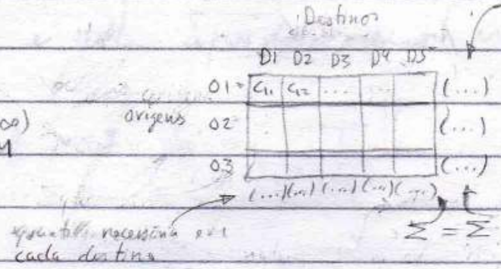
Dica: desenhar os custos mesmo nos cantos dos □

ALGORITMO DE TRANSPORTES

1 - quadro transportes



quantid. disponível em cada origem

c_{do} → custo de transporte do destino d p/ origem o

senão → adicionar procura (linha) ou oferta (coluna) c/ o valor q̃ falta p/ dar =, (com custos = 0)

se solução indesejada / impossível - custo M (∞)

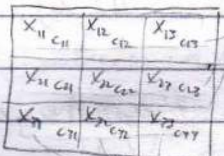
sem excedente → 0

mas se o problema for de maximização isso tinha o efeito inverso...

2 - obter solução inicial

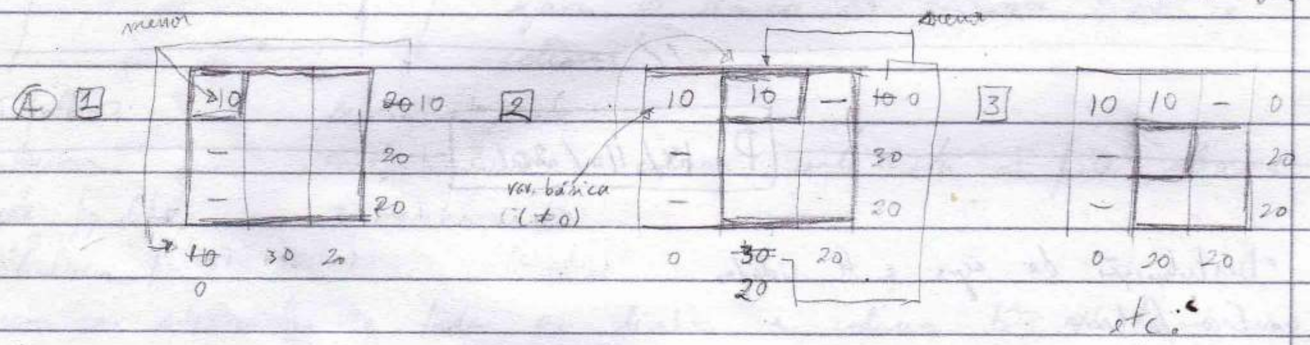
→ canto NW (A)

→ custos mínimos (B)



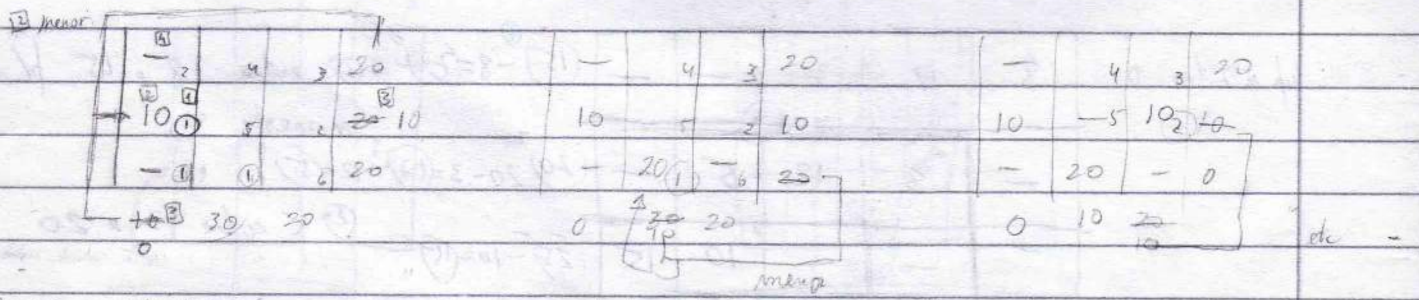
custos unitários de transporte c_{ij}

var. decisão: qtdd a enviar da origem i p/ destino j



(B) lógica = ao NW mas o ponto de começo é sempre o custo menor das var. ñ básicas

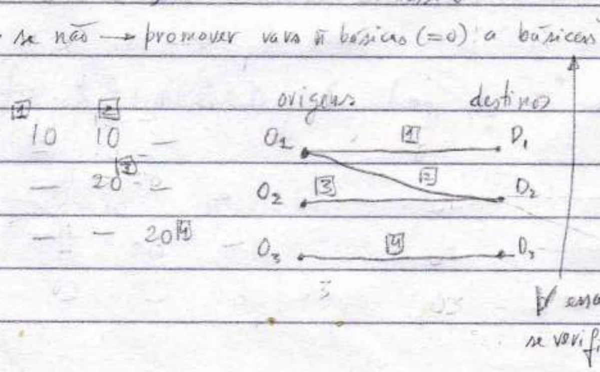
[1] escolher o < c_{ij} → se houver < c_{ij} =/s, escolher 1 deles ao calhas. ex c_{21}. [2] à var correspondente X_{21} dar o > valor de acordo c/ qtdd disponível na origem e necessária no destino. (10)



[3] corrigir as qtdds disponíveis e necessárias. [4] se a necessid. estiver satisfeita, trancar o resto da coluna.

3 - ver se solução encontrada é básica i.e nº origens + nº destinos - 1 = nº var. básicas

→ se não → promover vars ñ básicas (=0) a básicas: fazer uma árvore q̃ representa as ligações existentes



Fazer ligações de maneira q̃ qq nó seja acessível a partir do outro. ⇒ neste caso qq ligação serve menos $O_2 \to D_1$

também ñ pode ser cíclica

P. ex. O1 — D3 → x_{13} ⟹ básica $= 0$

10	10	0
—	20	—
—	—	20

$\boxed{\text{Só daqui é q se pode tirar a solução inicial}}$

isto no fundo é calcular os custos se fosse esta a solução adotada

4 – calcular custos de envio (u_i) e receção (v_j) ⟹ $c_{ij} = u_i + v_j$ só para as variáveis básicas!

	v_1	v_2	v_3
u_1	10_{2}	10_{4}	0_{3}
u_2	$—_{1}$	20_{5}	$—_{2}$
u_3	$—_{1}$	$—_{1}$	20_{6}

$2 = u_1 + v_1$
$4 = u_1 + v_2$
$3 = v_1 + v_3$
$5 = u_2 + v_2$
$6 = u_3 + v_3$

escrever as eq. ajuda

5 eq = nº var básicas
6 inc

⟹ $\boxed{1}$ arbitrar u_1 ou $v_j = 0$ e resolvê-las

$\boxed{2}$ para as n-básicas fazer as diferenças

$c_{ij} - (u_{ij} + v_{ij}) = \Delta_{ij}$ $\quad \Delta_{ij} \; \overline{c_{ij}}$

$\boxed{1}$ $v_1 = 0$ → $4 = 2 + v_2$ → $3 = 2 + v_3$

		0	2	1
$2 = u_1 + 0$ →	2	b_2	b_4	b_3
$5 = u_2 + 2$ →	3	—	b_5	—
$6 = u_3 + 1$ →	5	—	—	b_6

