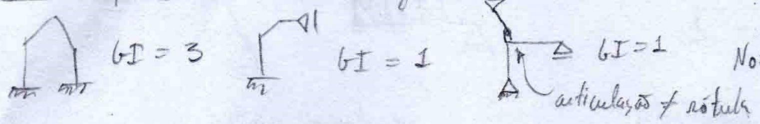
MÉTODO DAS FORÇAS

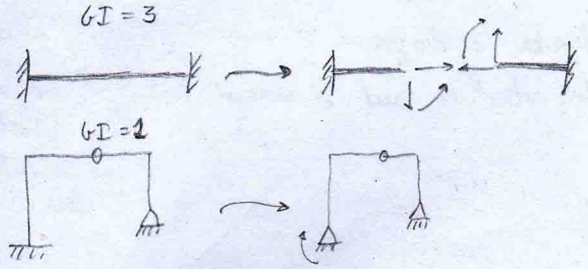
→ serve para calcular esforços / reações num sistema hiperestático q nos permitam transformá-lo num isostático,

<u>Grau de hiperstaticid.</u>: nº de incógnitas, numa estrutura, superior àquelas q podemos tirar pelas eqs. da estática.



Nota: lembrar q cada rótula reduz em 1 o G.I

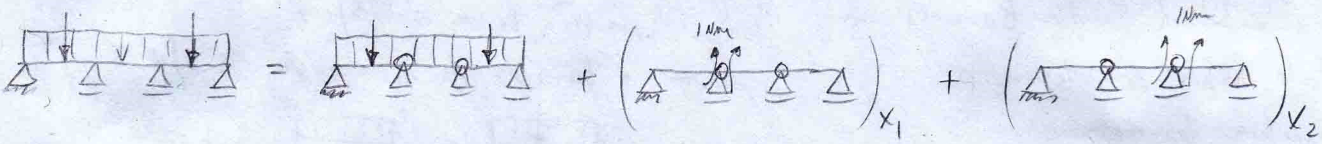
1 Escolher um sistema base transformando ligações nas suas forças e momentos correspondentes.
- Utilizar sempre q possível as condições de simetria da estrutura.



em vigas contínuas é normal aplicar rótulas nos apoios mantendo se possível as condições de simetria da estrutura.

<u>Nota</u>: só se pode ↓ nº ligações e a estrutura tem de continuar "imóvel"

2 escrever a eq. canónica do método das forças / eq. da compatibilid. dos deslocam. forma gráfica e/ou escrita,



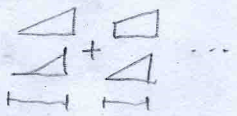
$$0 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2$$

$$0 = \delta_{20} + \delta_{22} X_2 + \delta_{21} X_1$$

δ_{ab} — local na estrutura — sistema em q se encontra

3 Desenhar os diagramas de momentos e/ou esforços normais conforme seja necessário (ver TCU)

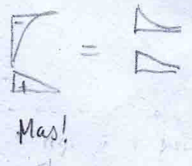
$\delta_{11} \rightarrow \int \frac{M_1 M_1 dl}{EI} + \int \frac{N_1 N_1}{EA} dl \rightarrow$



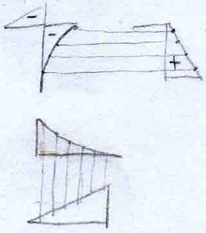
$\delta_{22} \rightarrow$
$\delta_{12} \rightarrow$
$\delta_{10} \rightarrow$
$\delta_{20} \rightarrow$

por esta ordem é + simples (os ⓚN só entram no fim)

<u>Notas</u>: • a posição dos desenhos ñ importa em termos de simetria horizontal



Mas!

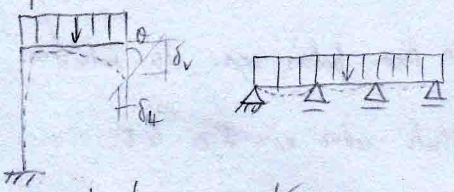


ao percorrer o gráfico num sentido é preciso q estejam coerentes

• aqui ñ é preciso pôr em kN

CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS

→ Teorema da carga unitária: método c/ base nos teoremas energéticos e dos trabalhos virtuais q nos permite o cálculo de deslocações em

