

Propriedades dos Fluidos – Lei de Newton da viscosidade

Hidroestática

Tensão de corte de fluido Newtoniano

Potência

Momentos

Lei Fundamental

$$\tau = \frac{\mu du}{dy} = \mu \frac{V}{h} = \mu \frac{dv}{dr}$$

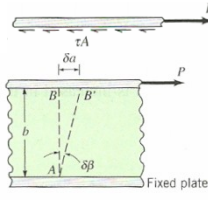
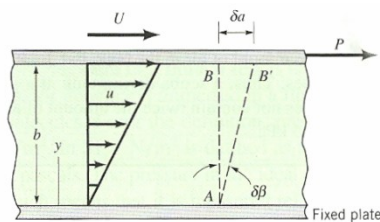
$$V = \frac{Fh}{\mu A}$$

$$P = M \times \omega$$

$$M = F \times r$$

$$V = \omega \times r$$

$$-\frac{dp}{dh} = \rho g \rightarrow p_2 - p_1 = \rho g(h_2 - h_1)$$

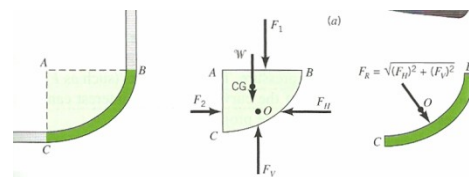


$$F = p \times A$$

$$y_R = \frac{I_{xc}}{y_c} + y_c$$

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c$$

$$M_r = \int_A \tau r dA$$



Hidroestática

$$F = pa \times A + \rho g h_{CG} \times A$$

$$y_{CP} = -\frac{\rho g \text{sen} \theta \cdot I_{xx}}{F} = -\frac{\rho g \text{sen} \theta \cdot I_{xx}}{p_{CG} A}$$

$$x_{CP} = -\frac{\rho g \text{sen} \theta \cdot I_{xy}}{F}$$

Em superfícies Curvas

$$\Sigma F_H = 0 \leftrightarrow F_2 = F_H ; \Sigma F_V = 0 \leftrightarrow F_1 + F_g = F_V, F_g = W(\text{carga})$$

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

Equação de Bernoulli

Jacto Livre (Torricelli)

Comportas

Velocidade num tubo de pitot estático

Placa orifício, Venturi, "Nozzle"

$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z = \text{cte}$$

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{cte} = H$$

$$V = \sqrt{2gh}$$

$$Q = z_2 b \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{1 - \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2}}$$

se $z_1 \gg z_2, Q = z_2 b \sqrt{2gz_1}$

$$V = \sqrt{2(p_3 - p_4)/\rho}$$

$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}}$$

Teorema de transporte de Reynolds

Variantes do Transporte de Reynolds

Equação da quantidade de movimento

$$\frac{DB_{sist}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho b dV + \int_{CS} \rho b V \cdot \hat{n} dA = 0$$

$$\frac{DB_{sist}}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} vc + \int_{SC} \rho b \bar{v} dA, \text{ onde } B = mb$$

$$\frac{DB_{sist}}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} vc + \rho_2 A_2 V_2 b_2 - \rho_1 A_1 V_1 b_1$$

Massa: $B = m, b = 1 \therefore = 0$

Quantidade de mov.: $B = mV, b = V \therefore = \Sigma F_{ext}$

Energia: $B = E, b = e \therefore = \dot{Q} + \dot{W}$

$$e = \frac{p}{g} + \frac{V^2}{2} + gz$$

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho \bar{V} (\bar{V} \cdot \bar{n}) dA = \Sigma F_{ext}$$

Equação da massa

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{\partial m}{\partial t} vc + \int_{SC} \rho b \bar{v} dA$$

Equação da Energia (E=mc)

$$\dot{W} + \dot{Q} = m_{out} \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} V_2^2 + gz_2 + u_2 \right) - m_{in} \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} V_1^2 + gz_1 + u_1 \right)$$

$$P_2 + \frac{1}{2g} V_2^2 + z_2 = P_1 + \frac{1}{2g} V_1^2 + z_1 + h_s - h_e$$

$$\frac{DE}{Dt} \text{ sist} = \frac{\partial E}{\partial t} vc + \int \rho \bar{v} n e dA \longrightarrow$$

Equação da continuidade (conservação da massa), com $v=(u,v,w)$

Equação de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

, se incompressível

$$x: \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$y: \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$z: \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Com $\vec{V}=(u,v,w)$ e $\vec{g}(0,g,0)$

