



# Apontamentos de Mecânica dos Fluidos II

Escritos por André D. Ferreira  
em 2013

# Índice

Formulário .....	5
Escoamentos compressíveis .....	5
Escoamentos no interior de tubagens .....	5
Turbomáquinas .....	6
Escoamentos exteriores .....	6
Geral.....	7
Úteis.....	7
+dCap 3.8.1 – Efeitos da compressibilidade .....	9
+Cap. 11 – Escoamentos compressíveis .....	10
+d11.1 Relações .....	10
+d 11.2 Número de Mach.....	11
+-11.3 Categorias de escoamento compressível.....	11
+11.4 Escoamento isentrópico de um gás ideal .....	13
+d 11.4.1 Efeito da variação da área da secção .....	13
+-d 11.4.2 Escoamento isentrópico numa tubeira convergente-divergente.....	14
+11.4.3 Escoamento numa tubeira de secção uniforme.....	15
+Cap. 8 – Escoamento no interior de tubagens .....	16
+8.1 Características gerais do escoamento viscoso no interior de tubagens.....	16
+8.1.1 Regime laminar ou regime turbulento.....	16
+8.1.2 Região de entrada e escoamento completamente desenvolvido.....	17
+8.1.3 Distribuição da pressão e da tensão de corte.....	18
+8.2 Escoamento laminar completamente desenvolvido .....	20
+-8.2.1 Obtenção das equações fundamentais através do balanço de forças num elemento de fluido.....	20
+8.2.2 Obtenção das equações fundamentais através das equações de Navier-Stokes .....	21
+-8.2.3 Obtenção das equações fundamentais através da análise dimensional .....	21
+8.2.4 Obtenção das equações fundamentais através de considerações energéticas.....	21
+8.3 Escoamento turbulento completamente desenvolvido .....	22
+-8.3.2 Tensões de corte em regime turbulento.....	23
+-8.3.3 Perfil de velocidades em regime turbulento .....	24
+-8.3.4 Modelação de turbulência.....	25
+8.3.5 Caos e turbulência.....	25
+8.4 Análise dimensional do escoamento no interior de tubagens. Perda de carga em linha em condutas lisas de secção circular.....	25

+8.4.1 Perdas de carga em linha. Coeficiente de fricção de Darcy. Equação de Darcy-Weisbach. Diagrama de Moody. Efeito da rugosidade - escoamento hidraulicamente liso e escoamento rugoso. Equação de Colebrook. ....	26
+8.4.2 Perdas de carga localizadas. ....	28
+8.4.3 Conduitas não circulares. ....	30
8.5 Tipo de problemas de instalações e sistemas de bombagem. Escoamento no interior de sistemas de tubagens. ....	31
+8.5.1 (Apenas um tubo) ....	31
+8.5.2 Tubagens em série e tubagens em paralelo. ....	31
+8.6 Medição de caudal e velocidade num tubo. ....	32
+8.6.1 Medidores de caudal. Placa-orifício, bocal/tubeira, Venturi. Rotâmetro. ....	32
+8.6.2 Medidores de volume. ....	34
+Cap. 12 – Turbomáquinas ....	35
+12.1 Introdução ....	35
+12.2 Conservação de energia ....	35
-12.3 Conservação da quantidade de movimento angular. ....	37
+-12.4 Bomba centrífuga. Determinação da curva característica da máquina. Curva real e outros parâmetros de funcionamento. ....	37
+12.4.1 Considerações teóricas ....	37
-12.4.2 Características da performance da bomba ....	38
+12.4.3 Cavitação e NPSH. Curva característica de uma instalação. ....	39
+12.4.4 Compatibilização entre as características de uma instalação e de uma bomba. Associação de bombas. ....	39
-12.5 Análise dimensional e semelhança em turbomáquinas. ....	41
+12.5.1 Leis de escala. ....	41
+- 12.5.2 Velocidade específica ....	41
+12.5.3 Velocidade de sucção específica. Outros parâmetros. ....	42
-12.6 Bombas axiais e bombas mistas ....	42
+-12.7 Ventiladores ....	43
-12.8 Turbinas ....	43
-12.8.1 Turbinas de impulso ....	43
-12.8.2 Turbinas de reação. ....	43
+Cap. 9 – Escoamentos exteriores / sobre corpos imersos ....	43
++9.1 – Características gerais de escoamentos em torno de corpos ....	43
++9.1.1 Conceitos de sustentação e arrasto e respectivos coeficientes aerodinâmicos ....	44
+9.1.2 Escoamento separado, zona de recirculação, esteira, pontos de estagnação, separação e recolagem. ....	45
+9.2 Características da camada limite ....	46

-9.2.1 Camada limite sobre uma superfície plana. Espessura de deslocamento, espessura de quantidade de movimento e factor de forma. ....	46
+9.2.2 Equações de camada limite laminar em formulação diferencial. Análise dimensional das equações de camada limite bi-dimensional. Solução de Prandtl/Blasius. ....	47
-9.2.3 Soluções aproximadas da camada limite turbulenta. Formulação integral de camada limite. ....	47
-9.2.4 Transição de camada limite de regime laminar a turbulento. ....	48
+9.2.5 Camada limite turbulenta. ....	49
-9.2.6 Camada limite na presença de gradiente de pressão. ....	49
--9.2.7 Formulação integral de camada limite com gradiente de pressão ....	50
+9.3 Arrasto/Resistência aerodinâmica. Influência da forma do corpo e do número de Reynolds. ....	50
-9.3.1 Arrasto devido a forças viscosas. ....	51
-9.3.2 Arrasto devido a forças de pressão. ....	51
--9.3.3 Arrasto / resistência aerodinâmica do escoamento em torno de objectos bi e tri-dimensionais. ....	51
+9.4 Sustentação. Escoamento em torno de perfis alares. ....	54
9.4.1 Distribuição de pressão na superfície do corpo. ....	54
9.4.2 Conceito de circulação. ....	54
Bibliografia. ....	55

Escoamentos compressíveis

Para gases perfeitos:

$p_i = \rho_i RT_i$ $Ma_i = \frac{v_i}{c_i}$ $c_i = (kRT_i)^{0.5}$	$R = c_p - c_v$ $R = R_{gás} = \frac{R_{univ}}{M}$ $k = \frac{c_p}{c_v}$	$s_2 - s_1 = \begin{cases} c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} \\ c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} \end{cases}$	$\dot{m} = \frac{p_i Ma_i (kRT_i)^{0.5} A_i}{RT_i}$ $\Delta h \text{ ou } u = c_{p \text{ ou } v} (\Delta T)$
--	--	--	---

Para escoamentos adiabáticos de gases perfeitos:

$c_p T_i + \frac{v_i^2}{2} = c_p T_0 \quad \leftarrow \text{vem da 1ª LTMD}$ $h \quad h_0$	$\frac{T_i}{T_0} = \frac{1}{1 + \left[ \frac{k-1}{2} \right] Ma_i^2}$	$\dot{m} = \rho A v = \frac{p_i A_i Ma_i (kRT_i)^{\frac{1}{2}}}{RT_i}$
--	---	--

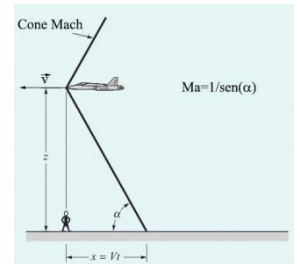
Para escoamentos isentrópicos verifica-se:

$\frac{p_i}{p_0} = \left( \frac{T_i}{T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^k$	$p_i v_i^k = cte$ (vol. específico) $\frac{p_i}{\rho_i^k} = cte$	$(\dots)_0 = cte$ <i>(em qualquer secção as propriedades de estagnação não se alteram)</i>	$p_0 = (p_{dinâmica})_i + (p_{estática})_i$ $p_0 = \left( \frac{\rho v^2}{2} \right)_i + p_i$	<b>Para não isentrópicos:</b> $\frac{p_i}{p_{0i}} = \left( \frac{\rho_i}{\rho_{0i}} \right)^k = \left( \frac{T_i}{T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}}$
---	---	---	---	--

(...)<sub>0</sub> → propriedade de estagnação (v. = nula)

11(...)\* → propriedade crítica (Ma=1, ou v = c) (se a propriedade for crítica, substituir o i pelo \*)

(...)<sub>i</sub> → propriedade numa determinada secção i



<b>Rádios críticos (substituindo Ma = 1):</b> $\frac{p^*}{p_0} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$ $\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1}$ $\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}$	<b>Relaciona área crítica, com área e nº de Mach numa secção</b> $\frac{A_i}{A^*} = \frac{1}{Ma_i} \cdot \left( \frac{1 + \left[ \frac{k-1}{2} \right] Ma_i^2}{1 + \frac{k-1}{2}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$
--	--

\* Se num escoamento as propriedades de estagnação não se mantiverem constantes de um local para outro não é escoamento isentrópico.