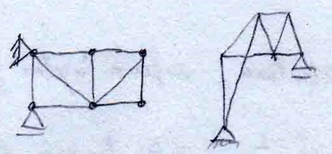


estruturas contínuas

$$\delta \approx \int \frac{M\bar{M}}{EI}\,dl$$

↓

desenhar o diagrama de momentos da estrutura real c/ carregamento real

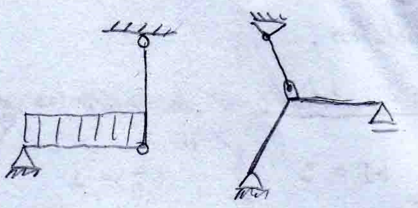


estruturas articuladas

$$\delta = \int \frac{N\bar{N}}{EA}\,dl$$

↓

escrever os esforços de tração/compressão nas barras, c/ estrutura sujeita ao carregamento real



estruturas mistas

$$\delta \approx \int \frac{M\bar{M}}{EI}\,dl + \int \frac{N\bar{N}}{EA}\,dl$$

← este é só para a barra q só tem E. Normal

↓

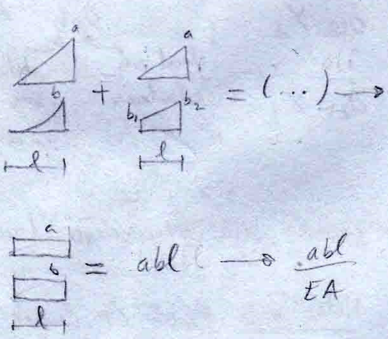
desenhar diagramas de momentos e esf normal da estrutura sujeita ao carregamento real

Aplicar a força ou momento unitário onde se quer calcular o deslocamento ou rotação e desenhar os diagramas ou escrever os esforços normais conforme a estrutura, e sujeita apenas à carga unitária

↓

Utilizar o método de Bonfim Barreiros ← $\bar{M}, \bar{N}$ para o cálculo rápido dos integrais a partir da geometria dos diagramas

δ_V^A → ou δ_H^A ou θ_A



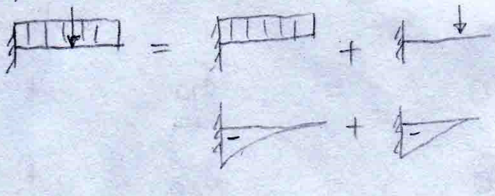
$= (\dots) \rightarrow \dfrac{(\dots)}{EI}$

$= abl \rightarrow \dfrac{abl}{EA}$

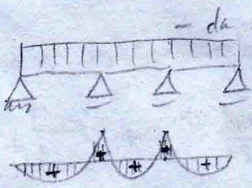
δ_V

meios q podem simplificar:

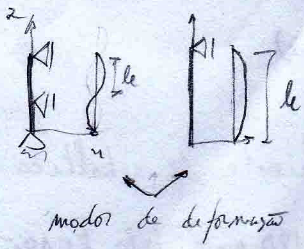
- princípio da sobreposição de efeitos



- condições de simetria – da carga
  – da estrutura

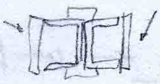


ENCURVADURA EM DIFERENTES PLANOS



$\rightarrow \lambda_{crit} = \lambda_{máx} \leftarrow$ comparar λ_x e λ_y $\left(\frac{I}{A}\right)^{1/2}$

As presilhas podem ser vistas tb se podem pôr



[1] desenhar os dois planos onde pode haver encurvadura $\overset{z}{\llcorner}_x$ $\overset{z}{\llcorner}_y$ e depois ver as cond. fronteira

[2] em perfis compostos $\Rightarrow i_c = \left(\frac{I_c}{A_c}\right)^{1/2}$ c = conjunto

---

→ Quando houverem travessas ou presilhas há q ver se $\lambda_{local} > \lambda_{global} \Rightarrow$ encurvadura local vai-se dar antes da encurvadura da peça toda, em q l_e = espaçamento entre presilhas/travessas.

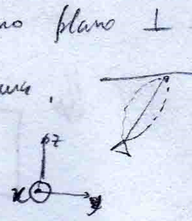
→ hip. se o perfil é composto na enc. local faz-se como se fosse só o simples. Pff se gira

$\sigma_{sd} = \left(\frac{N_{sd}}{A \cdot \varphi}\right)_{local} < \sigma_{rd}$ $N_{sd\,local} < N_{sd\,simples-global}$

][pegar no $i_{min-s} \rightarrow \lambda_s = \frac{l_{e-local}}{i_{min\,s}}$ e comparar c/ o λ_{global}

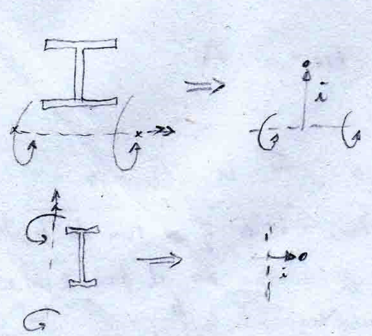
→ se se pede o perfil equivalente em (nome do perfil) é p/ dizer um q aguente a mesma força.
HEA
UNP ...

→ "a estrutura encontra-se devidam/ contraventada no plano ⊥ ao da figura" → significa q só pode haver risco de encurvadura $\left(\frac{N_{sd}}{\varphi A} \geq \sigma_{rd}\right)$ no plano da figura.