$\boxed{2}$

		0	2	1
	2			
$1-(3+0)$	3	$\overline{-2}$ 1		$\overline{-2}$ 2
$1-(5+0)$	5	$\overline{-4}$ 1	$\overline{-6}$ 1	

$2-(1+3)$

$1-(2+5)$

Δ_{ij}

A sol. é ótima quando prob. de

minimização	maximização
$\Delta_{ij} \geq 0$	$\Delta_{ij} \leq 0$

5 – sol. n ótima? mandar p/ base a variável n básica q tenha

minimização	maximização
$\Delta_{ij} \leq 0$	$\Delta_{ij} \geq 0$

↓

adicionar ou subtrair θ nas ⟸ passa a valer θ
variáveis q for preciso p/
- os balanços darem 0
- nenhuma var. dê negativo ⟹ (n fazer — $-\theta$ só — $+\theta$)

destinos

origens

10	$10-\theta$	$0+\theta$
—	20	—
—	$\boxed{+\theta}$	$20-\theta$

balanço = 0 ✓

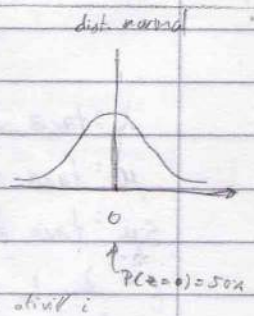
balanço = 0 ✓

var. q entrou p/ base e causou desequilíbrio desvio padrão = $\sqrt{\text{variância}}$

Cuidado: se forem dados os desvios padrões, o desvio padrão a entrar nas fórmulas ñ é a soma mas sim $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots^2}$

PLANEAMENTO E CONTROLO DE PROJETOS

Métodos de análise:
- CPM: considera q as durações das ativid. são fixas
- PERT: considera a incerteza associada à duração das ativids.
  - D_{ot}: estimativa otimista. Vai correr tudo bem e a ativid vai acabar o + cedo possível.
  - D_{mp}: estimativa + provável da duração da ativid. Se tudo correr normalmente.
  - D_{pe}: estimativa pessimista. Vai tudo correr anormalmente mal e a ativid vai acabar + tarde possível



D_T: duração total do projeto

datas + cedo em q é possível começar / acabar a ativid

ES	Nome	EF
F_L	d	F_T
LS		LF

F_T → LF − EF

F_L → min(ES seguintes) − EF

datas + tarde em q é possível começar/acabar a tarefa s/ atrasar o último

máx. atraso a EF de maneira q as seguintes começam em ES.

duração média da ativid i:

$$\mu_i = \frac{D_{ot} + 4D_{mp} + D_{pe}}{6}$$

$$\sigma_i^2 = \frac{(D_{pe} - D_{ot})^2}{36}$$

Método PERT

$$\mu_T = \mu_1 + \mu_2 + \dots$$

$$\sigma_T^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots$$

ativids pertencentes ao caminho crítico

duração média do projeto

variância da duração do projeto

duração total = duração do caminho crítico

$$\text{Prob}\left(D_T \gtrless x\right)$$

$$\text{Prob}\left(\underbrace{\frac{D_T - \mu_T}{\sigma}}_{Z} \gtrless \frac{x - \mu_T}{\sigma}\right)$$

$$\text{Prob}\left(Z \gtrless \underbrace{\frac{x - \mu_T}{\sigma}}_{\text{tirar valor}}\right)$$

tirar valor dependendo da distribuição ir à tabela correspondente

Nota: se disser "atrasar 2 semanas" $x = \mu_T + 2$

Nota: p/ saber a $P(D_T < a)$ em q a é < q o C.C.[1], < q outro caminho não crítico[2] prob será $P\left(Z < \frac{a-\mu_1}{\sigma_1} \cdot \frac{a-\mu_2}{\sigma_2}\right)$

- atrasar-se 3 ou + dias $P\left(Z \geq \frac{\mu + 3 - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)$ ou $P\left(Z \geq \frac{x - \bar{D}}{\sqrt{\sigma^2}}\right)$ c/ $x = \bar{D} + 3$

- ñ estar concluído ao fim de 50 semanas $P\left(Z > \frac{51 - \mu}{\sigma}\right)$

C_{ae}: consequência de tomar uma ação a c/ um E.N. e

TEORIA DA DECISÃO

Matriz de decisão — à qual se aplicam

estados da natureza (EN)

(A) ações	(…)	(…)	(…)
(…)	·	·	·
(…)	·	·	·
(…)	·	·	·

(C) consequências em termos numéricos

Critérios de decisão ∄ probabilísticos (todos os E.N. têm = probabilidade)

$\alpha = 1$ — Otimista: melhor c de todas

Hurwicz: $\alpha \max C_{ae} + (1-\alpha) \min C_{ac}$ $\forall_a$ (1)

$\alpha = 0$ — Pessimista: piores c p/ cada A → escolher a melhor

Laplace: somas das c p/ cada A → escolher a melhor

Savage: matriz pesares → maior pesar p/ cada A → escolher a A c/ < pesar desses

matriz decisão:

$(\ldots) - \max C_{a1}$ $(\ldots) - \max C_{a2}$ …
$(\ldots) - \max C_{a1}$
$(\ldots) - \max C_{a1}$

* p/ cada E.N. ver a melhor consequência ($\max C_{ae}$)
* subtrair a todos os elementos dessa coluna esse valor e por resultado em valor absoluto

escolher o melhor

a \ e	EN1	EN2	EN3			
A_1	·	·	·	$\max C_{1e}$	$\min C_{1e}$	(1)
A_2	·	·	·	$\max C_{2e}$	$\min C_{2e}$	(1)
A_3	·	·	·	$\max C_{3e}$	$\min C_{3e}$	(1)

Critérios de decisão probabilísticos — cada E.N. tem 1 probabilidade de ocorrer

Maximização do valor esperado (MVE):

matriz de decisão

A	EN1(p_1)	EN2(p_2)	EN3(p_3)	valor esperado p/ cada ação
A_1	$(\ldots) p_1$	$(\ldots)\cdot p_2$	$(\ldots)\cdot p_3$	(…)
A_2	$(\ldots) p_1$	$(\ldots)\cdot p_2$	$(\ldots)\cdot p_3$	(…)
A_3	$(\ldots) p_1$	$(\ldots) p_2$	$(\ldots) p_3$	(…)

→ escolher o melhor

(máximo dos VE da matriz de decisão)

Minimização da perda de oportunidade esperada (MPOE)

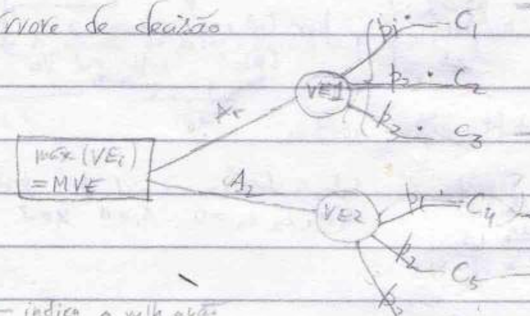
matriz dos pesares

				POE p/ cada ação
A_1	$(\ldots)\cdot p_1$	$(\ldots)\cdot p_2$	$(\ldots)\cdot p_3$	(…)
A_2	$(\ldots)\cdot p_1$	$(\ldots)\cdot p_2$	$(\ldots)\cdot p_3$	(…)
A_3	$(\ldots)\cdot p_1$	$(\ldots) p_2$	$(\ldots)\cdot p_3$	(…)