\* Todas as pressões aqui são as pressões estáticas, exceto as de estagnação.

Escoamentos no interior de tubagens

Comprimento de entrada

$$\begin{cases} \text{esc. laminar} \rightarrow \frac{l_e}{D} = 0.06 Re \\ \text{esc. turbulento} \rightarrow \frac{l_e}{D} = 4.4 Re^{1/6} \end{cases}$$

Qeda. de pressão, τ, v

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{2}{r} \left( -\mu \frac{du}{dr} \right) \quad \left| \quad \Delta p = \frac{4l\tau_w}{D}, \text{ se laminar} \rightarrow \bar{u} = \frac{D\tau}{8} \right.$$

$$u = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad \left| \quad \dot{V} = \int u dA = \int_0^{R} \int_0^{2\pi} u(r)r dr d\theta = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu l} = u_{m\acute{a}x} \frac{\pi R^2}{2} \right.$$

Perfis de velocidades para escoamentos turbulentos

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{yu^*}{v} \quad \text{válido para} \quad 0 \leq \frac{yu^*}{v} \leq 5$$

$$\frac{V_c - \bar{u}}{u^*} = 2.55 \log \left( \frac{R}{y} \right) \quad \text{para} \quad \frac{yu^*}{v} \geq 1000$$

$$u^* = \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \tau_w = \frac{f \rho \bar{u}^2}{8} \quad \left| \quad \frac{\bar{u}}{V_c} = \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{7}} \right.$$

Caudal e velocidade média

$$\dot{V} = Av = \int \bar{u} dA$$

Equação da energia

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + gh_L$$

$$gh = \dot{w} \quad , \quad \dot{w} = \frac{\dot{W}}{\rho \dot{V}} \quad , \quad h = \frac{\dot{W}}{\rho \dot{V} g}$$

Perdas em linha

Para escoamento completamente desenvolvido regime permanente e incompressível

$$h_{L_{major}} = f \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g}$$

# Formulário

$$f \rightarrow \begin{cases} \text{esc. laminar} \rightarrow f = \frac{64}{Re} \\ \text{esc. turbulento} \rightarrow \begin{cases} f^{-0.5} = -1.8 \log \left( \left( \frac{\epsilon}{3.7D} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re} \right) \\ \text{para tubos lisos} \rightarrow f = \frac{0.316}{Re^{0.25}} \end{cases} \end{cases}$$

## Perdas locais

$$h_L = K_L \frac{v^2}{2g}$$

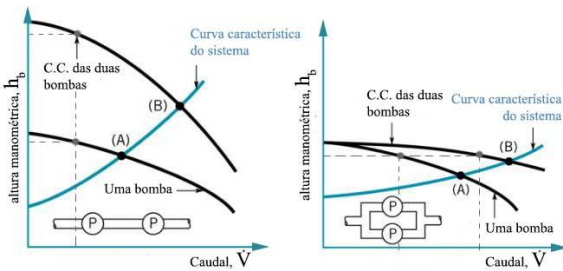
## Turbomáquinas

### Potência

$$\begin{cases} \dot{W} = \dot{V} \cdot \Delta p \\ \dot{W} = M t \cdot \omega \end{cases}$$

### NPSH

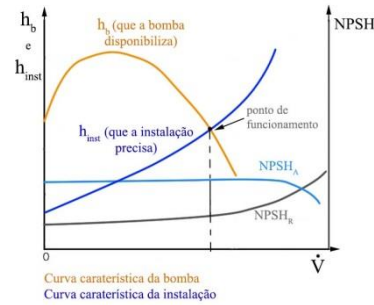
$NPSH_A$  (instalação: calculado) >  $NPSH_R$  (bomba: gráfico, dado em forma de equação)



$$NPSH_A = \frac{p_e - p_v}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g}$$

### Medidores de caudal

Placa orifício e tubo de Venturi  $\rightarrow \dot{V} = C_d \beta^2 A \left( \frac{2\Delta p}{\rho(1-\beta^4)} \right)^{0.5}$



## Escoamentos exteriores

### Forças de arrasto e sustentação e respetivos coeficientes:

$$F_{L \text{ ou } D} = \frac{\rho_{\text{fluido}} v_{\text{relativa}}^2}{2} C_{L \text{ ou } D} A_{\text{ref}}$$

$$\tau_{L \text{ ou } D} = \frac{\rho v^2}{2} C_{L \text{ ou } D}$$

$$I = \rho_{\text{fluido}} V_{\text{corpo}} g$$

### Placas planas:

$$C_D \rightarrow \begin{cases} \text{esc. laminar} \rightarrow C_D = \frac{1.3285}{Re_L^{0.5}} \\ \text{esc. turbulento} \rightarrow C_D = \frac{0.455}{(\log Re_L)^{2.58}} - \frac{1700}{Re_L} \end{cases}$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Transição  $\rightarrow \begin{cases} \text{esc. interiores} \rightarrow Re_t \approx 2100 \\ \text{esc. exteriores} \rightarrow Re_t \approx 5 \cdot 10^5 \end{cases}$

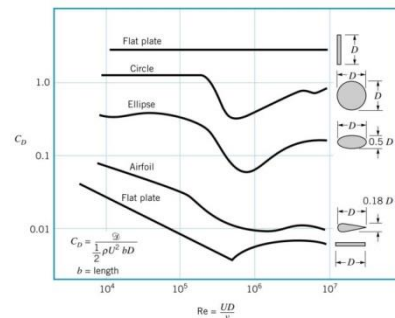
$$\text{esc. laminar} \rightarrow \begin{cases} \delta = \frac{5x}{Re_x^{0.5}} \\ \tau = 0.332 \rho v^2 Re_x^{-0.5} \\ \delta^* = 1.721 Re_x^{-0.5} \end{cases}$$

$$D_h = \frac{4A}{P}$$

$$\text{esc. turbulento} \rightarrow \begin{cases} \delta = \frac{0.370x}{Re_x^{1/5}} \\ \tau = 0.0288 \rho v^2 Re_x^{-0.2} \\ \delta^* = \frac{\delta}{8} \end{cases}$$

$$h = \frac{\Delta p}{\gamma}$$

### Outros:



## Geral

Em cada capítulo e subcapítulo antes do nome tem um sinal:

+ : Todos os pontos importantes que estão no Munson estão aqui. Não é preciso ir lê-lo.

+ - : Tem alguma parte do que está no Munson ou não entendi bem algumas coisas e por isso o resumo não ficou claro, convém dar uma olhada ao Munson pelo menos.

d : Tem no Munson demonstrações matemáticas que não pus aqui.

- : Parte incompleta, ir ler ao Munson.