⇒ só interessa o cálculo da λ p/ plano figura

⇓ i_x (vai rodar em torno de x)

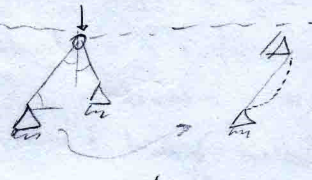


concentrar a área toda num ponto, e o raio de giração i dá o mesmo momento de inércia.

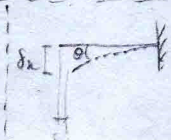
Raio de giração min é preciso um pouco de raio e aquilo já flete.

Ao fazer dimensionam/o, nada contraventado, e ligações =s deve-se usar o i do eixo fraco q é lá onde vai encurvar

---



usar o método dos nós, em cima



simplificação q se costuma fazer

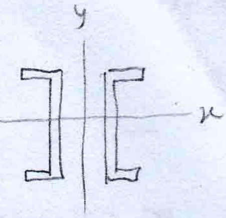
1º. escrever i_{y_s} e i_{y_c} para o perfil simples e do conjunto

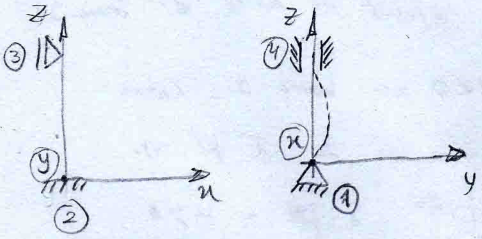
$i_c = \left(\frac{I_c}{A_c}\right)^{1/2}$

Em estruturas q n estejam contraventadas o i q vigora é o mínimo ⇒ IPE's geralm/ são mais i_{min} mto baixo. À compressão é melhor] ou][ou ⌋L, p/ causa disso.

LER RAPIDA/ AS TABELAS DE COND. FRONTEIRA

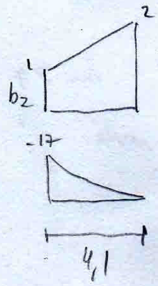
	dx	dy	dz	rot x	rot y	rot z
base	f	f	f	f	l	f
topo	f	f	l	f	l	l



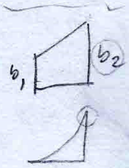
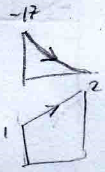


"Translações em x, rotações em y.

Translações em y, rotações em x."

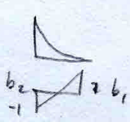


$\longrightarrow \dfrac{(-17)\cdot 4{,}1}{12}(2+3)$

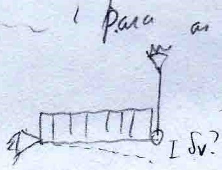
Na tabela tem  mas se nós fizermos 

outra maneira de ver é q o q está do lado do bico  é o b_2 e isso tem de se manter.

Outro caso



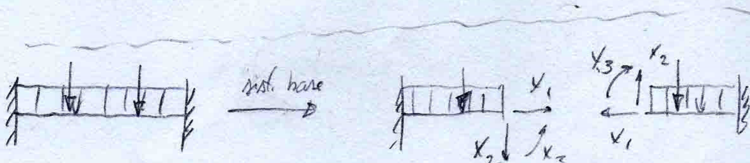
Para uma dada estrutura c/ carregamento a provocar grandes M_f, as tensões normais devidas a eles são mto >, q as devidas aos E.N. Daí q em estruturas mistas para as vigas q levam c/ M_f, ñ se considera o E.N, pq p/ aguentarem os M_f,



$$\delta_v = \int \frac{M\overline{M}}{EI}\,dl \text{ (da viga)} + \int \frac{N\overline{N}}{EA}\,dl \text{ (da barra vertical)}.$$

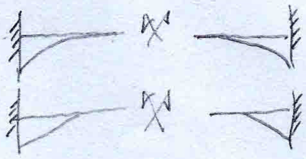
Já as barras q têm q ter uma resistência mto grande, + do q suficiente p/ aguentarem o E.N.

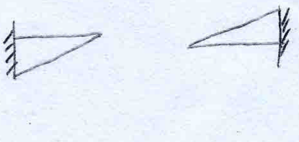
$$\sigma = \overset{\approx 0}{\frac{N}{A}} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}$$



simétrico ⇒ aproveitar a simetria

M_1  $\Rightarrow X_1 = 0$

M_0 

M_2 

simétrico ≠ 0
antissimétrico = 0
⇓
$X_2 = 0$

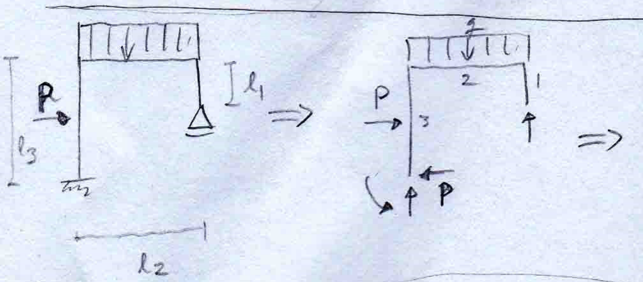
significa

pegar c/ caneta e ver

Condições de aplicabilid// do método de B.B.:

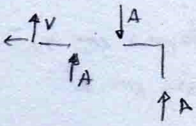
- EI, EA, GI_p e GA_R serem ctes ao longo das barras em q o método está a ser usado

VER RAPIDAMENTE OS DIAGRAMAS DE ESFORÇOS



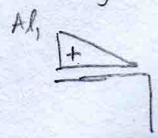
A barra 1 ñ tem V, => $M=0$ ($M = \int V dx$)

A barra 2 vai levar c/ um esforço V do axial da barra 2

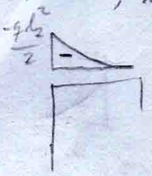


ptt. $V<0$ na barra 2. Como estamos a ver da dª p/ esq.

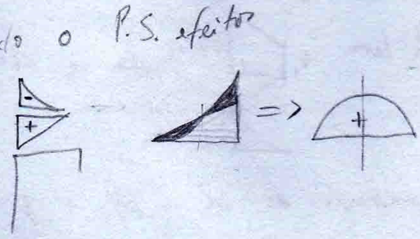
$M = -\int V dx$ e ptt o $M>0$



Além disso vai levar c/ a carga distribuída q provoca $V>0$ => $M<0$, em forma de parabolóide



Aplicando o P.S. efeitos



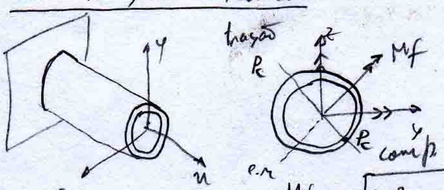
a partir do meio o  passa a ser > q o  e o M começa a diminuir.

Aliás  $M = -\frac{qx^2}{2} +$

1^a PARTE

via τ

Para secção circular



$M_f = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_f \cdot R}{I}}$$

$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$ (maciço)

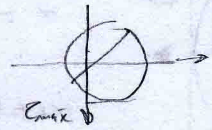
$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot (d_{ext}^4 - d_{int}^4)}{64}$

$I_p = 2I$

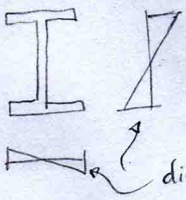
⟶ Aplica-se o CTT qdo temos $\tau + \sigma$ (torção + ...)

$\tau = \boxed{\frac{M_t \cdot R}{I_p}}$

$\sigma = \left[\quad \right]$

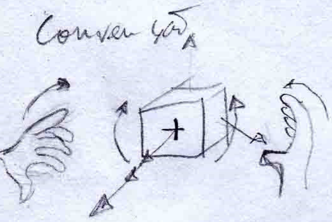


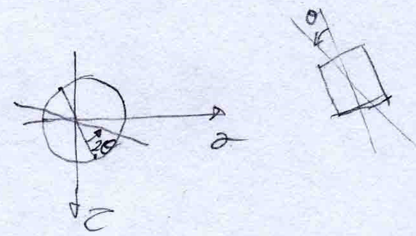
$\tau_{máx} = \left(\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} - \tau_{xy} \right)^{1/2} \Longrightarrow \sigma_{eq} = 2\tau_{máx} < \sigma_{rd}$



diagramas da variação da tensão normal

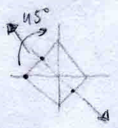
Convenção





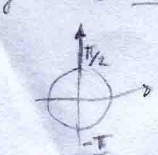
como τ assim as rotações no circ. de Mohr e no plano têm o mesmo sentido.

Lembrar:



roseta a 45° então teremos os valor p/ θ 45

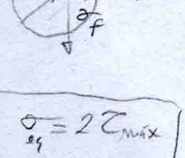
ângulos ↻ são negativos!



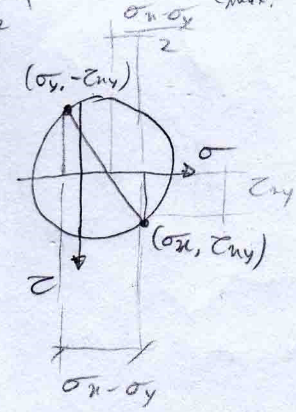
Critério de Tresca

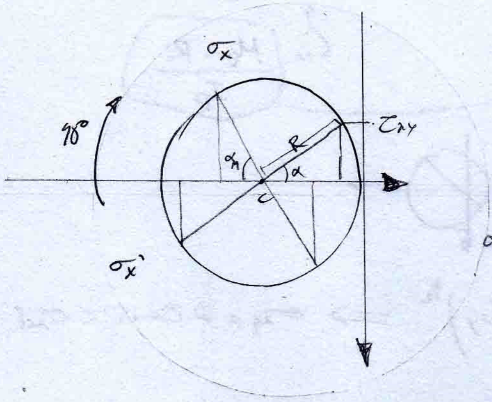
permite-nos passar de um estado de tensão complexo p/ um c/ $\tau_{máx}$ esse depois pode ser relacionado c/ σ_{eq} do ensaio de tração p/ onde foram definidas as propriedades do material. σ_{eq} é o dobro desse $\tau_{máx}$.

