cases}$$



1) se não é homogêneo → EHA

• por na forma matricial (ter atenção à ordem dos coeficientes) (H) e (NH)

2) $|A - \lambda I|$ e tirar raízes ← fatorizando fórmula resolvente

3) (A) calcular os vetores próprios \underline{u} p/ cada valor próprio λ_1 e λ_2 ...

solução geral

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 x} \underline{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} \underline{u}_2$$

(B) calcular o vetor próprio \underline{u} do valor próprio λ

4) fazer

$$(A - \lambda I) \underline{v} = \underline{u}$$

solução geral

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda x} \underline{u} + c_2 e^{\lambda x} (\underline{u}x + \underline{v})$$

(C) calcular os vetores próprios \underline{u} p/ cada valor próprio complexo
o 2º vetor próprio é o conjugado do 1º (ou fazer as contas e confirmar)

4) solução complexa ficaria

$$\lambda_1 = (a + bi) \quad \lambda_2 = (a - bi)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{n(a+bi)} \underline{u}_1 + c_2 e^{n(a-bi)} \underline{u}_2 \quad (1)$$

$\underline{z}_1(x) \qquad \underline{z}_2(x)$

mas queremos a solução real, usando a fórmula de Euler

$$e^{n(a+bi)} = e^{na} (\cos bx + i \sin bx)$$

$$\underline{z}_1(n) = e^{an} (\cos bu + i \sin bu) \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

fazer a multiplicação e depois separar a parte complexa da real

$$\underline{z}_1(n) = e^{an} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} + i e^{an} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

terendo confiança nos resultados $\underline{z}_2(n) = \text{conjugado de } \underline{z}_1(n)$

6 $\underline{z}_1 = \frac{\underline{z}_1 + \underline{z}_2}{2}$ (vai dar parte real)

$\underline{z}_2 = \frac{\underline{z}_1 - \underline{z}_2}{2i}$ (vai dar parte imaginária de $\underline{z}_1(n)$)

7 substituir \underline{z}_1 e \underline{z}_2 em (1)

8

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 e^{an} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} + c_2 e^{an} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

A $c_1 e^{\lambda_1 n} u_1 + c_2 e^{\lambda_2 n} u_2$
 B $c_1 e^{\lambda_1 n} u + c_2 e^{\lambda_2 n} (u + v)$

NH

9 MK $C \rightarrow c(n)$

8 escrever y na forma matriz \times vetor

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} c_1(n) \\ c_2(n) \end{bmatrix}$$

Não esquecer o

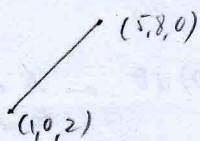
9 fazer $\underline{c}(n) = \underline{S}^{-1} \underline{f}(n)$

$$\underline{S}^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

10 integrar

$$\int \underline{c}(n) dn = \int \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} dn = \begin{bmatrix} \dots + c_3 \\ \dots + c_4 \end{bmatrix}$$

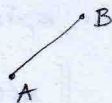
11 substituir em y , ver o g_e e y_p e o g_e e y_h



$$\alpha(t) = (1, 0, 2) + t[(5, 8, 0) - (1, 0, 2)] \rightarrow t \in [0, 1] \quad t=0 \rightarrow A$$

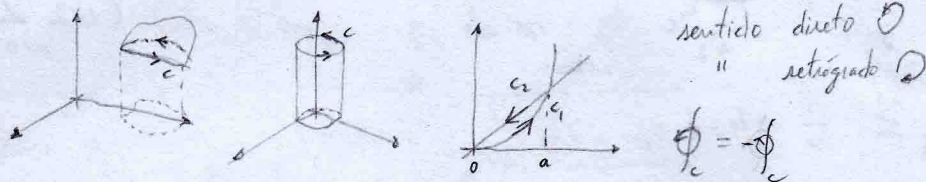
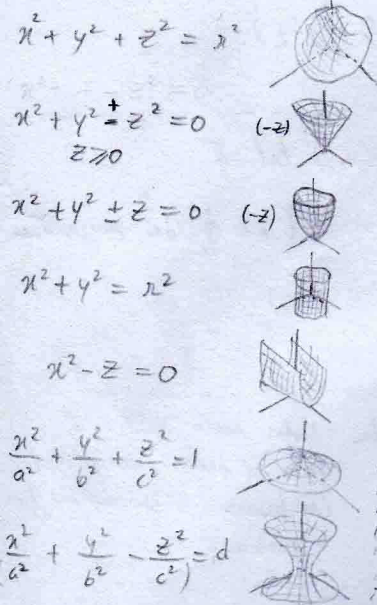
$$\alpha(t) = (1, 0, 2) + t(4, 8, -2) \quad t=1 \rightarrow B$$