## Úteis

$1\text{kgf} = 9,8\text{N}$	$1\text{rpm} = \frac{\pi}{30}\text{rad/s}$	$\nu_{\text{água}} \approx 10^{-6} [\text{m}^2/\text{s}]$ $\mu_{\text{água}} \approx 10^3 [\text{kg/ms}]$	$\gamma = \rho \cdot g$  peso específico	$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ Visc. dinâmica/absol. Viscosidade cinemática
$1\text{bar} = 10^5\text{Pa}$	$W = M_t \times \theta$ $W = F \times d$ $\dot{W} = F \cdot v$	$1\text{CV} = 735.5\text{W}$		$p_{\text{estagnação}} = p_{\text{dinâmica}} + p_{\text{estática}}$ $= \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh$

Para um determinado gás, o calor específico só depende da sua  $T^a$ . A viscosidade dinâmica e a massa específica também variam com a  $T^a$ .

Para entender as três pressões, imaginar um corredor onde passam muitas pessoas:

- Uma pessoa que acompanhe o “escoamento” sente a pressão (estática) das outras pessoas que andam com ela a apertarem-se contra ela.
- A pressão dinâmica é a pressão da energia cinética, uma espécie de quantidade de movimento das pessoas.
- A pressão de estagnação é a pressão que alguém que esteja parado no meio do corredor sente quando as pessoas que estão a andar embatem nela. Ou então, se de repente se fechassem as portas, as pessoas que parassem primeiro, iam sentir a pressão de estagnação, quando a energia cinética das pessoas a andar se converte em energia de pressão e a pressão estática passa a ser igual à de estagnação.

Se tivermos um avião a andar a 10 000m de altitude, a pressão estática do escoamento (tanto faz considerar o avião a andar e o fluido parado ou o contrário) será a pressão atmosférica a essa altitude.

Para não confundir as duas viscosidades:

- Dito de uma maneira simples, a cinemática trata do movimento das coisas ( $v$ ), a dinâmica trata da quantidade de movimento das coisas ( $m \cdot v$ ). Ora

$$v\rho = \frac{vm}{v} = \mu$$

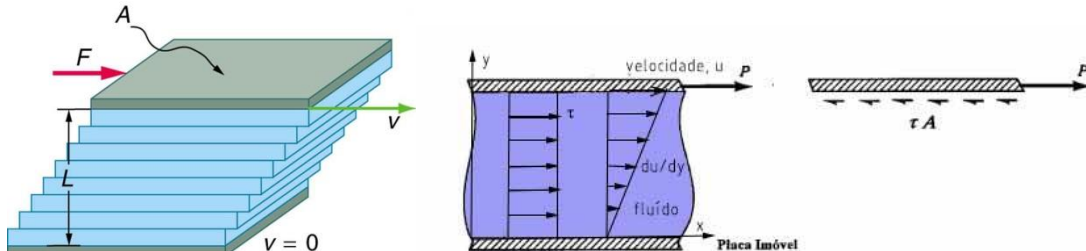
aqui temos a viscosidade cinemática a multiplicar pela massa, dando a dinâmica.

Para lembrar e não esquecer a relação entre  $\tau$  e a viscosidade.

Lembrando a lei de Newton da viscosidade

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Se tivermos um fluido muito viscoso como o mel, para pormos uma placa em cima a andar com uma velocidade, é preciso aplicar mais força do que a um fluido menos viscoso como a água. Quanto maior a viscosidade, mais se “agarram” umas às outras as partículas de fluidos, ou podemos pensar em lâminas, no caso de escoamento laminar. Num fluido muito viscoso as partículas são como areia com cola. Num fluido invíscido são como pedras de gelo em óleo.



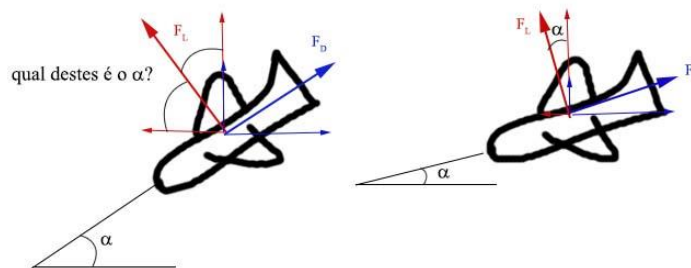
Uma implicação disto é que se a viscosidade for nula, não há tensões de corte, e a placa deslizaria livremente como se estivesse sobre gelo, ou no caso de escoamentos no interior de tubos, não há perdas de pressão / perda de carga devido à fricção ( $h_{\text{fricção}} = 0$ ) (o agarrar) do fluido com a parede.

**Mach**

O número de Mach de um corpo em movimento não é mais do que a percentagem (sem multiplicar por 100) da velocidade do som a que o objeto se desloca.

**Saber rapidamente qual o ângulo das componentes de uma força**

Imaginar tudo a rodar até que um dos ângulos seja pequeno e facilmente identificável.



## +dCap 3.8.1 – Efeitos da compressibilidade

Para líquidos é geralmente aceitável o assumir-se o fluido como incompressível, para gases essa suposição trás um grande erro. Para um mesmo fluido, ( $c = cte$ ) ao aumentar o nº de Mach, aumenta o erro ao calcular pressão de estagnação, erro esse vindo da variação do ró na pressão dinâmica.

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z = cte$$

Se o valor da densidade real for 10 [kg/m³] e o calculado for 1

$$10 \cdot 5^2 = 250$$

$$1 \cdot 5^2 = 25$$

Diferença: 225

$$10 \cdot 10^2 = 1000$$

$$1 \cdot 10^2 = 100$$

Diferença: 900 (=225\*4)

A velocidade duplicou, o erro quaduplicou

Como  $\rho$  é muito pequeno (gases) este termo  $\approx 0$

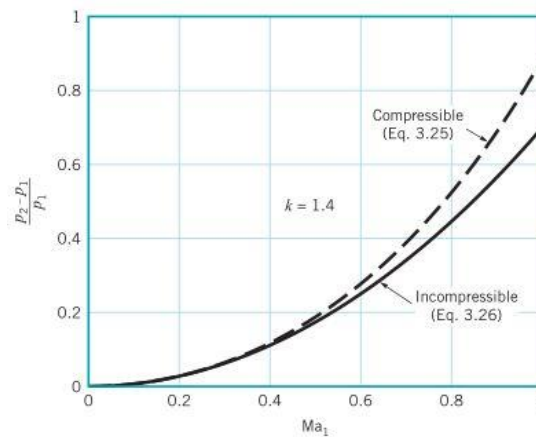


Fig. 1 – Rácio de pressão para diferentes números de Mach. Por manipulação algébrica, pode-se comparar os resultados entre as eqs. Bernoulli para escoamentos compressíveis e incompressíveis. A partir de cerca de Mach 0.3 a compressibilidade começa a ter tal importância qe se geram erros grandes se não forem tidos em conta.

Conservation of Momentum:  $\rho V dV = - dp$

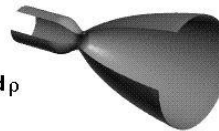
Isentropic Flow:  $\frac{dp}{\rho} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$

$$dp = \gamma \frac{\rho}{\rho} d\rho = \gamma R T d\rho$$

$$dp = a^2 d\rho$$

Combine with Momentum:  $\rho V dV = - a^2 d\rho$

$$-M^2 \frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho}$$



For subsonic flow ( $M < 1$ ), density is relatively constant

For transonic flow ( $M \sim 1$ ), density change is nearly equal to velocity change

For supersonic flow ( $M > 1$ ), density changes faster than the velocity by a factor of  $M^2$

Fig. 2 – Aumento dos efeitos de compressibilidade com o nº de Mach. Retirado do site da Nasa.