(pitágoras) $\underset{\text{raio}}{\tau_{máx}} = \sqrt{\Big(\underbrace{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}_{\sigma_{máx}\text{-flexão}}\Big)^2 + \underbrace{\tau_{xy}^2}_{\tau_{máx}\text{-torção}}}$



$\boxed{\sigma_{rd} > \sigma_{eq} = 2\tau_{máx}}$

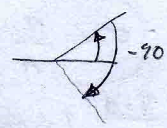


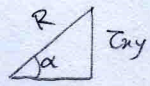


$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\text{oposto}}{\text{adjacente}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}\right)$$

$\alpha + (-90) = \alpha_{novo}$ (cuidado c/ soma de ângulos





$$R = \frac{\tau_{xy}}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$\sigma_x = C + R\cos(\alpha_n)$

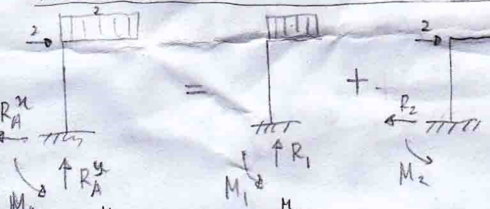
ou −, olhar p/ o círculo p/ decidir

$\sigma_y = C - R\cos(\alpha_n)$

(ou + ...)

$\tau_{xy} = R\operatorname{sen}(\alpha_n)$

PRINCÍPIO DE SOBREPOSIÇÃO DE EFEITOS

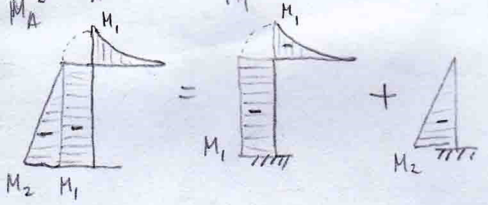


$R_A^x = R_2$

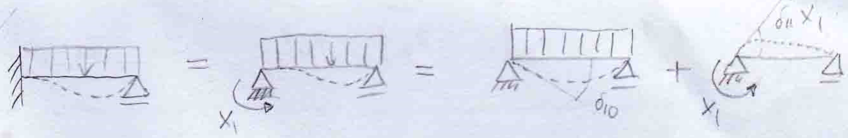
$R_A^y = R_1$

$M_A = M_1 + M_2$

→ se formos a pensar nas eq. da estática as reações só se somam e subtraiem, p. isso até são as próprias eq. da estática q aplicam este princípio.

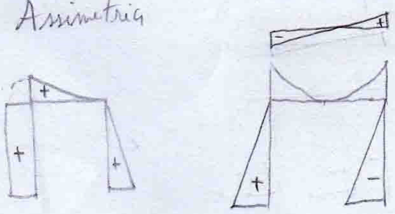


SIGNIFICADO FÍSICO DAS EQ. COMPATIBILI//

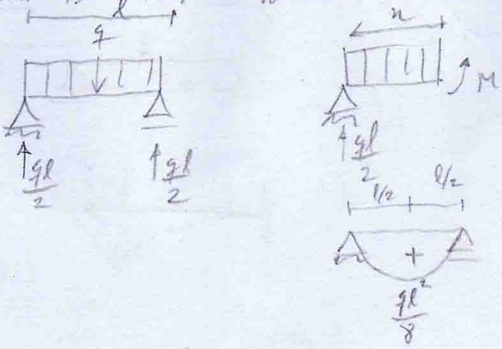


$$0 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$

Assimetria   Antissimetria



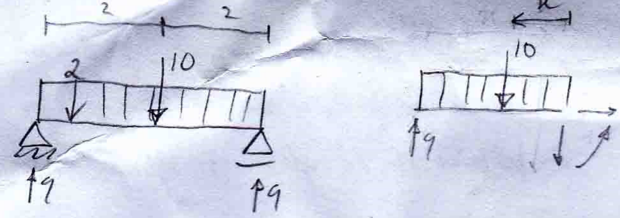
A expressão p/ momento crítico $M = \frac{ql^2}{8}$ só se aplica quando os 2 apoios têm reações verticais ='s!