→ escolher o menor

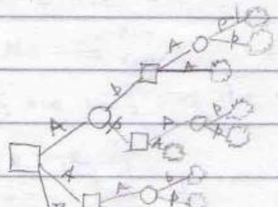
Nota:
- se o problema for de maximização (p. ex. lucro) melhor = maior
- se o " " " minimização (p. ex. custo) melhor = menor
- se uma ação depender de outra ex. — as ações A1 e A2 dependem de A. Na matriz de decisão só entram A1, A2, A3

Árvore de decisão



$\max(C_1 p_1 \text{ e } C_4 p_1)$
$+$
$\max(C_2 p_2 \text{ e } C_5 p_2)$
$+$
$\max(C_3 p_3 \text{ e } C_6 p_3)$
} MVE_{ip}

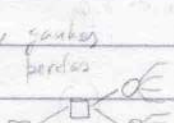
diz-nos qual o melhor valor esperado se pudéssemos saber o q vai acontecer



[ ] ← indica a melh ação
○ ← " VE

máx VE p/ ganhos
min VE p/ perdas

é nestes valores já entram os custos q estão nos ramos p/ trás (q foram dar às C)



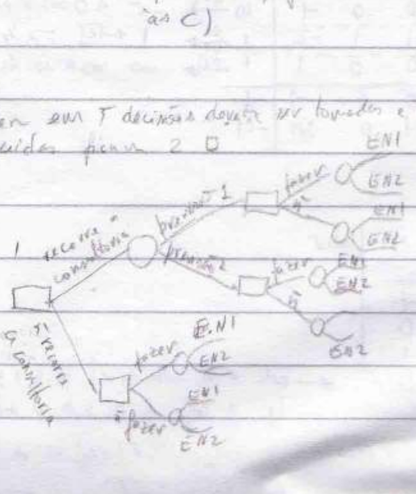
aqui entra a melh das duas

$\boxed{VEIP = MVE_{ip} - MVE}$

VE se tomássemos a melh decisão p/ cada estado da natureza
→ um ramo q se mantenha = c/ os E.N. tb entra no cálculo.
↳ ver exercício Polido Grupo
, se podermos pagar p/ saber o q vai acontecer, o valor máximo a pagar é o VEIP

Escrever a árvore da esquerda p/ a ordem em q decisões devem ser tomadas e E.N. acontecem
a tivermos q ser tomadas 2 decisões seguidas ficam 2 □ como na fig acima.

Há outras árvores do tipo:



Max: Maximizar
F.O.: função objetivo

Nota: se no final uma variável não-básica ← estiver aqui
tiver coeficiente nulo, ela podia entrar p/ base na linha da F.O.
↳ mas não alterar o valor da F.O. ⟹ soluções alternativas (q tb são ótimas)

SIMPLEX: algoritmo q ajuda na determinação da solução ótima de 1 problema de programação linear.

Ex1: F.O.: $Máx\ Z = 45x_1 + 80x_2$

Restrições:
$5x_1 + 20x_2 \leq 400 \Rightarrow 5x_1 + 20x_2 + s_1 = 400$
$10x_1 + 15x_2 \leq 450 \Rightarrow 10x_1 + 15x_2 + s_2 = 450$ ⟹ forma tabular

	Base	x_1	x_2	s_1	s_2	valor	
L_p	s_1	5	$\boxed{20}$	1	0	400	$\div 20 = 20$
L_2	s_2	10	15	0	1	450	$\div 15 = 30$
L_3	$-Z$	45	80	0	0	0	

[2] menor rácio dos el. da coluna pivot ≥ 0 finitos. Se for ≤ 0 ou ∞ ñ sai da base
linha pivot — s_1 sai da base

[1] maior Z ⟹ coluna pivot — elemento pivot
p/ estamos a máx ↳ x_2 entra na base

[3] no novo quadro, manipular a antiga linha pivot de maneira q el. pivot = 1

[4] manipular as restantes linhas, em conjunto c/ a nova ou a antiga pivot p/ dar 0 nos restantes da coluna pivot

$L_{i(nova)} = L_i + K L_{pivot\ (nova\ ou\ antiga)}$

	Base	x_1	x_2	s_1	s_2	valor	rácio
$L_p/20 \rightarrow$	x_2	5/20	1	1/20	0	400/20	$\div 5/20 = 80$
$\times -15 + L_2 \rightarrow$	s_2	$\boxed{6{,}25}$	0	-0,75	1	150	$\div 6{,}25 = 24$ [2]
$\times -80 + L_3 \rightarrow$	$-Z$	25	0	-4	0	0	

s_2 vai sair da base

[1] ⟹ x_1 vai entrar na base

etc

[5] sol. é ótima qdo todos os coef. de $Z \leq, \geq 0$ p/ max, min respetiva/

[6] p/ retirar a solução da tabela

	x_1	x_2	s_1	s_2	valor
x_1	1	(...)	(...)	(...)	10
s_1	(...)	(...)	1	(...)	20
$-Z$					-100

só p/ as q estão na base

$(x_1, x_2, s_1, s_2) = (10, 0, 20, 0)$
$Z = 100$

Ex2: F.O. $min\ Z = -3x_1 + x_2 + x_3 =$

Restrições:
[1] $x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11 \Rightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 11 \Rightarrow (\dots)$
[2] $-4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \Rightarrow -4x_1 + x_2 + 2x_3 - s_2 = 3 \Rightarrow (\dots) + y_1$
[3] $-2x_1 + x_3 = 1 \Rightarrow$ (igual) $-2x_1 + x_3 = 1 \Rightarrow (\dots) + y_2$
⟹ penalizar a F.O. p/ causa destas var. artificiais (método das penalidades)

$máx\ Z = (\dots) - My_1 - My_2$
$min\ Z = (\dots) + My_1 + My_2$

A cada restrição deve estar associada 1 var. básica (coef. 1 nessa restrição e 0 nas outras) se isso ñ acontecer (=1) (≠0 nas outras) (ñ existir) adicionar var. artificial nessa restrição y_i ⟹ problema artificial → resolve-se método das penalidades

feita a substituição fica na forma por [2] em ordem a y_1, [3] " " " y_2 — substituir ali

$\begin{matrix} min \\ max \end{matrix}\ Z = aM + (b + cM)x_1 + (d + eM)x_2 + $

para este caso ficou $min\ Z = 4M + (3 + 6M)x_1 + (1 - M)x_2 + (1 - 3M)x_3 + Ms_2$

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	y_1	y_2	valor	rácio
L_1	s_1	1	-2	1	1	0	0	0	11	$\div 1 = 11$
L_2	y_1	-4	1	2	0	-1	1	0	3	$\div 2 = 1{,}5$
L_p	y_2	-2	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	1	$\div 1 = 1$ [2]
L_4	$-Z$	3	1	1	0	0	0	0	0	
		6M	-M	-3M	0	M	0	0	-4M	

grelha? [1]

Solução básica inicial p/ o problema artificial
$(x_1, x_2, x_3, s_2 = 0 \quad s_1 = 11 \quad y_1 = 3 \quad y_2 = 1$

nota! simétrico do coef. independente da F.O.