**Para escoamentos compressíveis podemos aplicar 2 condições simples e que nos permitirão o estudo de escoamentos de gases reais:**

a) escoamento isotérmico ( $T^a$  cte):  $p = \rho RT$ . Substituindo na forma integral da eq. de Bernoulli obtém-se uma versão semelhante a esta. A aplicação desta condição apenas é restrita porque a imposição de escoamento invíscido mantém-se e nos escoamentos isotérmicos os efeitos viscosos não devem ser desprezados.

b) escoamento isentrópico (entropia cte, reversível (s/ fricção) e adiabático (s/ transferência de calor)): usando a relação  $\frac{p}{\rho^k} = cte$  na equação de Bernoulli na forma integral obtemos uma nova expressão que difere da de Bernoulli nos termos da pressão e na densidade. Para um escoamento a baixa velocidade ( $Ma < 0.3$ ) essa expressão dará igual à equação de Bernoulli já conhecida para escoamentos incompressíveis.

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2$$

ou

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \left[ \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}} - 1 \right]$$

colocando na forma adimensional e sabendo que índice 2 representa a condição de estagnação e índice 1 a condição a montante.

Este último tipo de escoamentos (isentrópicos) assemelha-se a muitas situações reais e é aquele em que se vai basear o estudo dos escoamentos compressíveis.

## **+Cap. 11 – Escoamentos compressíveis**

Começamos por estudar fluidos incompressíveis porque há muitos que o podem ser considerado sem grande erro, e porque nos permitem uma primeira abordagem mais simples do estudo, servindo as ferramentas aprendidas de pilar para o estudo dos escoamentos compressíveis.

Neste capítulo, por simplicidade, apenas se vão considerar escoamentos unidimensionais, em regime permanente, de viscosidade constante, de gases ideais e a alta velocidade. Podemos usar a aproximação de gás ideal porque simplifica bastante o estudo e é uma boa aproximação da realidade.

### **+d11.1 Relações**

$$R = R_{gas} = c_p + c_v = \frac{R_{univ}}{M_{gas}}$$

$c_p$  – é o maior dos dois calores específicos porque tem de incluir a energia que vai para a dilatação (como trabalho)

$$\Delta u = c_v \Delta T \quad e \quad \Delta h = c_p \Delta T$$

$$h = u + \frac{p}{\rho} \quad (E_{\text{interna}} + E_{\text{pressão}}) \rightarrow \text{combinada com } p = \rho RT \rightarrow h = u + RT$$

outra maneira de entender a entalpia – entalpia de formação é a energia interna mais o trabalho que é necessário realizar para “abrir espaço”

Apesar de  $c_p$  e  $c_v$  variarem com a  $T^a$ , vamos assumir que são ctes para variações moderadas da  $T^a$ .

### +d 11.2 Número de Mach

Som: pulsos de pressão que se movem num meio / onda de pressão que se move num meio à velocidade do som ( $c$ ). Se um grupo de gunas resolverem empurrar as pessoas que estão a passar num corredor. Quanto mais pessoas houver (mais próximas umas das outras) mais rapidamente as pessoas vão cair umas em cima das outras (maior  $c$ ). Essa onda das pessoas a cair, e depois a levantarem-se pela mesma ordem que caíram, são pulsos de pressão. A verdade é que a velocidade do som aumenta com a densidade... (exceto em gases perfeitos).

Aplicando o princípio da conservação de massa/continuidade e quantidade de movimento a um pulso de pressão que se move através de um volume de controlo e considerando o escoamento isentrópico ou da energia + continuidade chegamos à expressão para velocidade do som (o  $s$  em índice significa que a diferenciação é para entropia constante). Assim, como a entropia é constante, pode-se integrar resultando na expressão conhecida (a última).

$$c = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^{0.5} \rightarrow \text{com } p = cte \rho^k \rightarrow c = (kRT)^{0.5}$$

Por outro lado, (fórmula talvez mais intuitiva)  $c = \left( \frac{K}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$  onde  $K$  é o “Bulk modulus” ou resistência à compressão uniforme, que no caso de um gás perfeito é  $p \cdot k$ .

### +11.3 Categorias de escoamento compressível

Tal como a compressibilidade tem influência na pressão de estagnação, também pode ter noutras variáveis importantes, como no coeficiente de arrasto ( $C_D$ ). Na verdade, para números altos de Mach, o  $C_D$  já deixa de ser influenciado pelo nº de Reynolds, tal é a importância dos efeitos de compressibilidade.

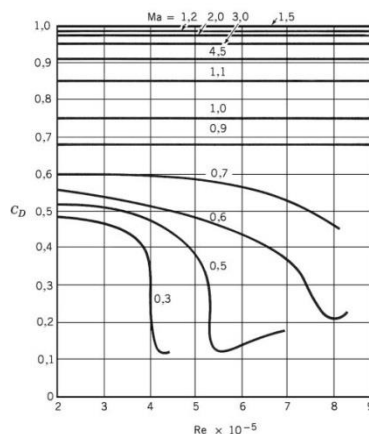


Fig. 3 - Efeito dos nºs de Mach e de Reynolds no coeficiente de arrasto de uma esfera.

Imaginar um carro dos bombeiros com a sirene ligada. Se ele estiver parado, o carro está sempre centrado com as esferas dos pulsos de som emitidos pela sirene. À medida qe ele começa a andar mais rápido, a sirene emite o som, mas o carro cada vez fica mais perto da frente das esferas de som. Quando andar suficientemente rápido e coincidir com elas, está à velocidade do som. Se viesse um comboio à velocidade do som na direção de uma pessoa e ela estivesse no meio da linha... ela só o ia ouvir no momento em qe estava a ser atropelada...

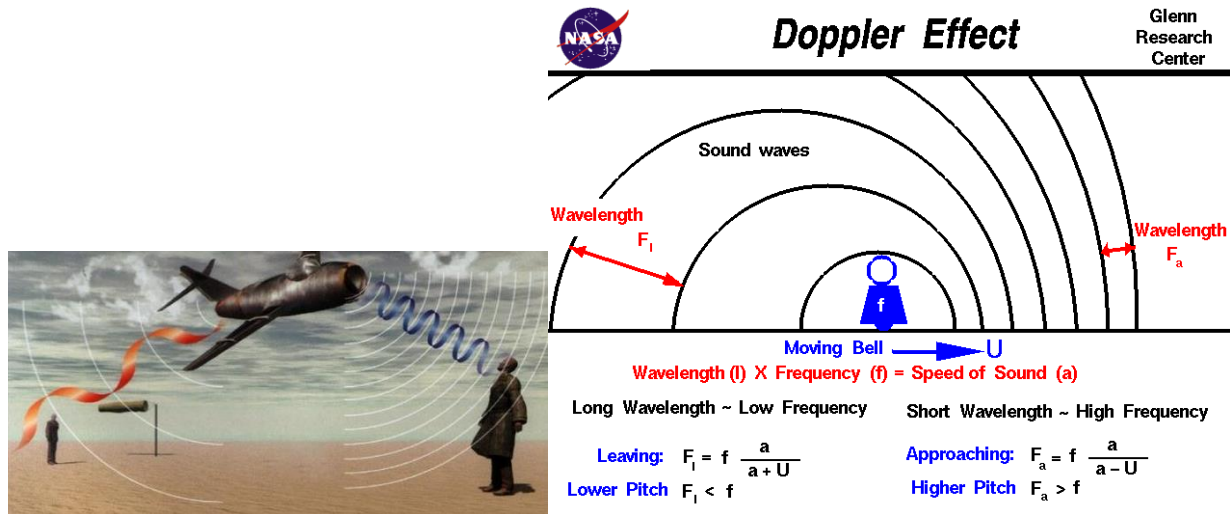


Fig. 4 - Efeito da velocidade na proximidade dos pulsos de som emitidos por um objeto e o efeito doppler.

- **Ma<1**: subsónico e as ondas de pressão encontram-se descentradas em relação ao ponto de emissão.
- **Ma=1**: sónico, **onda Mach**, local onde todas as ondas de pressão são tangentes.
- **Ma>1**: supersónico, não há ondas de pressão à frente da onda emitida e forma-se um cone de Mach tangente às ondas de pressão.