$$M - \frac{ql}{2}x + \frac{qx^2}{2} = 0$$

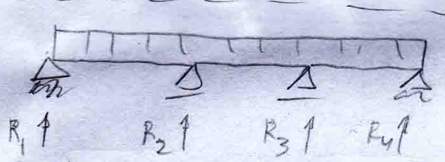
$$M = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qlx}{2}$$

$$M(l/2) = -\frac{ql^2}{8} + \frac{ql^2}{4} = \frac{ql^2}{8}$$



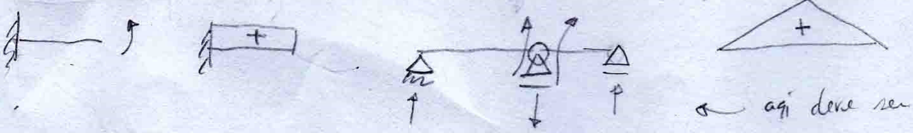
$$M - 9(x+2) + 10x + \frac{\cancel{2}(x+2)^2}{\cancel{2}} = 0$$

$$M = -(x+2)^2 - 10x + 9(x+2)$$



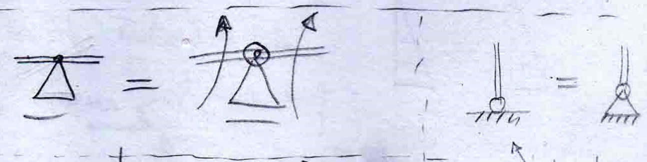
se me derem os valores das reações R_1 e R_4, R_2 e R_3 podem ser determinados pelas eq. da estática (2 inc.)

Nem sempre qdo se adiciona um momento o diagrama de M fica de

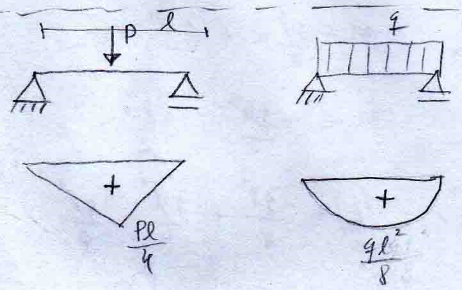


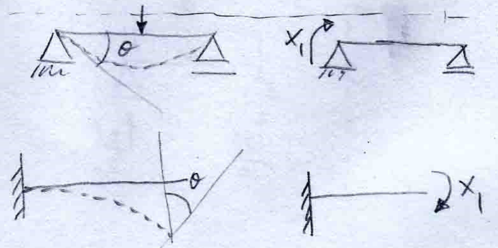
← aqui deve ser por causa das reações

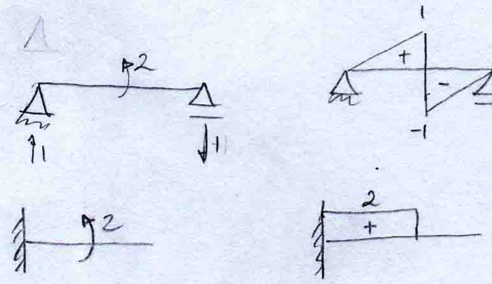
então



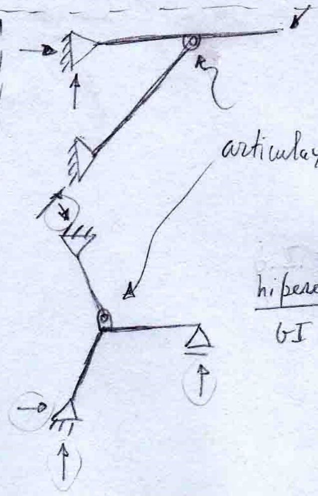
também é um apoio duplo





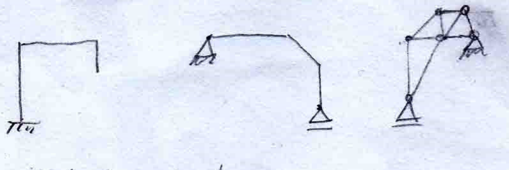


Ao adicionar um momento positivo no diagrama desce o valor do momento.