Aceleração:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

Fórmulas

$$\dot{V} = A \times v$$

$$\dot{m} = \rho VA = \rho Q$$

$$Ma = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{RTk}}$$

$$\tau = \frac{F}{A}$$

$$p = \rho RT \quad (\rho = m/V)$$

$$c = \sqrt{RTk}$$

$$\vartheta = \frac{\mu}{\rho}$$

Perfil linear de Veloc.
 $U_y = U_p \times \frac{y}{h}$

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_p}{h}$$

$$F = m \cdot a$$

$$\dot{W} = \rho g Q h_B$$

$$p = \rho gh$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}, n = \text{rotações}$$

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\vartheta}$$

$$Pot = M \times \omega$$

$$q = \int_0^h v dx$$

$$\bar{v} = \frac{q}{h}$$

Solução Simples para Fluidos Laminares, Viscosos e incompressíveis

Escoamento Laminar estável entre duas placas paralelas

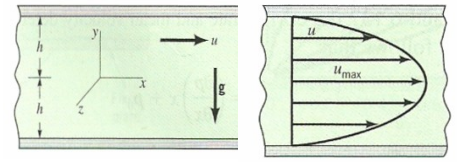
$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - h^2)$$

$$q = \frac{2h^3 \Delta p}{3\mu l}$$

$$V = \frac{h^2 \Delta p}{3\mu l}$$

$$u_{m\acute{a}x} = \frac{3}{2} \bar{v}$$

$$p = -\rho g y + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) x + p_0$$

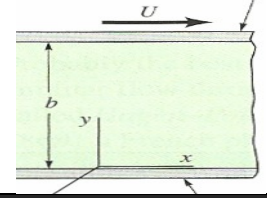


Escoamento de Couette

$$u = U \frac{y}{b} + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - by)$$

$$P = -\frac{b^2}{2\mu U} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

$$u = U \frac{y}{b}$$



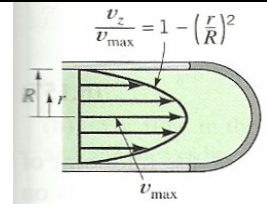
Escoamento Laminar estável em Tubos Circulares

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu l}$$

Lei de Poiseuille: $V = \frac{R^2 \Delta p}{8\mu l}$

$$v_{m\acute{a}x} = 2V$$

$$\frac{v_z}{v_{m\acute{a}x}} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2$$



Análise dimensional

TEOREMA Pi de Buckingham

Uma equação envolvendo k variáveis dimensionalmente homogêneas, pode ser reduzido a uma relação "termos de pi" = $k-r$, onde r é o número mínimo de dimensões necessárias para descrever as variáveis (normalmente 3)

- 1º Listar todas as variáveis relevantes envolvidas no problema;
- 2º Expressar cada uma das variáveis em termo das dimensões básicas (M,L,T)
- 3º Determinar o n° de $\pi = k - r$, k -n° de variáveis, r -n° dimensões de referência;
- 4º Escolher uma base (normalmente ρ, V, D , não devem conter variável dependente);
- 5º Formar um grupo $\pi [var_{dep}^1 \rho^a V^b D^c] = [0]$;
- 6º formar os restantes π ;
- 7º verificar dimensionalidade e independência;
- 8º exprimir a forma final.

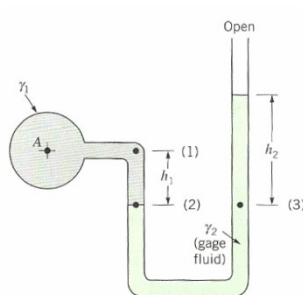
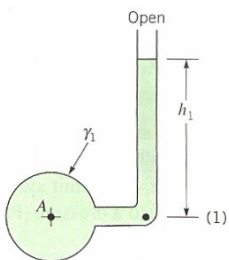
Manômetros

Tubo piezométrico

$$p = \rho g h + p_0 \therefore P_A = P_1 = \rho g h_1$$

Vantagens: -Simples e preciso;

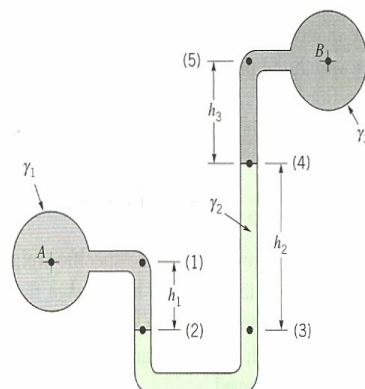
Desvantagens: -só é possível utilizar se a pressão no interior do recipiente for maior do que a pressão atm; -a pressão a medir tem de ser relativamente baixa, para a altura de coluna ser aceitável;-o fluido tem que ser líquido.