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	y_1	y_2	valor	rácio
$L_1 + (-L_p)$	s_1	3	-2	0	1	0	0	-1	10	$\div -2 = -5 < 0$ ⟹ ñ sai da base
$L_2 + (-2L_p)$	y_1	0	$\boxed{1}$	0	0	-1	1	-2	1	$\div 1 = 1$ ← [2] ⟹ y_1 sai da base
$L_p/1$	x_3	-2	0	1	0	0	0	1	1	$\div 0 = \infty$ ⟹ ñ sai da base
$L_4 + L_p(-1+3M)$	$-Z$	1	1	0	0	0	0	-1	-1	
		0	-M	0	0	M	0	3M	-M	

[1]

⟹ qdo todas as var. artificiais saírem da base as suas colunas podem ser removidas

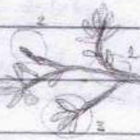
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	valor
$L_1 + 2L_p$	s_1	0	0	0	0	-2	
	x_2	0	1	0	0	-1	
	x_3	-2	0	1	0	0	
$L_4 + L_p(1+M)$	$-Z$	1	0	0	0	-1	
		0	0	0	0	-0	

← esta é sol. admissível pq y_1 e y_2 já ñ estão na base mas ñ é ótima pq o coef. de $x_1 < 0$ e estamos a min F.O.

Se no quadro final (todos os coef. de $Z \geq, \leq 0$ min max)
[alguma var. artificial ≠ 0 o problema é impossível (a região de sol. admi. é conjunto vazio)
[alguma var. ñ básica tiver F.O. = 0 pode haver outra solução ótima

PROGRAMAÇÃO INTEIRA: quando as variáveis de decisão de 1 problema de programação linear são nºs inteiros, há métodos específicos p/ encontrar a sol. ótima da F.O.

Métodos: Branch-and-Bound: baseia-se na ideia de desenvolver uma enumeração inteligente das soluções candidatas a sol. ótima inteira de 1 problema. → forma gráfica → árvore de pesquisa ← introdução de limites tornam a pesquisa + eficiente
→ " analítica



Nós explorados:
1 – tem ramos
2 – é sol. inteira
3 – ñ tem solução

Nós q precisam ser explorados:
1 – $Li <$ nó
2 – sol. ñ inteira > máx sol. inteira

nós a ñ explorar:
1 – se existir sol. inteira c/ >/< valor

- Enquanto houver nós por explorar cuja solução seja $\underset{<}{\overset{\text{máx}}{>}}$ q a $\underset{\text{min}}{\overset{>}{<}}$ inteira já encontrada não se sabe qual é a solução ótima.
- Num problema de maximização quanto + restrições, ↓ valor F.O.
- sol. inteira ñ é z = inteiro e sim x e y = inteiros.
- se se parar o algoritmo antes de encontrar a sol. ótima erro $= LS - Li$ ← deve ser um nº inteiro arredondado p/ baixo

Estratégias de ramificação
- profundidade
- em largura
- pelo nó + promissor (o q tem melhor valor da F.O.) → para a maximização melhor = maior; minimização melhor = menor

Maximização

200 ← sol. ótima ñ inteira

160 — 170,3 — 180,2

150 — Li (no pior dos hipóteses fica-se c/ esta solução)

LS

Minimização

140

120 — 105,3

LS

100 — Li

Na maximização começamos c/ um valor e vai diminuindo pq este é o valor ótimo s/ a restrição de as var. de decisão terem q ser inteiras. Tendo q ser inteiras, esse valor vai piorar. Mesma lógica p/ minimização.

- No B&B a partir do momento em q se escolhe 1 restrição das p/ baixo nesse ramo, todas as soluções a cumprem.

Se for p/ construir árvore a partir da tabela, e houver 2 nós q satisfaçam as condições, escolhe-se o menor (minimização) ou maior na maximização

Tipo minimiz.

$y \le 5$

$x \le 4$ $x \ge 5$

A

	A	B
4	3	2
6	5	4
Z	1	2

Para escolher os intervalos ao fazer o branch and bound

≤ 3 ≥ 4 ≤ 10 ≥ 11

3,1 10,8

[2.1] se existirem valores negativos, somar a todos o + negativo.

AFETAÇÃO: qdo queremos atribuir a pessoas (máquinas) tarefas, zonas a patrulhas; candidatos a lugares, a aviões lugares p/ ir...

[1] pôr o problema na forma de tabela

	T1	T2	T3
P1	(...)	(...)	(...)
P2	(...)	(...)	(...)

Os problemas devem ser sempre de minimização para se poder resolver deste modo

[2] se problema for de maximização deve ser tornado de minimização aplicando o complemento do > valor à matriz (subtrair a todos os elementos o maior, tudo em valor absoluto)

[3] Tornar a matriz quadrada, adicionando algo fictício.

	T1	T2	T3
P1			
P2			
F	0	0	0

os custos são 0 a menos q n se queira q ela fique especificamente c/ alguma coisa → custo M (∞)

Neste caso cada pessoa fica c/ 1 tarefa, e 1 delas fica sem nada

se quisermos a possibilid. de 1 pessoa ficar c/ as 3 tarefas, a outra pode ficar sem fazer nada

	T1	T2	T3	Nada1	Nada2	Nada3
P1				0	0	0
P1				0	0	0
P1				0	0	0
P2				0	0	0
P2				0	0	0
P2				0	0	0

2 pessoas — 4 tarefas

	T1	T2	T3	T4
P1				
P1				
P2				
P2				

4 pessoas — 2 tarefas

	T1	T2	F1	F2
P1	(...)	(...)	M	M
P2	(...)	(...)	0	0
P3	(...)	(...)	0	0
P4	(...)	(...)	0	0

n quero q a pessoa 1 fique sem fazer nada ⇒ custo muito ↑

Fi ← tarefa fictícia

Se não quisermos q 1 pessoa fique c/ 1 tarefa é como ter custo ↑ ⇒ M no local

[4] para todas as linhas subtrair a cada 1 o seu menor valor

[5] fazer o mesmo p/ colunas

[6] riscar todos os zeros: riscar o < nº de linhas e/ou colunas de maneira q se tenha o < nº de riscos, começando p/ riscar as q têm + zeros.

[7] se nº de riscos = dimensão da matriz ⇒ sol. ótima (1) ir para o [9]

└ senão → selecionar o < elemento ñ cortado (A) ⇒ aos elementos ñ cortados subtrair A

⇒ aos elementos cortados 2x somar A

[8] repetir 6 → 7 até (1) se verificar. [9] Quando isso acontecer, selecionar nº de zeros = dim. da matriz, q sejam únicos na respetiva linha e coluna.

Dica: começar pelos q estão sozinhos.