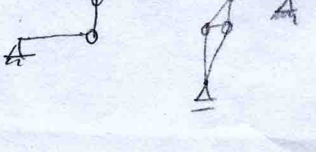


Estrutura contínua

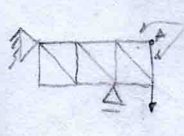
Estrutura articulada



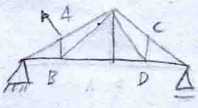
Estrutura Mista



Treliças: elementos de força nula

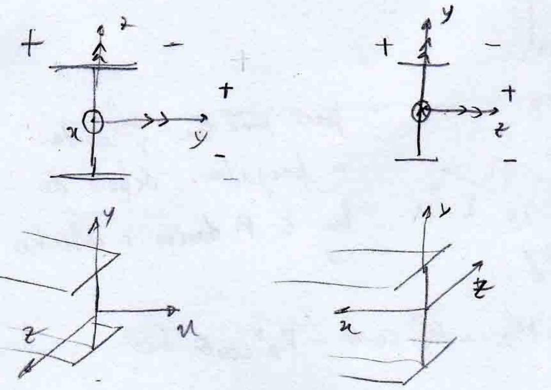


têm esforço axial nulo senão o eq. do Nó A era impossível

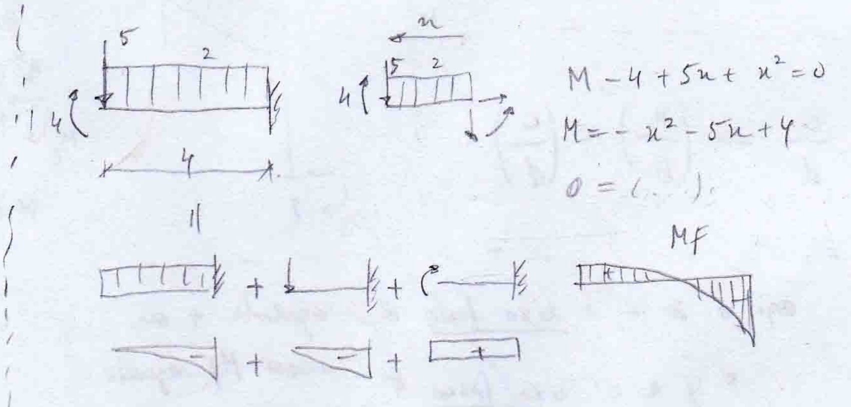


Barra CD tem esforço nulo, AB não

→ se o eixo 2º o qual há torção estiver a apontar p/ fora na minha direção, o 2º eixo é o q tem o sinal trocado.



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} \quad \text{(p/ fora, mim)}$$



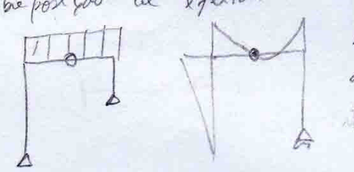
$M - 4 + 5x + x^2 = 0$

$M = -x^2 - 5x + 4$

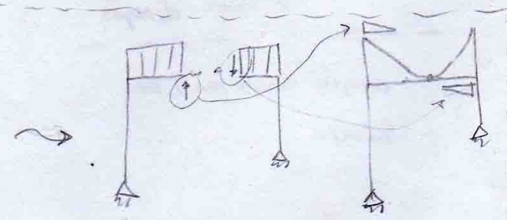
$0 = (\ldots)$

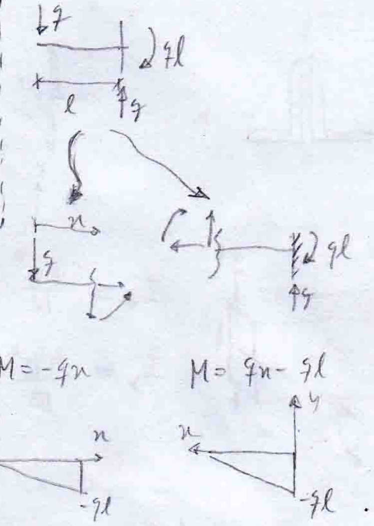
Geral/ se houver várias forças a serem aplicadas no sist. zero, é melh separar pela sobreposição de efeitos.

Caso:



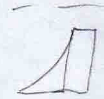
se for 1 pórtico assimétrico ñ dá parab. perfeita





$M = -9x$ $\qquad$ $M = 9x - 9l$

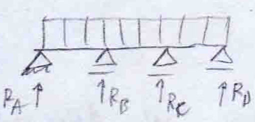
→ Por outro lado se o diagrama já vier separável ñ é preciso calcular nada como no caso anterior.



$$\sigma = \frac{\gamma M_y \cdot z}{I_y} \leq \frac{\sigma_{rd}}{N}$$

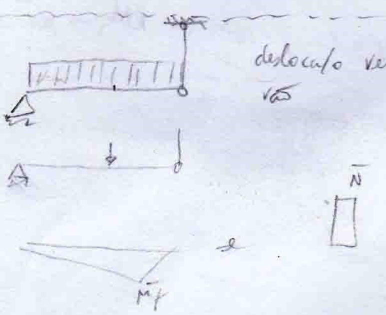
fator de segurança

fator de majoração de ações



$R_A = R_D \neq R_B = R_C$

Qdo tiver incógnita escrever l??



deslocam/o vertical a meio vão

para as reações

Em vigas contínuas hiperestáticas p/ reduzir o GI pôr rótulas nos apoios é o + simples.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bf - ce \\ -af + cd \\ ae - bd \end{bmatrix}$$

$210 \cdot 10^9\ N/m^2$

$I_x = (\ldots) \cdot 10^6\ mm^4$

$I_x = (\ldots) \cdot 10^{-6}\ m^4$

"Tangente, é o oposto sobre o adjacente"

Ao fazer diagramas da dª p/ esq ao integrar e ao derivar V e M trocar sinal!!