$$\alpha(t) = (4t+1, 8t, -2t+2) \quad \text{i.e. } \alpha(t) = A + t(B-A)$$



Partes $1^a \int 2^x \cdot \int 1^x \cdot \int 2^{-x}$

Integrais de linha, ao longo de um caminho C . \int_C se caminho fechado $\rightarrow \oint$
 Apenas se parametriza a linha. \rightarrow 1 parâmetro $(\alpha(\theta), \alpha(t), \dots)$



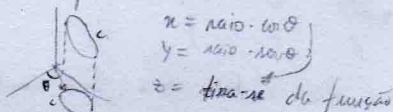
sentido direto \odot
 " retrógrado \ominus

$$\oint_C = -\oint_C$$

Nota: $\int_{c_1}^a (\dots) + \int_a^{c_2} (\dots)$

limites $\theta \in [\dots]$
 $\int_C f d\alpha = \int_c f(\alpha(\theta)) \cdot \alpha'(\theta) d\theta$

Na parametr. projetando o caminho quando este se encontra no espaço ajuda a fazer a paran.



Integrais de superfície, parametriza-se a superfície. \rightarrow 2 parâmetros $(r(\rho, \theta))$



\iint_S se sup. fechada $\rightarrow \oiint_S$
 produto vetorial fundamental: obtido pela regra da mão direita, neste caso a apontar p/ cima.

Usam-se 2 parâmetros $(r(\rho, \theta))$

Área da superfície $= \iint_S \left\| \frac{dr}{d\rho} \times \frac{dr}{d\theta} \right\| d\rho d\theta$

Nota: • determina o fluxo q atravessa o cilindro p/ fora/dentro.

dá o fluxo a atravessar a superfície

• de função escalar

$$\iint_S f dS = \iint_S f(r(\rho, \theta)) \cdot \left\| \frac{dr}{d\rho} \times \frac{dr}{d\theta} \right\| d\rho d\theta$$

• de função vetorial

$$\iint_S f \cdot n dS = \iint_S f(r(\rho, \theta)) \cdot \left(\frac{dr}{d\rho} \times \frac{dr}{d\theta} \right) d\rho d\theta$$

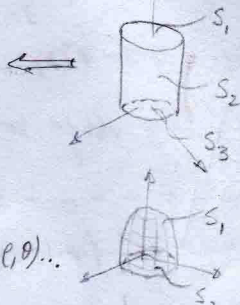
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\int u' u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1}$$

$$(u^m)' = m u^{m-1} \cdot u'$$

$$\int_a^b du = [u]_{x=a}^{x=b} = b - a$$

o fluxo total = soma do fluxo q atravessa cada superfície



$$\iint_{S_1} f(r(\rho, \theta)) \left(\frac{dr}{d\rho} \times \frac{dr}{d\theta} \right) + \iint_{S_2} f(r(\rho, \theta)) \dots$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta)$$

$$\sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta)$$

Integrais de volume,

são sempre "coisas" fechadas, portanto cada superfície q constitui o volume é fechada (Ver. T. Gauss), e daí o \iiint .

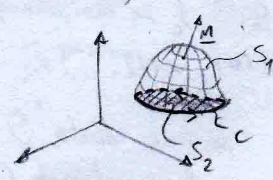
$$\iiint_V dV \quad 3 \text{ parâmetros ex: } \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \alpha = (\rho, \theta, z)$$

$$ax + by + cz = d$$

Há algumas expressões q̄ no permitem relacionar certos φ_c c/ ∫_S e v.v. e certos φ_S c/ ∫∫_V

Stokes: $\int_S \text{rot}(f) \cdot \underline{n} \, dS = \oint_C f \, dx \iff \int \underbrace{\nabla \times f}_{\text{rot}(f)} \left(\frac{dx}{\partial \theta} \times \frac{dy}{\partial \theta} \right) d\theta = \int_C f(\alpha(\theta)) \cdot \alpha'(\theta) \, d\theta$ ← de o fluxo do rotacional