0	1	2
3	A	3
4	5	Y

0+A	1	2
3	0	3-A
0	5-A	8-A

[10] os zeros escolhidos correspondem à tarefa q cada pessoa ficou incumbida. O custo total é somar os valores na tabela original correspondente aos zeros selecionados. (ou o q for)

→ há soluções ótimas alternativas quando, depois de se obter os zeros finais é possível outra seleção de zeros.

equipas \ locais	StA	B	B	B	W	W
L						
S						
M						
C						
EF1	0	M	M	M	0	0
EF2	0	0	0	0	0	0

← local B pode receber 3 equipas

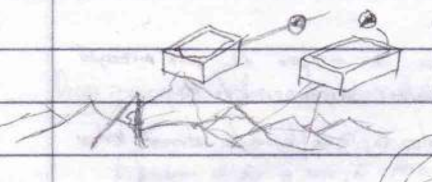
← local W pode receber 2 equipas

obriga o local B a receber pelo menos 2

equipa fictícia p/ tornar matriz □

1

FLUXO MÁXIMO: Um problema de fluxo máximo é qdo uma rede de transporte, sejam ruas, condutas, rotas marítimas, estradas, têm um limite de fluxo de algo q o pode atravessar. P. ex tenho tanques p/ abastecer água



a partir dos quais há canos c/ V máx de água q o pode atravessar.
Cuidado pq às vezes são os nós q limitam o fluxo e não os "canos" em si. se tivéssemos bombas atrás de cada tanque, o limite era o q cada tanque conseguia enviar.

representar ramos saturados e zero

| solução ótima: | qdo se conseguir fazer um corte q separe a entrada e a saída q se atravessa

ramos e → s saturado
e: entrada
s: saída
e ↛ s c/ fluxo nulo

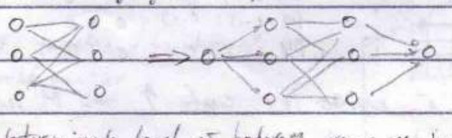
A esse corte se chama corte mínimo.

re-arranjar fluxos ← se não der p/ fazer corte mínimo

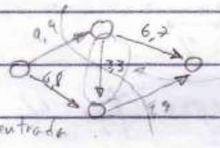
se se dever ter + do q 1 nó de origem e destino

Caso particulares:

1- pode ter q se criar nó agregador (artificial)

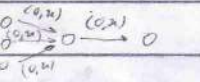


2- cuid c/ o corte mínimo



n é corte mínimo!

3- se a um determinado local só poderem chegar x pessoas



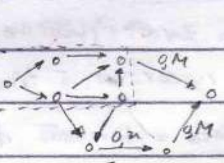
4- pode-se considerar capacid infinita (M) se n quisermos limitar um certo fluxo.

5-

⇒ no seu conjunto, A e B só podem receber 300

6- tendo

⇒ novo fluxo vindo dos nós A e B para um novo nó e limitado a x e quer-se saber o fluxo máx p/ cada 1 dos locais

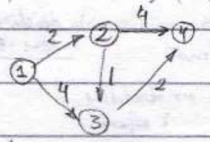


limitador do fluxo

7- se quisermos q o fluxo vá obrigatoriamente por 1 local altera-se o grafo mantendo apenas os percursos q cumprem essa condição.

CAMINHO MÍNIMO: qdo se pretende determinar o menor caminho entre 2 pontos. o tamanho pode ser em distância, em custos, ... No final obtém-se o caminho mínimo (c/ < custo) entre a origem e tds os nós.

Algoritmo do Dijkstra permite determinar esse caminho: ex:



caminho mínimo entre 1 e 4?

nó / iteração	1	2	3	4
	0^*	∞	∞	∞

pôr o nó de entrada c/ 0^* (definitiva) / permanente

$\Rightarrow$

1	2	3	4
0^*	∞	∞	∞
0^*	2	4	∞

para esse nó ver o menor caminho q sai dele e pô-lo como permanente. É o q vai dar ao nó 2

$\Rightarrow$

1	2	3	4
0^*	∞	∞	∞
0^*	2^*	4	∞

$\Rightarrow$

1	2	3	4
0^*	∞	∞	∞
0^*	2^*	4	∞
0^*	2^*	3	4

$\Rightarrow$ A partir do nó 2 ver o menor caminho p/ os nós q o rodeiam n esquecendo de somar as distâncias ($2+1=3$; $2+4=6$). O menor caminho q há é o 3 e vai dar ao nó 3. Vamos então observar o nó 3 (e o caminho 2+1 fica permanente).

$\Rightarrow$

1	2	3	4
0^*	∞	∞	∞
0^*	2^*	4	∞
0^*	2^*	3^*	6

$\Rightarrow$

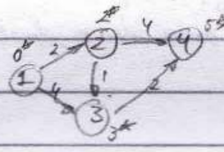
1	2	3	4
0^*	∞	∞	∞
0^*	2^*	4	∞
0^*	2^*	3^*	5

Observando o nó 3. Sai um caminho p/ 4 c/ valor 2. Soma-se aos 3 de distância permanente e dá 5. $5<6$ portanto o 5 toma precedência

$\Rightarrow$

0^*	∞	∞	∞
0^*	2^*	4	
0^*	2^*	3^*	5^*

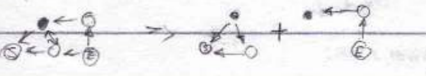
como n há mais nenhum menor q 5 (n há + nenhum lugar) o 5 fica definitivo.



Por inspeção ao esquema se vê o caminho mínimo q é então 1 → 3 → 4

- se houver alguma restrição do tipo ser obrigatório passar ou n p/ um certo sítio, podem-se remover os caminhos/nós q n cumpram esta condição.
- por outro lado, p. ex., p/ forçar passar obrigatoriamente num sítio pode-se dividir o grafo em 2 ex: caminho mínimo entre E e S sendo obrigatório passar em •

Entrada
Saída



o ponto é o destino e a origem.

- se n houver nenhuma condição específica remover os becos sem saída simplifica o grafo

FILAS DE ESPERA:

podem ser classificadas

exponencial negativa — M/M — dist. Poisson

G G X K — máx nº de clientes a ser atendidos + à espera

D D — ?? distribuição determinístico

∞ [ ] → modelo base s/ restrição adicional

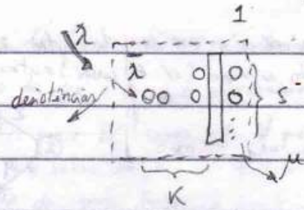
N → população finita

↳ restrições adicionais

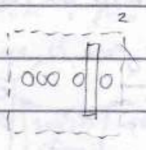
nº de servidores em paralelo

distribuição p/ o tempo de serviço

distribuição de Δt entre chegadas



Se todos os $\bar{\lambda}$ entram no sistema 1 vão p/ o sistema 2, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$



Distribuição de Poisson:

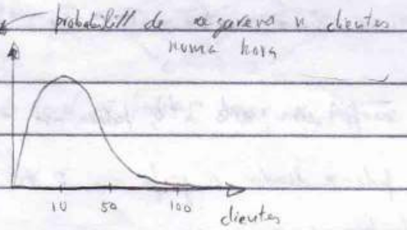
$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

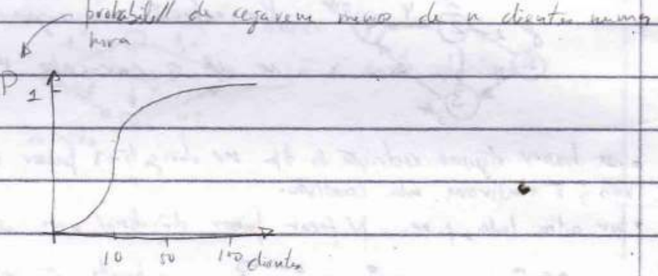
λ → nº de ocorrências média por unid. de tempo

$P(x)$ → probabilid. de ocorrerem x ocorrências neste intervalo de tempo

exemplo de uso:
- nº de chamadas à polícia / hora
- nº de clientes a chegar à bomba gasolina / hora
- nº de acidentes rodoviários / semana
- nº de novos casos diários de cancro da mama