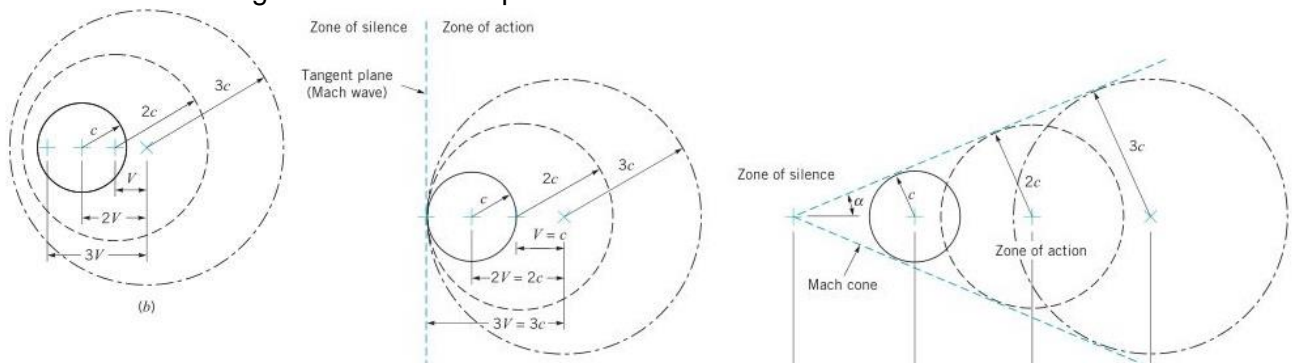


Fig. 5 - Ondas de pressão a diferentes velocidades

Para escoamentos realmente incompressíveis a velocidade do som seria infinita, porque a comunicação dos pulsos de pressão era instantânea.



Fig. 6 – À esq. o pulso de pressão passa quase instantâneamente - "escoamento" incompressível. À d<sup>a</sup> "escoamento" compressível. As bolas (partículas de fluido) têm bastante espaço entre elas (como nos gases).

Tanto no plano tangente à onda Mach como no cone de Mach há uma variação muito grande de pressão. O fluido está quieto e de repente leva com um objeto a mover-se muito rápido, o ar comprime-se muito nessa zona e portanto a pressão aumenta. Relativamente ao cone de Mach

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{c}{v}$$

## +11.4 Escoamento isentrópico de um gás ideal

Escoamentos isentrópicos não acontecem na realidade devido à existência de fricção, mas ajudam a entender os fenómenos a estudar. Considera-se aqui que o perfil de velocidades numa dada secção é uniforme.

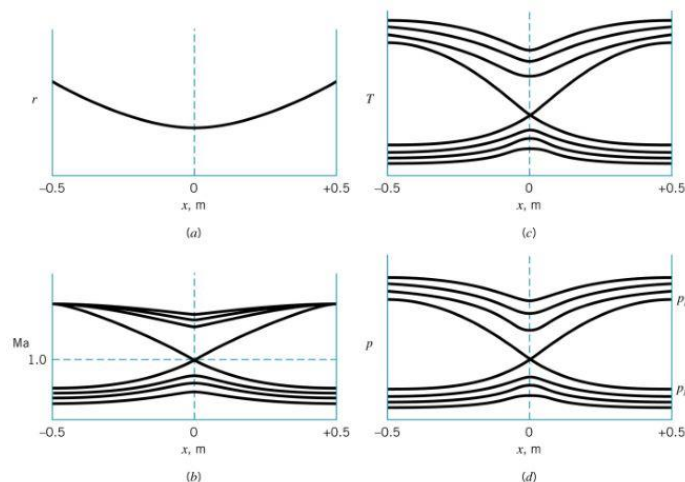
### +d 11.4.1 Efeito da variação da área da secção

Ao juntar as equações  $\dot{m} = \rho Av = cte$  (princípio da conservação da massa),  $Ma = \frac{c}{v}$  e a equação de Bernoulli na forma diferencial, tendo em conta que  $\rho$  agora é variável (condição de compressibilidade), chega-se a

$$\frac{dA}{dv} = -\frac{A}{v}(1 - Ma^2) \quad \text{e} \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dA}{A} \frac{Ma^2}{(1 - Ma^2)}$$

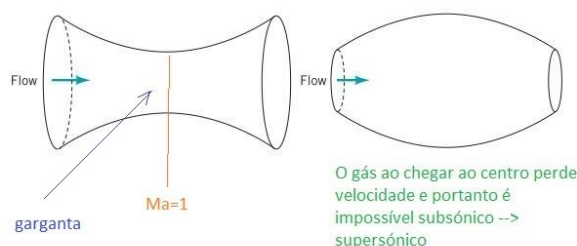
de onde se conclui que

- quando  $Ma = 1$ ,  $\frac{dA}{dv} = 0$  e portanto a velocidade sónica só pode ser atingida numa secção de área mínima ou máxima. No entanto se for de secção máxima o escoamento não passa de subsónico → supersónico ou vice-versa (ver imagem em baixo) e portanto para um caudal constante só é possível atingir a velocidade sónica numa área de secção mínima, à qual se chama de **garganta**. Então mesmo que a conduta afunilasse ridiculamente e com elevadíssima diferença de pressão, só no final, no ponto mais estreito, é que o escoamento andava à velocidade do som.
- Até  $Ma = 1$ , o 2º membro da 2ª equação é positivo, e a densidade varia com a área da secção. Depois de  $Ma = 1$ , é o contrário. *Ou seja, num tubo convergente divergente, onde na garganta  $Ma = 1$ , a densidade está sempre a diminuir. O mesmo se passa para a temperatura e para a pressão.*



**Fig. 7 - Variação do número de Mach e do raio, e a sua influência na variação da pressão e temperatura ao longo de um tubo.**

Um tubo convergente-divergente pode servir então para passar um escoamento de subsónico a supersónico e vice-versa.



**Fig. 8 - Passagem do escoamento subsónico a sónico só se pode dar num tubo convergente-divergente.**

**+d 11.4.2 Escoamento isentrópico numa tubeira convergente-divergente.**

Como é que as outras propriedades para além da densidade e velocidade variam num escoamento regime permanente isentrópico de um gás ideal num tubo de secção variável?

É útil saber as propriedades do gás no estado de estagnação para as usar como referência nos cálculos para o gás noutros estados. As propriedades de estagnação são as propriedades que tem um fluido parado, ou um fluido em movimento se fosse parado isentropicamente. A medição da pressão difere se o fluido estiver parado ou em movimento. Para um fluido parado medem-se normalmente (tomadas de pressão estáticas), para um fluido em movimento por meio de tubos de Pitot (tira-se a estagnação) e variando a secção do tubo onde o fluido passa (tira-se a velocidade).

Notação:

Estado de estagnação  $(...)_0$  ,  $Ma = 0$  porque  $v = 0$

Estado crítico  $(...)^*$  ,  $Ma = 1$  porque  $v = c$

**Escoamento estrangulado** ocorre quando o caudal mássico não aumenta mais com a diminuição da pressão a jusante, para a mesma pressão a montante.

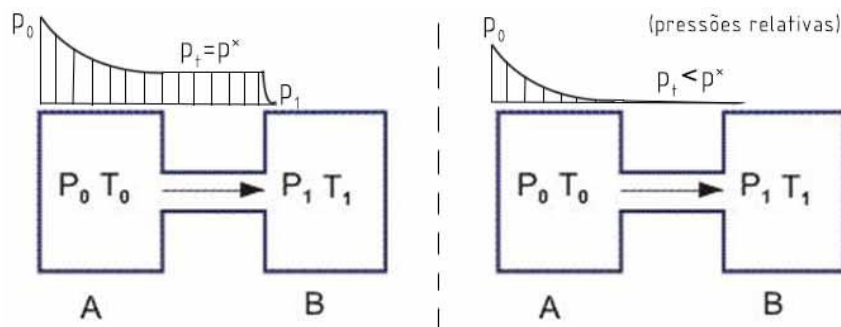


Fig. 9 - variação da pressão num escoamento subsónico e sónico estrangulado.