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ **rot(f) = ∇ × f =** $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ $f(x, y, z) = (\underbrace{\dots}_P, \underbrace{\dots}_Q, \underbrace{\dots}_R)$



(se esta sup. e o Jacob n' a tra) (tando de usar S1 ou S2) x y z

Green: $\int_A \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy = \oint_C P \, dx + Q \, dy$ $f(x, y) = (\dots, \dots)$ se escolhermos f(x, y) tal q̄

$\oint = - \int_A$ (sentido retrógrado) $f(\alpha(\theta)) \cdot \alpha'(\theta) \, d\theta$ $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \implies \oint_C$ e o φ_c dão-nos a área da superfície (q̄ é plana)

Nota: é um caso particular de Stokes. (2D). se fizermos rot(f) em q̄ f

se $f(x, y) = (\dots, \dots)$ vai dar $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

Gauss: $\int \int \int_V \text{div}(f) \, dV = \sum_{i=1}^{NS} \oint_{S_i} f_i \cdot \underline{n}_i \, dS$ $\text{div}(f) = \nabla \cdot f = \frac{\partial(\dots)}{\partial x} + \frac{\partial(\dots)}{\partial y} + \frac{\partial(\dots)}{\partial z} = \text{escalar}$

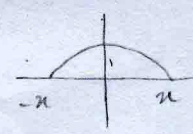
Nota: como o div. é feito w/ parâm. no integral (se parâm.) é necessário por o jacobiano.

de-mos o fluxo através do volume (fluxo total) p/ fora } o fluxo calculado aqui é para fora. Para dentro e se multiplicar por (-1)

Funções periódicas e extensão de funções a funções periódicas: **Fourier**

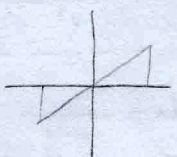
$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$

Função par



$f(x) = f(-x)$

Função ímpar



$f(x) = -f(-x)$

$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \, dx$ $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \, dx$ $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \, dx$

$\cos(m\pi) = (-1)^m$ se função par $\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2}$ se ímpar = (produto de ímpar x par = par)

Seja $f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z)$. Se as derivadas cruzadas de f forem iguais, i.e., $\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}$; $\frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x}$; $\frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}$

f é gradiente e $\int_C f \cdot dx = \int_A^B f \cdot dx$ não depende do caminho, i.e., $\int_A^B f \cdot dx = \varphi(B) - \varphi(A)$ em q̄ φ é uma função potencial de f.

$f_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $f_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$; $f_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \implies$ A função potencial φ(x, y, z) é obtida por primitivação

$\varphi(x, y, z) = \int f_x \, dx = (\dots) + k_1(x, y, z)$
 $\varphi(x, y, z) = \int f_y \, dy = (\dots) + k_2(x, z)$
 $\varphi(x, y, z) = \int f_z \, dz = (\dots) + k_3(x, y)$

$\cos m x \cdot \cos n x = \frac{1}{2} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$
 $\sin m x \cdot \cos n x = \frac{1}{2} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$
 $\sin m x \cdot \sin n x = \frac{1}{2} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$

se $\int_C (\dots) \, dx + (\dots) \, dy + (\dots) \, dz \implies f(x, y, z) = (\dots, \dots, \dots)$

* mas o 5 termo de m o sentido de maneira e seja p/ fora do volume

$S: x^2 + y^2 = 4 \rightarrow x(\theta, z)$

param: $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

vista de cima

$S: z + x^2 + y^2 = 4 \rightarrow x(\rho, \theta)$

param: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = 4 - \rho^2 \end{cases}$

vista de cima

$x^2 + (y-1)^2 = 1$

$z = 1 + y$

param: $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta + 1 \\ z = 1 + (\sin\theta + 1) \end{cases}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

param: $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$

$C: y = 1 - |1 - x|$ entre $A(0,0)$ e $B(3,-1)$

$(1-x) > 0 \Rightarrow y = 1 - (1-x) \Rightarrow y = x \rightarrow C_1$

$(1-x) < 0 \Rightarrow y = 1 - [-(1-x)] \Rightarrow y = 2 - x \rightarrow C_2$

$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y) \\ x+y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = z^2 \\ y = 2-x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x^2 + (2-x)^2 + z^2 = z^2 \dots \\ (x-1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1 \end{cases}$