Tubo em U

$$P_A = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1$$

$$P_A - P_B = \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 - \rho_1 g h_1$$

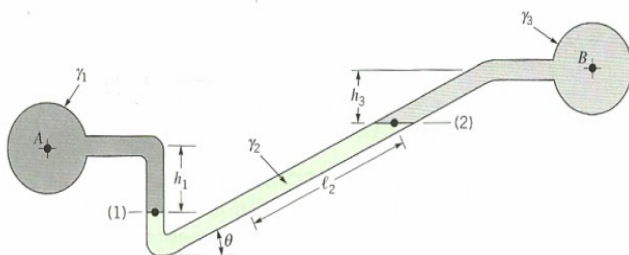


Escoamento de Couette

$$\frac{\partial p}{\partial x} < 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} > 0$$



Tubo em U inclinado

$$P_A - P_B = \rho_2 g l_2 \text{sen}\theta + \rho_3 g l_3 - \rho_1 g l_1$$

$$P_A - P_B = \rho_2 g l_2 \text{sen}\theta$$

$$l_2 = \frac{P_A - P_B}{\rho_2 g \text{sen}\theta}$$

Utilizado sobretudo para pequenas pressões.

EXPERIÊNCIAS

Hidroestática

-Consiste na medição da altura de água no reservatório que mantém na horizontal o braço L;

- Tem massas suspensas numa das suas extremidades;

- Massa suspensa vs. Altura da superfície vertical suspensa

OBJECTIVO: Constatar o aumento da força de pressão na face BD com o nível da água no reservatório, e a parte submersa de BD aumenta. O objetivo é conhecida a força, determinar experimentalmente o seu ponto de aplicação.

Devido à força circular do corpo, com o centro no *pivot*, as forças de pressão nas superfícies curvas não contribuem para o equilíbrio da barra L usando o contrapeso na extremidade oposta aquela onde as massas foram suspensas.

EXPERIMENTAL: $PesoL = F_{cg}h'$

Porque $F_{cg} = p_{cg}A$, ficamos com $mgL = p_{cg}Ah'$

Porque $p_{CG} = \rho gh_{CG}Ah'$, então $mgL = \rho gh_{CG}Ah'$

$$mL = \rho h_{CG}Ah' \rightarrow h' = \frac{mL}{\rho h_{CG}A}$$

Superfície parcialmente submersa (se $d < D$)

$$A = Bd \therefore h_{CG} = \frac{d}{2}$$

$$h' = \frac{2mL}{\rho Bd^2}$$

Superfície totalmente submersa (se $d > D$)

$$A = BD \therefore h_{CG} = d - \frac{D}{2}$$

$$h' = \frac{mL}{\rho BD(d - D/2)}$$

TEÓRICO: $y_{CP} = -\frac{\rho g \sin \theta \cdot I_{xx}}{p_{CG}A}$, porque

$$I_{xx} = \frac{BD^3}{12} \text{ e } p_{CG} = \rho g(d - D/2)$$

$$y_{cp} = -\frac{\sin \theta D^2}{12(d - \frac{D}{2})}, pq \theta = 90^\circ \text{ e } \sin \theta = 1,$$

$$h' = h_{CG} - y_{CP} \text{ e } h_{CG} = H - D/2$$

$$h' = H - \frac{D}{2} + \frac{D^2}{12(d - \frac{D}{2})}$$

Equação de Bernoulli

Tubos de venturi e Pitot

-Consiste na medição de alturas em tubos piezométricos (pressão estática) ligados em diversos pontos na superfície de uma tubagem com tubo de Venturi

OBJECTIVO: constatar a variação da secção da tubagem (área de passagem da água, velocidade do fluido) e a validade do teorema de Bernoulli.

Registaram-se valores da altura de coluna de água para valores diversos de caudal de água na instalação. A medição de pressão fez-se por tomadas de pressão estática (orifícios na parede da tubagem) e uma tomada de pressão total, tubo de pitot, deslocado ao longo da tubagem. O caudal foi medido com um balde, onde se recolheu a água durante um tempo determinado com recurso a um cronómetro. Determinar a massa de água com balança digital

EXPERIMENTAL: $\dot{m}_{exp} = \frac{\text{massa}}{\text{tempo}}; Q_{exp} = \dot{m}_{exp} \frac{3600}{\rho}; U_i = \frac{Q_{exp}}{A_i} =$

$$\frac{Q_{exp}/3600}{\pi d_i^2/4}$$

$$P_{Dini} = P_{Ti} - P_{Esti} \text{ como } P_{Esti} = \rho gh_{Esti} + p_{ar} \text{ e } P_{Ti} = \rho gh_{Ti} + p_{ar}$$