Ao diminuir  $p_1$ , o caudal aumenta até que a velocidade do gás na garganta seja sónica. A partir daí pode-se continuar a diminuir  $p_1$  que o caudal não aumenta mais, porque está limitado pela velocidade máxima que é a sónica  $\dot{m} = \rho Av$ . Então, existe um caudal máximo de gás que é possível escoar por um determinado tubo. Continuando a descer  $p_1$ , a pressão na garganta continua a ser  $p^*$ , o que significa que começa a haver uma queda brusca de pressão da garganta para o reservatório recetor.

Notar que há medida que nos aproximamos de  $Ma = 1$  também a densidade no tubo diminui (ver cap. anterior) e por isso o caudal volumétrico  $\dot{V}$  diminui.

Também podemos ter escoamento estrangulado por v. supersónicas ao desacelerar um fluido.

Daqui se define os rácios de pressão crítica, de  $T^a$  crítica e de densidade crítica que são essas propriedades no estado crítico ( $Ma=1$ ) a dividir pelas respetivas de estagnação (multiplicado por 100 dá valor percentual). Por exemplo se o RPC for 0.64, significa a 64% da pressão de estagnação se atinge a pressão crítica e é possível atingir escoamento sónico.

#### +11.4.3 Escoamento numa tubeira de secção uniforme.

$$\frac{dA}{dV} = -\frac{A}{V} (1 - Ma^2)$$

Se área for constante,  $dV = 0$  ou  $v =$  constante. Então, pela equação da energia, como a velocidade é constante, também o é a entalpia e portanto também a temperatura.

Como

$$c = (kRT)^{0.5} \text{ e } Ma = \frac{v}{c}$$

Também  $Ma$  é constante.

Então, *a menos que haja variação da secção, as propriedades do gás, nas condições isentrópicas, manter-se-ão constantes*, o que faz sentido visto que, estando a ignorar a fricção e a dizer que não há transferências de calor entre o fluido e o exterior (definição de escoamento isentrópico) não há razão para o fluido variar o que quer que seja.

## +Cap. 8 – Escoamento no interior de tubagens

### +8.1 Características gerais do escoamento viscoso no interior de tubagens.

Neste capítulo vai ser assumido que o tubo se encontra completamente cheio do fluido e que, a menos que seja dito algo em contrário, é de secção circular. Se o tubo não se encontrar completamente cheio a única força motriz possível para o movimento do fluido é a gravidade?

#### +8.1.1 Regime laminar ou regime turbulento.

O escoamento num canal pode ser laminar, turbulento ou de transição. Qual deles é depende do nº de Reynolds para o escoamento e de como o nº de Reynold é definido. Num escoamento à volta de uma esfera  $Re_D = \frac{\rho v D}{\mu}$  onde o D é o diâmetro da esfera, num tubo, o D é o diâmetro do tubo, mas se for sobre uma placa plana é  $Re_x = \frac{\rho v x}{\mu}$  onde x é a distância do bordo de ataque ao local a determinar o nº de Reynolds. Os valores seguintes são para os casos tratados nas aulas e engenharia geral, pois é possível que variem muito... (é possível ter escoamento laminar a  $Re=40000$  por exemplo). Ao abrir uma torneira e deixar a água a correr é possível ver todos os tipos de escoamento.



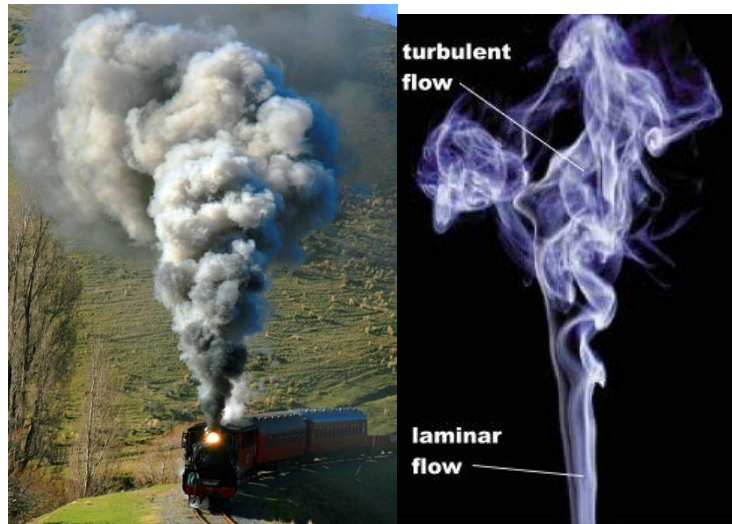
Fig. 10 - abrindo a torneira o suficiente (isto é, aumentando a velocidade da água e portanto  $Re$ ) o escoamento de água laminar (esq.) pode passar a turbulento (dª.)

#### *Laminar – $Re < 2100$ (para escoamentos dentro de tubos)*

Caracteriza-se por só haver uma componente da velocidade (axial,  $u$ ). O fluido comporta-se como lâminas de fluido a deslizarem umas sobre as outras.

#### *Turbulento – $Re > 4000$ (para escoamentos dentro de tubos)*

A velocidade tem várias componentes, havendo uma principal (axial,  $u$ ) sendo relativamente aleatória/irregular.



**Fig. 11 – O fumo entra em escoamento turbulento muito facilmente e essa passagem e turbulência são bastante bem visíveis.**

Os fluidos comuns (água, óleo, gasolina,...) entram facilmente em escoamento turbulento, porque têm baixa  $\mu \rightarrow$  elevado  $Re$ . Por exemplo, para encher um copo de água a  $10^\circ\text{C}$  com escoamento laminar ( $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu=1.3 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}$ ), a partir de uma torneira com 1cm de diâmetro, demora 9.3s. Menos que isso e o escoamento a sair da torneira já é turbulento/transição (já agora, a  $60^\circ\text{C}$  ( $\rho=983 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu=4.66 \cdot 10^{-4} \text{ kg/ms}$ ) demora 26s). Para  $Re=2100$  (usado no caso anterior), mas para encher o copo de mel a velocidade teria de ser 3000 vezes maior, já que a viscosidade cinemática é 3000 vezes maior que a da água.

### **+8.1.2 Região de entrada e escoamento completamente desenvolvido.**

**Região de entrada:** zona depois da entrada onde o perfil de velocidades vai variando com o comprimento. O fluido entra com um perfil de velocidade +/- uniforme. Então, os efeitos viscosos e a condição de não escorregamento com a parede fazem com que na parede não haja velocidade relativa fluido-parede: o fluido em contacto com a parede está “agarrado” a ela, não se move, e puxa o fluido que está imediatamente ao lado, como um colega que tenta não deixar o outro passar à frente. Se o escoamento for laminar este arrastamento são as camadas de fluido (lâminas) que se arrastam umas às outras, se for turbulento é um arrastamento mais partícula a partícula. Forma-se então uma **camada limite** que separa o **núcleo invíscido** (só de nome) onde esses efeitos ainda não se fizeram sentir (desprezáveis) do fluido mais junto à parede. À medida que se vai avançando no tubo, depois da entrada, as partículas que já foram arrastadas por outras começam a ser mais, sendo que as últimas a sentir esses efeitos são as do centro, e que por isso têm maior velocidade.

**Comprimento da região de entrada:**  $l_e$ . Depois deste comprimento, o perfil de velocidades já não varia com a distância axial (a menos que haja alguma curva, T, válvula, ou outro componente que o altere) e aí temos o que se chama de **escoamento completamente desenvolvido**. Quanto maior a viscosidade, mais as partículas se agarram umas às outras (maiores  $\tau$ ) e portanto mais rapidamente as partículas do centro são afetadas pelo facto de as que estão junto à parede estarem paradas. Daí que para fluidos pouco viscosos o  $l_e$  seja maior do que para os muito viscosos. Uma razão semelhante se aplica entre os fluidos com  $Re$  baixo e alto. Com  $Re$  alto (escoamento turbulento) para além das  $\tau$  laminares, existem as turbulentas, então pela mesma lógica mais pequeno é o comprimento da região de entrada.