$\lambda = 10$ c/hora

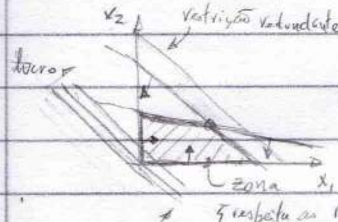




Casos em q. n. se verifica: se em x de a taxa de chegada for cte houver picos ou vazios, ex:
- no instante inicial em q. se abrem as portas de 1 loja e já há pessoas à espera

Programação Linear

Tendo obtido o modelo matemático de um problema real c/ { as var. decisão, restrições, F.O. } representá-lo gráfica/ e obter a solução ótima só aprendemos a fazer p/ 2 var. decisão. c/ + var. já ñ dava p/ reduzir num gráfico 2D ↓

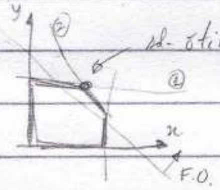


F.O. maximizar lucro ⟹ encontrar paralela à reta + afastada da origem de maneira q intersete 1 ou 2 restrições ativas. A intersecção é a sol. ótima.

zona q respeita as restrições (admissível)

→ as restrições responsáveis pela delimitação da zona admissível são ativas, as outras são redundantes.

cada linha tem 1 lucro cte. A linha + afastada da origem é q tem lucro >.



sol. ótima → para achar o valor analítica/ resolver sistema de eq. das 2 restrições q se intersetam.

A sol. ótima continua a ser essa enquanto o declive da F.O. se situar entre os declives das retas ① e ②

$$F.O. = (\ldots)x \pm (\ldots)y$$

para F.O. = 0, reta passa na origem

Exame 2014 Jan

e inteiras

$x_{p,m,i} \geq 0 \quad \forall p,m,i$ (quantidades não podem tomar valores negativos / e não existem embalagens fracionárias ou π embalagens...)

1 esparguete
2 cotovelinho
3 estrelinha

1 Nacional
2 Milaneza
3 M.P.

Decisão: $\boxed{x_{p,m,i}}$: nº de embalagens do produto p, marca m, prateleira i

Restrições:

var. auxiliar $\boxed{\delta_{p,m,i}}$: $\begin{cases}1\end{cases}$ se produto p, marca m é exposto na prateleira i

① $\boxed{\sum_i \sum_p \delta_{p,m,i} \geq 2}$ ← serem colocados 2 artigos de cada marca

② $\boxed{\sum_i \sum_m x_{1,m,i} \geq 1}$ ou $\boxed{\sum_i \sum_m \delta_{1,m,i} \geq 1}$ ← ser colocado esparguete

③ $\boxed{\sum_i \delta_{2,2,i} + \sum_i \delta_{3,2,i} \geq 1}$ ← ser colocado estrelinha ou cotovelinho da Milaneza

se tivesse =1, se 1 fosse colocado, o outro não podia ser (disjunção exclusiva)

④ $\boxed{\sum_i \delta_{2,1,i} \leq \sum_i \delta_{3,1,i}}$ ← se se expuser cotovelinho da Nacional, a estrelinha da Milaneza tb tem de ser exposta

⑤ $\boxed{\sum_p \sum_m f_{i,m} \cdot x_{p,m,i} \leq 133 \quad \forall i=1\ldots4}$ ← todos os produtos colocados em cada prateleira têm de ocupar menos de 133 cm

⑥ $\boxed{\sum_i \delta_{p,m,i} \leq 1 \quad \forall p=1\ldots3 \quad \forall m=1\ldots3}$ ← cada artigo só pode estar numa prateleira

é ≤ 1 e não =1 porque pode não se expor o artigo e ar δ = 0

⑥ $\boxed{x_{p,m,i} \geq 3\delta_{p,m,i} \quad \forall p \ \forall i \text{ ou } \textstyle\sum_i \ \forall m}$ ← se 1 artigo for escolhido, devem ser expostas pelo menos 3 embalagens

$\boxed{x_{p,m,i} \leq M\delta_{p,m,i} \quad \forall p \ \forall i \ \forall m}$ ← faz a ligação entre a var decisão e a auxiliar impondo

$\delta_{p,m,i} = 1$ sempre que $x_{p,m,i} \neq 0$

$\delta_{p,m,i} = 0$ " " " $= 0$

Q_z e $q_{o,z} \geq 0$ e inteiras

Decisões: Q_z : quantid. de atletas a por na zona z — 8 zonas

$q_{o,z}$: quantid. de atletas a transportar pelo operador o da zona z — $8 \cdot 6$ var

Restrições: $\boxed{\sum_z Q_z = 1500}$ ← 1500 atletas devem ser alojados — 1 restrição

$\boxed{Q_z \leq C_z \ \forall_z}$ ← ñ superar capacid. de alojamento da zona — 8 restrições

48 restrições ou 8 restrições — $\boxed{\left(\sum_z\right) q_{o,z} \leq \left(\sum_z\right) N_{o,z} \ \forall_o \ (\forall_z)}$ ← operadores ñ transportam + do q podem.

se os forem buscar todos de 1 vez — se fizerem 1 viagem p/ zona

var. auxiliar — $\delta_o \begin{cases} 1 & \text{se contratar operador } o \\ 0 & \end{cases}$ — $\boxed{\sum_z q_{o,z} \leq M\delta_o \ \ \forall_o}$ ← estas restrições fazem a ligação entre $q_{o,z}$ e δ_o fazendo $\delta_o = 1$ sempre q $q_{o,z} \neq 0$

$\boxed{\sum_o \delta_o \geq 3}$ ← contratar + de 3 operadores diferentes — 1 restrição

80% de 1500 devem ficar alojados a menos de 20 km da zona de prova

(A) fazer batota

$$\sum_{\substack{z \in \text{ a menos} \\ \text{de } 20\text{km}}} Q_z \geq 1200$$

(B) $y_z \begin{cases} 1 & \text{se a zona } z \text{ fica a menos de 20 km da zona de prova} \\ 0 & \end{cases}$

$$\boxed{\sum_z Q_z \, y_z \geq 1200}$$ 1 restrição

F.O. $\boxed{\text{minimizar } \sum_{z=1}^{6} Q_z P_z + \sum_{o=1}^{6} L\,\delta_o + \sum_{o=1}^{6}\sum_{z=1}^{8} T_{o,z}\, q_{o,z}}$

Var. decisão: $x_{i,j,k} \begin{cases} 1 & \text{se equipa } k \text{ controla atleta } j \text{ depois do } i \\ 0 \end{cases}$

$3 \cdot 11 \cdot 11 = \underline{363 \text{ variáveis}}$

Restrições: $\boxed{\sum_i \sum_j (t_{ij} + c_i)\, x_{ijk} \leq T \quad \forall_{k=1 \ldots 3}}$ ← cada equipa tem limite de tempo, 3 restrições

$\boxed{\sum_j \sum_k x_{ijk} = 1 \quad \forall_{i=1 \ldots 10}}$ ← p/ ñ irem várias equipas ao mesmo nem uma equipa ir a um 2 vezes

$\boxed{\sum_{j=1}^{10} x_{0,j,k} = 1 \quad \sum_{i=1}^{10} x_{i,0,k} = 1 \quad \forall_{k=1 \ldots 3}}$ ← obriga cada equipa a passar no zero

$\boxed{\underbrace{\sum_{i=0}^{10} x_{ilk}}_{\text{entram no nó } l} = \underbrace{\sum_{j=0}^{10} x_{ljk}}_{\text{saiem no nó } l}}$ ← se uma equipa vai para nó l, tem de sair de lá.