$x = 1 + \cos\theta$
 $z = \sqrt{2}\sin\theta$

(via fórmula da elipse)

Fluxo pl fora do volume a sereno:

$\frac{dV}{d\rho} + \frac{dV}{d\theta} + \frac{dV}{dz} \times \frac{dV}{d\theta}$

$x^2 + y^2 + z - 2 = 0$

$z=0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$

$x^2 + y^2 - z - 2 = 0$

$z=0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$

$S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, 1^{\circ} \text{ octante}$

param.

Coord. cilínd.	Coord. esf.
$x = \rho\cos\theta$	$x = a\sin\varphi\cos\theta$
$y = \rho\sin\theta$	$y = a\sin\varphi\sin\theta$
$z = \sqrt{a^2 - \rho^2}$	$z = a\cos\varphi$
$\theta \in [0, 2\pi]$	$\theta \in [0, \pi/2]$
$\rho \in [0, a]$	$\varphi \in [0, \pi/2]$

$S: x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geq 0$

param.

Coord. cilínd.	Coord. cartesianas
$x = \rho\cos\theta$	$x = x$
$y = \rho\sin\theta$	$y = y$
$z = \rho^2$	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho^2)$
 $x(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$

$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$

esfera de centro (a, b, c)

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

$x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 0$

$x^2 + (y-2)^2 = 4$

$$\int \sin \theta \cos \theta d\theta \Rightarrow \int u du \Rightarrow \frac{u^2}{2} \Rightarrow \frac{\sin^2 \theta}{2}$$

$$u = \sin \theta$$

$$du = \cos \theta d\theta$$

$$\int \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \Rightarrow -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} \Rightarrow -\frac{\cos^3 \theta}{3}$$

$$u = \cos \theta$$

$$du = -\sin \theta d\theta$$

$$\int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \quad \int x^{-1/2} dx = 2 x^{1/2}$$

$$\int p(2-p^2)^{1/2} dp = -\frac{1}{2} \int -2p(2-p^2)^{1/2} = -\frac{1}{2} \int u^{1/2} du =$$

$$u = 2-p^2 \quad du = -2p$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{2 u^{3/2}}{3} = -\frac{u^{3/2}}{3} = -\frac{(2-p^2)^{3/2}}{3}$$

$$\int \frac{u'}{u} du = \ln(u)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\int \cos^3 \theta d\theta = \int \cos^2 \theta \cos \theta d\theta = \int (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta$$

$$= \int \cos \theta - \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \sin \theta - \int \sin^2 \theta \cos \theta d\theta$$

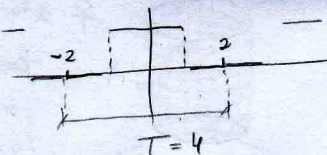
$$\int \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \Rightarrow \int u^2 du = \frac{u^3}{3} \Rightarrow \frac{\sin^3 \theta}{3}$$

$$\sin \theta = u$$

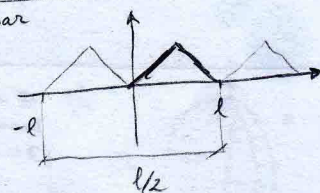
$$\cos \theta d\theta = du$$

Lombria: $\cos(\pi) = \cos(-\pi) = -1$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t < -1 \\ k, & -1 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$



$$f(t) = \begin{cases} \frac{2k}{l} t, & 0 < t < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l} (l-t), & \frac{l}{2} < t < l \end{cases}$$



Transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos wt\} = \frac{w}{s^2+w^2} \quad \mathcal{L}\{\sin wt\} = \frac{s}{s^2+w^2} \quad \mathcal{L}\{e^{wt}\} = \frac{1}{s-w}$$

————— " ————— " ————— " ————— " ————— " ————— " —————

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0) \quad \mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)$$