, $P_{Dini} = \rho g(h_{Ti} - h_{Esti})$ que não é mais do que o termo da energia cinética

$$P_{Dini} = \frac{1}{2} \rho U_i^2$$

Aplicação da equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente no eixo de tubagem $p_i + \frac{1}{2} \rho U_i^2 = p_{Ti} + \frac{1}{2} \rho U_{Ti}^2$; e pq a velocidade na extremidade do tubo de pitot era 0, $U_{Ti} = 0$ e $U_i =$

$$\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{Ti} - p_i)}$$

$$\text{por fim } U_i = \sqrt{2g(h_{Ti} - h_i)} \text{ e } Q_i = U_i \pi d_i^2/4$$

TUBOS abertos para atmosfera: $h_{ar} = \frac{p_{ar}}{\rho g} + h_1 \rightarrow h_{ar} = \frac{p_1}{\rho g}$

Pressão estática: $P_{Esti} = \rho gh_{Esti}$

TEORIA: $p_{Tteo} = p_{Esti} + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q_{exp}}{\pi d_i^2/4} \right)^2$

Conservação da quantidade de movimento linear

Teorema de transporte de Reynolds

-Consiste na medição do caudal volúmico que é necessário para igualar a força exercida por uma determinada massa. Recolhe-se sempre o mesmo volume de água e calcula-se o tempo (com auxílio de 1 cronómetro) que se demora a recolher esse volume, tendo como variáveis as massas a que se querem igualar a força e o formato da superfície onde a água exerce a força (diâmetro das agulhetas)

OBJECTIVO: estudar experimentalmente a força de impacto de jatos sobre o deflector cónico com base no princípio de conservação da quantidade de movimento.

-A instalação em circuito aberto pode ser utilizada para se mediar a força hidrodinâmica associada à variação da quantidade de movimento sofrida por um jacto de água em consequência de um deflector cónico de abertura conhecida

-O caudal é medido na banca experimental com auxílio de um regua graduada; -Os restantes valores retiramos por cálculo

EXPERIMENTAL: $Q = Vol/T(m^3/s)$

$$\text{Velocidade} = \frac{Q}{A'}$$

$$\dot{m} = \rho Q = \rho \cdot \text{Velocidade} \cdot \text{Area}$$

$$\text{Declive} = \frac{F_{exp}}{\text{Velocidade}^2}$$

$$\text{Equação de Bernoulli } P_e + \frac{1}{2} \rho V_e^2 + \rho g z_e = P_s + \frac{1}{2} \rho V_s^2 + \rho g z_s$$

$Z_s - Z_s \approx 0; P_s - P_e \approx 0; V_e \approx V_s$ e depois pelo Teorema de Transporte de Reynolds, deduzido para a Lei de conservação de movimento linear

$$\sum F_{ext} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho b dV + \int_{CV} \rho VV \cdot \hat{n} dA; \text{ Regime permanente, etc etc,}$$

$$-Mg + Rp = \rho(-V_e)V_e A_e + \rho V_s V_s \cos(120^\circ) A_s = \dot{m}(-V + V \cos(120^\circ)) = \dot{m}V(\cos(120^\circ) - 1); Rp = 0$$

$$\dot{m}_e = \dot{m}_s; \rho V_e A_e = \rho V_s A_s$$

TEÓRICA: $F_{teórica} = mg$

$$\text{Declive} = F_{teo}/\text{Velocidade}^2$$

$A = ba$
 $I_{xc} = \frac{1}{12} ba^3$
 $I_{yc} = \frac{1}{12} ab^3$
 $I_{xyc} = 0$

$A = \pi R^2$
 $I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$
 $I_{xyc} = 0$

$A = \frac{ab}{2}$
 $I_{xc} = \frac{ba^3}{72}(b-2d)$

Pressão Estática, de estagnação, dinâmica e Total

$A = \frac{\pi R^2}{4}$
 $I_{xc} = I_{yc} = 0.054888R^4$
 $I_{xyc} = -0.01647R^4$

$A = \frac{\pi R^2}{2}$
 $I_{xc} = 0.1098R^4$
 $I_{yc} = 0.3927R^4$
 $I_{xyc} = 0$