$\boxed{\sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{10} x_{0,jk} = 3}$ ← pq é ꟙ aqi temos de dizer ꟙ saiem 3 equipas e no do supermercado n era preciso dizer ꟙ se havia 4 prateleiras? ñ basta dizer $k = 1 \ldots 3$?

F.O $\boxed{\text{minimizar} \quad \sum_k \sum_i \sum_j x_{ijk}\, t_{ij}}$

Exame
2010 Fev2

diz qual a probabilit. de acontecer uma coisa se o consultor/analista prever q essa coisa vai acontecer

$$P(\theta_j|r_k) = \frac{P(r_k|\theta_j)\cdot P(\theta_j)}{\sum_j P(r_k|\theta_j)\cdot P(\theta_j)}$$

Matriz de credibilid.:

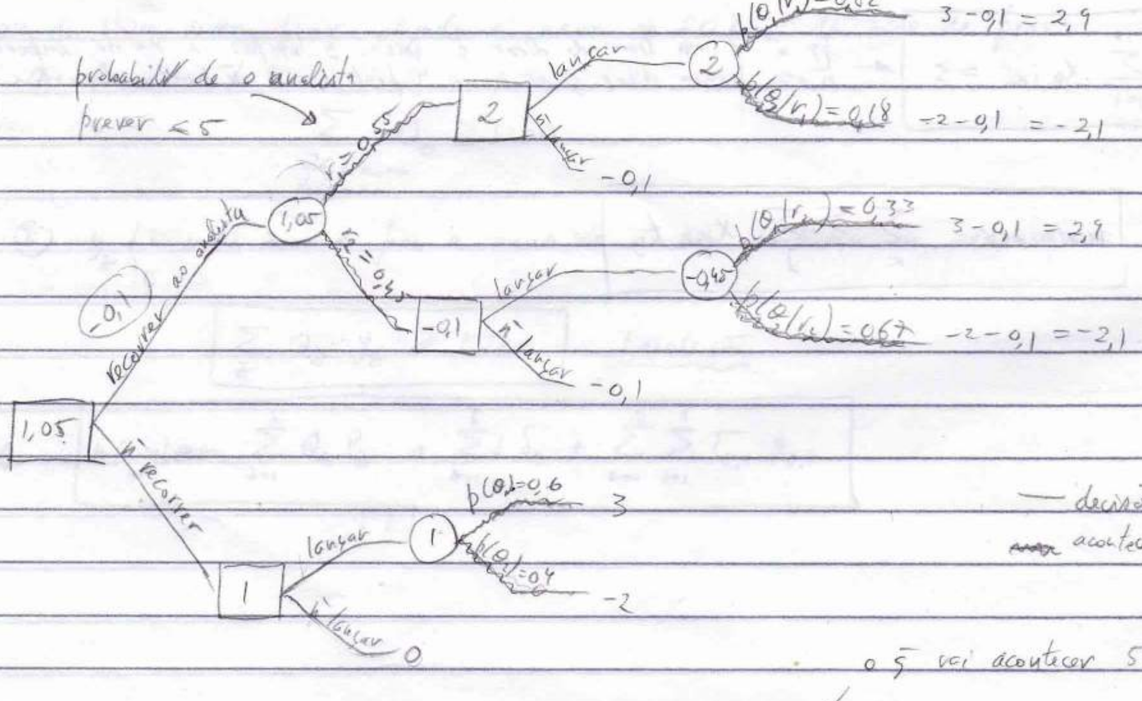
$P(r_k\|\theta_j)$	≤ 5	>5	
≤ 5	$\boxed{0{,}75}$	$\boxed{0{,}25}$	$\leftarrow P(r_1\|\theta_2)$
>5	0,25	$\boxed{0{,}75}$	$\leftarrow P(r_2\|\theta_2)$
$\theta_j \rightarrow$	$\boxed{0{,}6}$	$\boxed{0{,}4}$	
	$P(\theta_1)$	$P(\theta_2)$	

$r_1 = 0{,}75\cdot 0{,}6 + 0{,}25\cdot 0{,}4 = 0{,}55$

$r_2 = 0{,}25\cdot 0{,}6 + 0{,}75\cdot 0{,}4 = 0{,}45$

estado da natureza (E.N.)

$P(\theta_j/r_k)$	≤ 5	>5
	$\frac{0{,}75\cdot 0{,}6}{0{,}75\cdot 0{,}6+0{,}25\cdot 0{,}4} = 0{,}82$	$\frac{0{,}25\cdot 0{,}4}{0{,}75\cdot 0{,}6+0{,}25\cdot 0{,}4} = \boxed{0{,}18} \leftarrow p(\theta_2/r_1)$
previsão da ocorrência de 1 E.N. tendo o analista previsto 1 E.N.	$\frac{0{,}25\cdot 0{,}6}{0{,}25\cdot 0{,}6+0{,}75\cdot 0{,}4} = 0{,}33$	$\frac{0{,}75\cdot 0{,}4}{0{,}25\cdot 0{,}6+0{,}75\cdot 0{,}4} = 0{,}67$



o q vai acontecer 55% das vezes

→ É melhor recorrer ao analista. Se ele prever ≤5 é melhor lançar (> VE do q n lançar). Se ele prever >5 é melhor n lançar.

Nota: Em 100 vezes, 60 vão ter ≤5. O analista vai prever correctam. 75% dessas 60.

2024 Fev

Decisão: Q_{ml} : quantid do modelo m a vender à loja l

$Q_{ml} \geq 0$

$6 \cdot 4 = \underline{24}$ var

Restrições:

1) não vender o mesmo modelo a 2 ou + lojas do mesmo terminal

2) não dar + relógios às lojas do q elas podem vender

3) relativas à capacid de cada modelo

60 M1 — 20 M3 <=> 3 M1's

35 M2 <=> 1,7 M1's — 15 M4 <=> 4 M1's ← fazer 1 M4 equivale a fazer 4 M1's

L1, L2 { T1 — L3, L4, L5 { T2 — L6 { T4 — T_{lt} { 1 se loja l pertence ao terminal t; 0

δ_{ml} { 1 se se vender modelo m à loja l; 0

$\boxed{Q_{ml} \leq M \delta_{ml} \quad \forall m=1 \ldots 4 \quad \forall l=1 \ldots 6}$ ← restrições de arrasto ⇒ se $Q_{ml} \neq 0 \Rightarrow \delta_{ml} = 1$; $Q_{ml} = 0 \Rightarrow \delta_{ml} = 0$

24 restrições

1) $\boxed{\sum_l \delta_{ml} T_{lt} \leq 1 \quad \forall m=1 \ldots 4 \quad \forall t=1,2,4}$ ← cada modelo só pode estar à venda numa loja max para cada terminal

P_{ml} : previsão de venda do modelo m na loja l

2) $\boxed{Q_{ml} \leq P_{ml} \quad \forall m=1 \ldots 4 \quad \forall l=1 \ldots 6}$

$\boxed{\sum_l \delta_{1l} + 1,7 \delta_{2l} + 3 \delta_{3l} + 4 \delta_{4l} \leq 60}$ 3)

ou

c_m : capacid de produção do modelo m se só se fizesse esse

$\boxed{\sum_m \left(\frac{\sum_l Q_{ml}}{c_m} \right) \leq 1}$

{ % da produção de cada modelo relativa ao máximo

F.O. maximizar $\sum_m \sum_l \sum_t Q_{ml} V_{mt} T_{lt} - \left(\sum_m \sum_l Q_{ml} (F_m + Var_m) \right)$

Exame 2010 Fev.