Comprimento de entrada:  $\frac{l_e}{D}$

Esc. laminar

$$\frac{l_e}{D} = 0.06Re$$

Esc. turbulento

$$\frac{l_e}{D} = 4.4(Re)^{\frac{1}{6}}$$

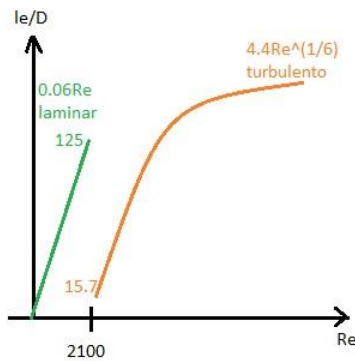


Fig. 12 - Variação do comprimento de entrada com o número de Reynolds.

Para aplicações práticas de engenharia,  $10^4 < Re < 10^5$  e portanto o comprimento da região de entrada é de 20 a 30 vezes o diâmetro do tubo. Escoamentos completamente desenvolvidos são mais simples de estudar porque o perfil de velocidades só é função da distância da parede ao eixo do tubo.

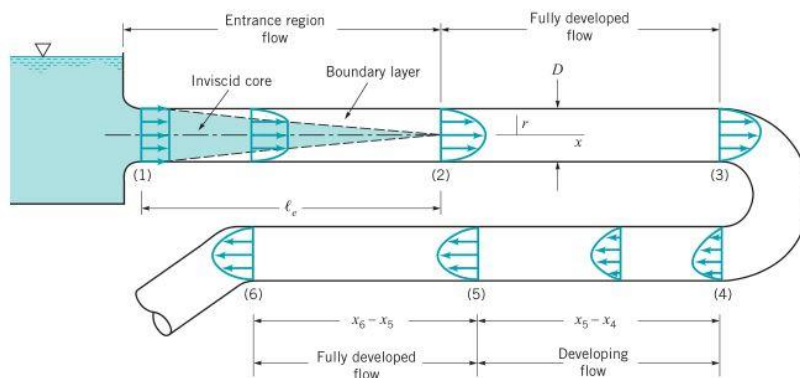


Fig. 13 - Variação do perfil de velocidades ao longo de um tubo, a importância da viscosidade, e de uma curvatura no tubo.

### +8.1.3 Distribuição da pressão e da tensão de corte.

Aquilo que pode fazer mover um fluido num tubo pode ser gravidade ou uma diferença de pressão entre a entrada e a saída. Num tubo horizontal só pode ser a diferença de pressão. Para um fluido de mover de Loulé para Quarteira, a pressão do fluido do lado de Loulé tem de ser maior que a do lado de Quarteira, ou seja, a pressão é maior na zona de entrada que na de saída.

Esse  $\Delta p$  que é necessário toma a forma de um gradiente de pressão  $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$  no sentido do escoamento, resultado da necessidade de vencer as tensões de corte provocadas pela viscosidade do fluido e o ele agarrar-se à parede do tubo (condição de não escorregamento). Se quisermos que o fluido se mova a velocidade constante ( $\sum F = m \frac{dv}{dt} = 0$ ).

Este gradiente de pressões é maior na região de entrada. Como o fluido junto às paredes se atrasa, então no meio tem de acelerar para compensar e o caudal se manter o mesmo. Só que para isso é dispendida energia que vem da pressão do fluido. A certa altura toma um valor constante que irá permanecer em toda a zona onde o escoamento é completamente desenvolvido.

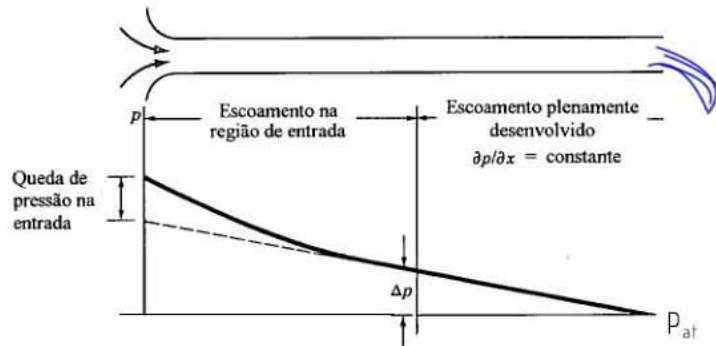


Fig. 14 - Variação do gradiente de pressão ao longo de um tubo.

Para além de pensarmos em termos de forças podemos pensar em termos de energia. Portanto o trabalho realizado pela força de pressão tem de ser igual à energia dissipada por efeitos viscosos.

Tanto as tensões de corte turbulentas como as laminares são resultantes da transferência de quantidade de movimento entre partículas, sendo o 1º um fenómeno macroscópico (como que lamina / camadas de fluido a arrastarem-se umas em cima das outras e a puxarem-se) e o 2º microscópico (partículas de fluido a transmitir quantidade de movimento ao embaterem umas nas outras, como bolas de snooker).

Nota: Esta parte seguinte veio do capítulo 8.3.2. A análise que se segue, retirada desse capítulo, aplica-se tanto a escoamentos turbulentos como laminares, e eu achei que não fazia sentido e podia levar a confusões (a mim levou) encontrar-se dentro de um capítulo só para escoamentos laminares.

Aplicando um balanço de forças num elemento de fluido em movimento cilíndrico, temos que pressão =  $\tau$ . A pressão integra-se à área da secção do fluido, e a  $\tau$  integra-se à superfície exterior do elemento do fluido (cilíndrico). Como todos são constantes é multiplicar a pressão pela área da secção ( $\pi r^2$ ) e a  $\tau$  pela área exterior do elemento ( $2\pi r l$ ). Assim chegamos à expressão

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r} \quad (1)$$

Como nem a queda de pressão nem o comprimento são função do raio do tubo, para se manter a igualdade, o 2º membro também tem de ser independente de r. Notar que "r" é a distância radial do eixo a um ponto qualquer e não o raio do tubo (R). Para  $r = R = 0.5D$ ,  $\tau_w = \tau$

Chega-se então à expressão, sabendo que  $\tau$  tem que variar linearmente com r, e sabendo que a tensão na parede é  $\tau_w$ ,

$$\tau = \frac{2\tau_w r}{D}$$

Que substituída em (1) fica

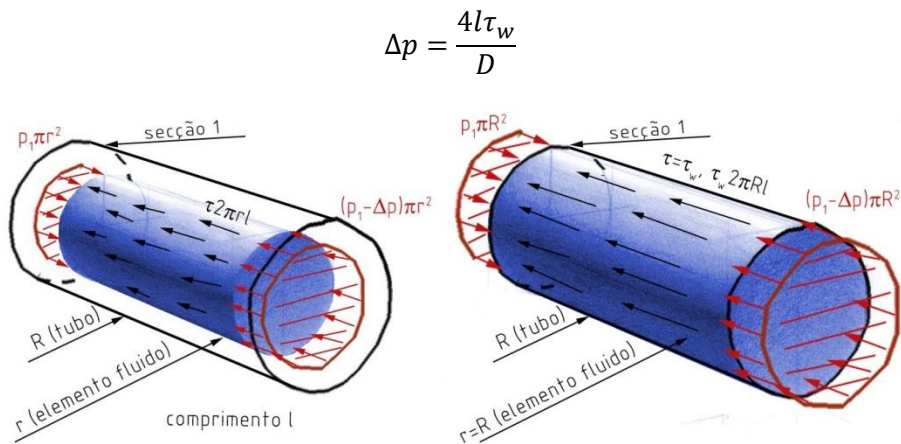


Fig. 15 - Balanço de forças num elemento de fluido circular dentro de um tubo.