Em estruturas hiperestáticas simétricas usar a simetria!

carga e estrutura

E depois ter em atenção

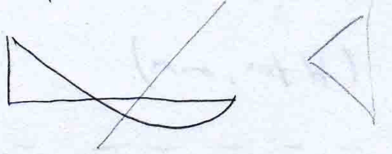
sim. $\qquad$ antisim

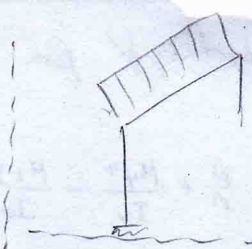
ao multiplicar e somar dá zero

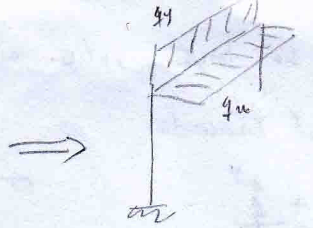
$-a \cdot (-b) + -a \cdot b = 0$

Tenho q fazer p/ dois lados!

→ casos especiais



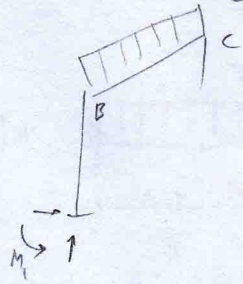


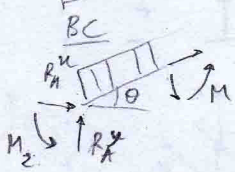


$q_y \cdot$ hip

$q_x \cdot$ hip

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} < \left(\frac{c}{d}\right)^{-1}$$





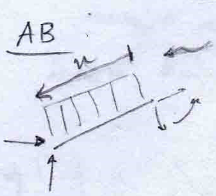
Para não ter q andar a projetar. depois de ter o M derivo e obtenho o V.

$$M + M_2 - R_A^x \operatorname{sen}\theta - R_A^y \cos\theta = 0$$

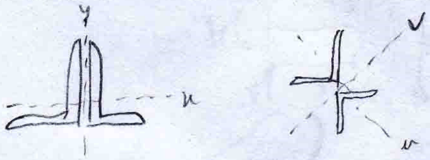
⚠ ver isto no ex. de exame q fiz

aqui o z é o eixo forte ← aguenta + ou

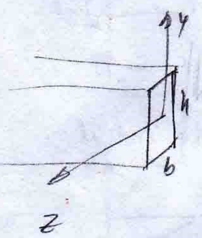
o y é o eixo fraco ← menor Mf segundo a sua direção



← o correto é por o x assim e ajuda p/ q saiba sempre q a soma dos momentos é no início ← 1

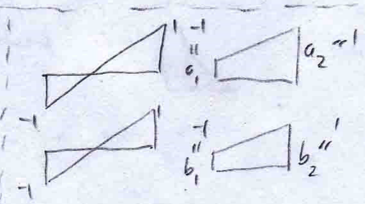


direções principais de inércia



$$I_z = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_y = \frac{h b^3}{12}$$



No B.B. se o ▷ q está na tabela está assim e o q tenho do cálculo é ◁ ñ importa. O importante é as posições relativas entre os símbolos manterem-se.

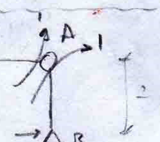
Para cada rótula só se pode fazer 2 eq.

ΣM_A , ΣM_A^{esq} , $\cancel{\Sigma M_A^{dir}}$

$$W_y = \frac{d \text{ eixo neutro (y ou z)}}{\text{m. inércia } (I_y, I_z)}$$

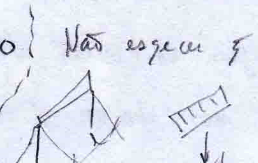
$$\frac{M_y}{W_y} < 275 \Rightarrow W_y > \frac{275}{(\ldots) \cdot 10^6} \leftarrow M_y$$

$W_y = (\ldots) \cdot 10^3$ kNm → Nmm



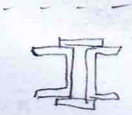
$$\Sigma M_A^{dir} = 0 \Rightarrow R_B^x \cdot 2 - 1 = 0$$

Não esquecer q

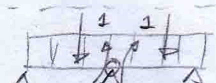


é o comprimento da hip. que entra BB

Perfil composto:

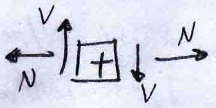


Perfil simples:

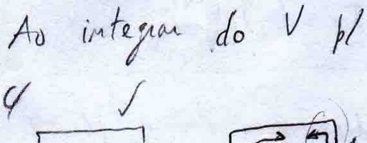


← por aqui dá – trabalho

Convenção



Ao integrar do V p/ o Mf ter cuidado, e cargas



← aqui por integração

$\int V dx = -M$

se fizermos sem ser por integração ñ é preciso trocar o sinal

Para ver rapida/ qual o eixo forte/fraco ou qual tem > I, fazer o mov. de rodar c/ o dedo e imaginar a peça a rodar sobre o eixo