RESOLVER SIMPLEX DE FORMA COMPACTA (problema A)

	x_1	x_2	s_1	s_2	valor	rácio
s_1	2	1	1	0	5000	$\boxed{2500}$
s_2	4	5	0	1	15 000	3750
$-Z$	10	7	0	0	0	-
$\boxed{x_1}$	1	0,5	0,5	0	2500	5000
s_2	0	3	-2	1	5000	$\boxed{1667}$
$-Z$	0	2	-5	0	-25 000	
x_1	1	0	5/6	-1/6	1667	
$\boxed{x_2}$	0	1	-2/3	1/3	1667	
$-Z$	0	0	-3,67	-2/3	-28 333	

$\xrightarrow{s_1 \text{ sai}}$ $\xleftarrow{x_1 \text{ entra}}$

$\xrightarrow{s_2}$ $\xleftarrow{x_2 \text{ entra}}$

x-4

x-10

x-2

x-1/6

x-2

Exame 2010 Jan

Decisão:

δ_{pd} $\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ se a peça musical p toca no dia d   12 var

Restrições:

(1) Todos os concertos no mesmo dia ñ podem durar + de 120 min

(2) Todas as peças devem ser tocadas mas só uma vez

D_p : duração da peça d

(1) $\boxed{\forall_{d=1,2} \sum_d \delta_{pd} \cdot D_p \leq 120}$ (2) $\boxed{\forall_p \sum_d \delta_{pd} = 1}$

F.O. p/ solução 1 (distribuir os tempos sem peças pelos 2 concertos)

$\boxed{\forall_p \quad 120 - \sum_d D_p \, \delta_{pd} \leq Z}$ minimizar Z.

d) $\boxed{\delta_{d3} + \delta_{d4} = 1 \ \forall_{d=1,2}}$ → peças 3 e 4 ñ podem tocar no mesmo dia

e) Novas var. de decisão q permite determinar a sequência das peças

δ_{pdi} $\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ peça p toca no dia d depois da peça i

ou

δ_{pdi} $\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ peça p toca no dia d antes da peça i

ou

δ_{pdl} $\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ peça p toca no dia d em l° lugar

—

Mini T Outubro 2010

Decisão: Q_m: quantid. de pacotes a comprar da modalid. m [pacotes]
$Q_m \geq 0$ e inteiras   5 var

I_m: quantid. de £ a investir em marketing [£]
$I_m \geq 0$ 5 var

Restrições: (1) não deve haver + de 40% do total de 1 só pacote
(2) não gastar + de 800 000 a comprar pacotes e a investir em marketing
(3) não pôr à venda + pacotes do que os da procura estimada p/ o pacote

$$\boxed{\frac{Q_n}{\sum_{m=1}^{5} Q_m} \leq 0{,}4 \quad \forall_{n=1,\dots,5}} \quad (1)$$ 5 restrições

c_m: custo de comprar a modalid. m [£/pacote]

$$\boxed{\sum_{m=1}^{5} Q_m \cdot c_m + I_m \leq 800\ 000} \quad (2)$$ 1 restrição

P_m: procura da modalid. m (s/ investido) [procura]
A_m: aumento da procura por £ investido [procura/£]

$$\boxed{\forall_{m=1\dots5} \quad Q_m \leq P_m + I_m \cdot A_m}$$ 5 restrições

(4) nº de pacotes ≤ 3 $\delta_m \begin{cases} 1 & \text{comprar pacotes da modalid. m} \\ 0 & \end{cases}$

$$\boxed{\sum_{m=1}^{5} \delta_m \leq 3}$$ 1 restrição

$$\boxed{Q_m \leq M\delta_m \quad \forall_{m=1\dots5}}$$ ← ligação entre Q_m e δ_m 5 restrições

(5)

$$\boxed{\delta_4 \leq \delta_1}$$ ← δ_4 só é 1 se δ_1 for 1

Tabela de verdade

δ_1	δ_4
1	1
1	0
0	0

i_a : início da ativ// a [dia]

c_a : compressão a fazer à ativ// a [dia]

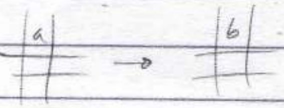
C_a: custo da compressão à ativ// a [U.M/dia]

F.O $\boxed{\text{minimizar} \quad \sum_a c_a \cdot C_a}$

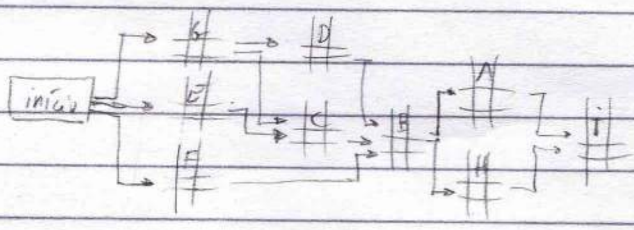
m_a : compressão máxima da ativ// a

$\boxed{\forall_a \quad c_a \leq m_a}$ ← não comprimir cada ativ// + do q ela pode ser comprimida

d_a : duração da ativ// a



$\boxed{i_b \geq i_a + d_a - c_a}$ ← ativ// b só começa depois da a acabar



cada seta 1 restrição

Fila: 2 ou + pessoas no sistema $\Rightarrow 1 - P_0 - P_1$ = prob de se formar fila

$1 - [\rho - \rho] = \ldots$

S

Características do modelo M/M/1

tempo médio a ser atendido $\rightarrow \frac{1}{\mu}$

Chegada: Poissoniana	**Tempo atendimento: exponencial negativo**
frequência de chegada dos clientes → **Taxa: λ clientes / u. tempo**	**Taxa: μ clientes / u.tempo e servidor** ← Frequência de atendimento
População $= \infty$	**Nº servidores: 1**
Fila máxima $= \infty$	$\boldsymbol{\rho = \frac{\lambda}{S\mu}}$**, com $\boldsymbol{\rho < 1}$** ← para fila ñ crescer indefinida/
	Taxa de ocupação $= \rho$ ← % do tempo q o servidor está ocupado
	Taxa de desocupação $= 1 - \rho$

médio (nº de pessoas na fila)

Length of queue → $L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ ← average waiting time in queue

nº de pessoas no sistema → $L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$ ← tempo médio de espera no sistema

probabilid. dos servidores estarem desocupados → $P_0 = 1 - \rho$ ou se S≠1, tirar o valor da tabela

probabilid. de estarem n pessoas à espera → $P_n = \rho^n P_0 = \rho^n(1-\rho)$

$P(n > k) = \rho^{k+1}$

nº pessoas à espera (no sistema)

só para MM1: probabilid. de o nº de pessoas no sistema (n) ser > q um certo valor (K) (= ao q está em cima mas este funciona p/ tudo)

$P(W > t) = e^{-\mu(1-\rho)t},\ t \geq 0$ ← probabilid. de o tempo gasto no sistema > t

$P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t},\ t \geq 0$ ← probabilid. de o tempo na fila de espera > t

$P(W_q = 0) = P_0$ ← probabilid. de o tempo na fila de espera = 0

$1 - P(W > t)$ ← probabilid. de o cliente estar menos de t no sist.