————— " ————— " ————— " ————— " ————— " ————— " —————

1º Teorema: translação em s

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

————— " ————— " ————— " ————— " ————— " ————— " —————

2º Teorema: translação em t

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s+7}{(s+3)^4} \right\} = \frac{2s+7}{(s+3)^4} = \frac{2s+6+1}{(s+3)^4} = \frac{2(s+3)}{(s+3)^4} + \frac{1}{(s+3)^4} \dots$$

$$\mathcal{L} \{ t u(t-1) \} = \mathcal{L} \{ (t-1) u(t-1) + u(t-1) \} = \mathcal{L} \{ (t-1) u(t-1) \} + \mathcal{L} \{ u(t-1) \}$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & , 0 < t < 1 \\ 2\cos(\pi t) & , 1 < t < 2 \\ 0 & , t > 2 \end{cases} \quad g(t) = 2\cos(\pi t) [u(t-1) - u(t-2)]$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , 0 < t < 4 \\ t-4 & , 4 < t < 7 \\ 3 & , t > 7 \end{cases} \quad g(t) = 3u(t-7) + (t-4)[u(t-4) - u(t-7)]$$

$$\mathcal{L} \{ (t-4) u(t-7) \} = \mathcal{L} \{ (t-7+3) u(t-7) \} = \mathcal{L} \{ [(t-7)+3] u(t-7) \} = \dots$$

$$\int \frac{1}{z} dz = \int \frac{2n-1}{n} dn = \int \frac{1-\cos^2 n}{\cos n} dn = \int \frac{1}{\cos n} - \cos n dn = \int \sec n dn - \int \cos n dn$$

$$\int \frac{1}{z} dz = \int \frac{2n-1}{n} dn$$

$$\int \frac{1}{z} dz = \int \frac{2n}{n} dn - \int \frac{1}{n} dn$$

$$\ln z = 2n - \ln n$$

$$\ln z = 2n + \ln n^{-1}$$

$$z = e^{2n + \ln n^{-1}}$$

$$z = e^{2n} \cdot e^{\ln n^{-1}}$$

$$z = \frac{e^{2n}}{n}$$

$$\int e^{-y} \cdot e^{-\cos y} \cos y - e^{\cos y} n^2 \sin y dy$$

$$\int e^{-y} \cdot e^{-\cos y} \cos y - n^2 \int e^{\cos y} \sin y dy \quad \begin{matrix} u = \cos y \\ du = -\sin y dy \end{matrix}$$

$$\int e^y + n^2 \int e^u du$$

$$-e^{-y} + n^2 \cdot e^u = e^y + n^2 e^{\cos y}$$

$$\int \ln(n-1) \cdot (n-1) dn \Rightarrow \int \ln u \cdot u du \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} u = n-1 \\ du = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} f \rightarrow \ln u & f' \rightarrow \frac{1}{u} \\ g' \rightarrow u & g \rightarrow \frac{u^2}{2} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{2} \ln u - \int \frac{u^2}{2u} du = \frac{u^2}{2} \ln u - \frac{1}{2} \int u du =$$

$$= \frac{u^2}{2} \ln u - \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} \Rightarrow \frac{(n-1)^2}{2} \ln(n-1) - \frac{1}{4} (n-1)^2 //$$

$$\int \frac{x}{x-1} dx = \int \frac{u'}{u} du = \ln|u|$$

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}$$

$$\int dx + \int \frac{1}{x-1} = x + \ln|x-1|$$

$$\int 4xe^{x^2} dx = 2 \int 2xe^{x^2} dx = 2e^{x^2}$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx \quad u=1-x^2$$

$$du = -2x dx$$

$$\int \frac{-2x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx = - \int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = 2 \int -\frac{1}{2} u^{-3/2} du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{u}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{u+2y}{(u+y)^2} du = \int \frac{u+y}{(u+y)^2} du + \int \frac{y}{(u+y)^2} du =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2(u+y)}{(u+y)^2} du + y \int \frac{1}{(u+y)^2} du =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|(u+y)^2| + \frac{y}{u+y}$$

$$\frac{1}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$1 = Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx$$

$$\begin{cases} \text{coef. } x^2 & 0 = A + B \\ \text{coef. } x & 0 = C \\ \text{coef. } dx & 1 = 2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1/2 \\ C = 0 \\ A = 1/2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x(x^2+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2} \right)$$

$$\frac{4}{(x-1)(x^2+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$\frac{Ax+B}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + Dx^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^2(x^2+1)}$$

determinar A, B, C e D e substituir