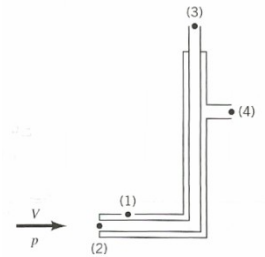
$V_1 = V$
 $V_2 = 0$

| | FLT System | MLT System |
|--------------------------|--------------|-----------------|
| Acceleration | LT^{-2} | LT^{-2} |
| Angle | $F^0L^0T^0$ | $M^0L^0T^0$ |
| Angular acceleration | T^{-2} | T^{-2} |
| Angular velocity | T^{-1} | T^{-1} |
| Area | L^2 | L^2 |
| Density | $FL^{-4}T^2$ | ML^{-3} |
| Energy | FL | ML^2T^{-2} |
| Force | F | MLT^{-2} |
| Frequency | T^{-1} | T^{-1} |
| Heat | FL | ML^2T^{-2} |
| Length | L | L |
| Mass | $FL^{-1}T^2$ | M |
| Modulus of elasticity | FL^{-2} | $ML^{-1}T^{-2}$ |
| Moment of a force | FL | ML^2T^{-2} |
| Moment of inertia (area) | L^4 | L^4 |
| Moment of inertia (mass) | FLT^2 | ML^2 |
| Momentum | FT | MLT^{-1} |

| | FLT System | MLT System |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| Power | FLT^{-1} | ML^2T^{-3} |
| Pressure | FL^{-2} | $ML^{-1}T^{-2}$ |
| Specific heat | $L^2T^{-2}\Theta^{-1}$ | $L^2T^{-2}\Theta^{-1}$ |
| Specific weight | FL^{-3} | $ML^{-2}T^{-2}$ |
| Strain | $F^0L^0T^0$ | $M^0L^0T^0$ |
| Stress | FL^{-2} | $ML^{-1}T^{-2}$ |
| Surface tension | FL^{-1} | MT^{-2} |
| Temperature | Θ | Θ |
| Time | T | T |
| Torque | FL | ML^2T^{-2} |
| Velocity | LT^{-1} | LT^{-1} |
| Viscosity (dynamic) | $FL^{-2}T$ | $ML^{-1}T^{-1}$ |
| Viscosity (kinematic) | L^2T^{-1} | L^2T^{-1} |
| Volume | L^3 | L^3 |
| Work | FL | ML^2T^{-2} |

Aplicando a equação de Bernoulli $p_2 = p_1 + 1/2\rho V_1^2$ e vemos que a pressão no ponto de estagnação é superior à pressão estática a pressão dinâmica $\frac{\rho V_1^2}{2}$

Tubo de Pitot



$$p_3 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$p_4 = p_1 = p$$

$$p_3 - p_4 = \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$V = \sqrt{2(p_3 - p_3)/\rho}$$

TABLE 7.1
Some Common Variables and Dimensionless Groups in Fluid Mechanics

Variables: Acceleration of gravity, g ; Bulk modulus, E_v ; Characteristic length, ℓ ; Density, ρ ; Frequency of oscillating flow, ω ; Pressure, p (or Δp); Speed of sound, c ; Surface tension, σ ; Velocity, V ; Viscosity, μ

| Dimensionless Groups | Name | Interpretation (Index of Force Ratio Indicated) | Types of Applications |
|--------------------------------|--------------------------------|--|--|
| $\frac{\rho V \ell}{\mu}$ | Reynolds number, Re | $\frac{\text{inertia force}}{\text{viscous force}}$ | Generally of importance in all types of fluid dynamics problems |
| $\frac{V}{\sqrt{g \ell}}$ | Froude number, Fr | $\frac{\text{inertia force}}{\text{gravitational force}}$ | Flow with a free surface |
| $\frac{p}{\rho V^2}$ | Euler number, Eu | $\frac{\text{pressure force}}{\text{inertia force}}$ | Problems in which pressure, or pressure differences, are of interest |
| $\frac{\rho V^2}{E_v}$ | Cauchy number, ^a Ca | $\frac{\text{inertia force}}{\text{compressibility force}}$ | Flows in which the compressibility of the fluid is important |
| $\frac{V}{c}$ | Mach number, ^a Ma | $\frac{\text{inertia force}}{\text{compressibility force}}$ | Flows in which the compressibility of the fluid is important |
| $\frac{\omega \ell}{V}$ | Strouhal number, St | $\frac{\text{inertia (local) force}}{\text{inertia (convective) force}}$ | Unsteady flow with a characteristic frequency of oscillation |
| $\frac{\rho V^2 \ell}{\sigma}$ | Weber number, We | $\frac{\text{inertia force}}{\text{surface tension force}}$ | Problems in which surface tension is important |