Isto é, *a tensão de corte ao longo da parede do tubo é a responsável pela perda de carga*. É o fluido agarrar-se à parede do tubo que causa a sua perda de energia uma vez que atrasa todas as outras partículas de fluido que, devido à sua viscosidade, se agarram umas às outras. Por isso é que os fluidos invíscidos, se existissem, podiam deslizar infinitamente pelos tubos sem ser precisa nenhuma bomba.

Para sabermos o perfil de velocidades temos de relacionar a tensão de corte com a velocidade e é aqui que a análise para escoamento laminar se separa da para escoamento turbulento, uma vez que o perfil de velocidades de um escoamento laminar pode ser muito facilmente relacionado com a  $\tau$  pela lei de Newton da viscosidade, num escoamento turbulento já não.

### +8.2 Escoamento laminar completamente desenvolvido

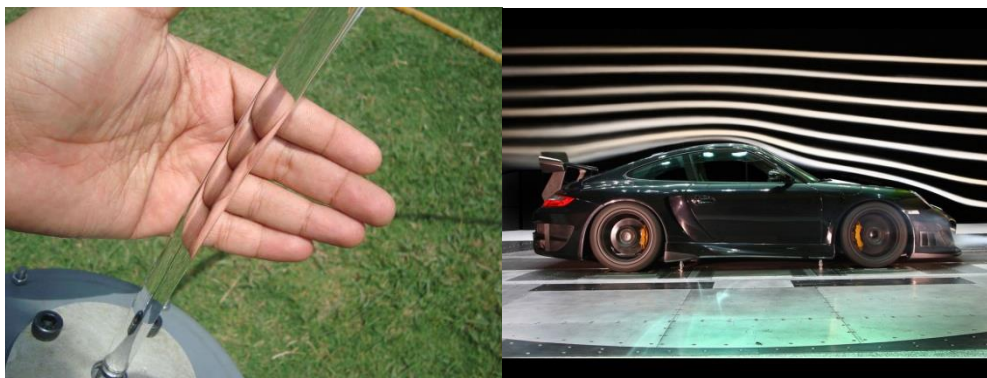


Fig. 16 – À esq. água em regime de escoamento laminar. À direita, fumo num túnel de vento em regime de escoamento laminar (exceto possivelmente na parte traseira).

O conhecimento do perfil de velocidades de um escoamento pode levar diretamente ao conhecimento da queda de pressão da perda de carga do caudal, etc. Portanto é pela sua determinação que se começa. Dos escoamentos laminares só vamos estudar os desenvolvidos.

#### +8.2.1 Obtenção das equações fundamentais através do balanço de forças num elemento de fluido

Para determinação do perfil de velocidades é necessário conhecer como a tensão de corte depende da velocidade. Isto só é conhecido no caso de regime laminar e fluido Newtoniano, em que  $\tau = -\mu du/dr$  (Lei de Newton da viscosidade). Substituindo em (1), integrando (para retirar o u de du/dy) e aplicando condições fronteira, chegamos à expressão para o perfil de velocidades “u” para um escoamento laminar completamente desenvolvido que é parabólico. Daí que *a velocidade máxima para o escoamento laminar seja o dobro da velocidade média.*

Integrando o perfil de velocidades à secção do tubo xega-se a

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{2}{r} \left( -\mu \frac{du}{dr} \right) \quad \left| \quad u = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad \left| \quad \dot{V} = \int u dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} u(r) r dr d\theta = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu l} = u_{m\acute{a}x} \frac{\pi R^2}{2}$$

Onde  $u_{m\acute{a}x} = u|_{r=0}$

Para levar em conta com o efeito da gravidade onde está  $\Delta p = \rho g l \sin(\theta)$  onde  $\theta$  é o ângulo que o tubo faz com a horizontal.

### +8.2.2 Obtenção das equações fundamentais através das equações de Navier-Stokes

Aplica-se a equação da conservação da massa e quantidade de movimento. Sabendo que a velocidade só tem uma componente, axial, que só é função da distância ao eixo do tubo, que o fluido é incompressível, a eq. da continuidade / conservação da massa fica satisfeita. A de quantidade de movimento vai dar um gradiente de pressão constante e não nulo. Tal como fazíamos em Fluidos I, integramos a equação para saber u e aplicamos as condições fronteira (no eixo, du/dr = 0, e na parede u=0) para determinar as constantes.

Xega-se precisamente aos mesmos resultados que ao aplicar um balanço de forças num volume de fluido cilíndrico.

O perfil de velocidades é obtido como fazíamos em Fluidos I. Navier stokes + continuidade → simplificar onde possível → integrar → aplicar condições fronteira e tirar u. Deverá dar uma equação parabólica centrada no eixo.

### +8.2.3 Obtenção das equações fundamentais através da análise dimensional

Do conhecimento do escoamento no interior de um tubo, sabemos que a variação de pressão ( $\Delta p$ ) é uma função da velocidade média (ou caudal), viscosidade do fluido ( $\mu$ ), diâmetro e comprimento do tubo (D e l). Pela análise dimensional, exprime-se a relação entre estas 5 variáveis por 2 números adimensionais. Chegamos então à mesma expressão para o caudal obtida pelo equilíbrio de forças. Manipulando um pouco obtemos

$$\Delta p = f \frac{l}{D} \frac{\rho v^2}{2}$$

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho v^2} = \frac{64}{Re}$$

### +8.2.4 Obtenção das equações fundamentais através de considerações energéticas

Aplica-se a equação da energia entre 2 secções. O perfil de velocidades é sempre o mesmo, e portanto o termo da pressão dinâmica desaparece dos dois lados da equação. Recorrendo à expressão decorrente do equilíbrio de forças numa tubagem inclinada e à conclusão da dependência de  $\tau$  em ao raio, xega-se à expressão que nos dá a perda de carga

$$h_L = \frac{2\tau l}{\rho g r}$$

$$h_L = \frac{4l\tau_w}{\rho g D}$$

Ver ex 8.3 p423

### +8.3 Escoamento turbulento completamente desenvolvido

Mais comum em situações correntes, no entanto é também mais complexo.

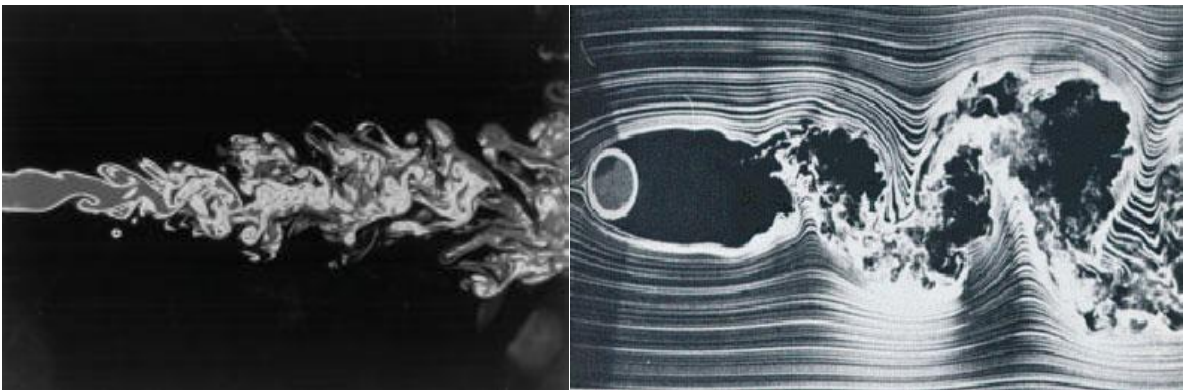


Fig. 17 – Visualização da turbulência.

#### +8.3.1 Transição de regime laminar para regime turbulento

Uma característica típica do escoamento turbulento é a irregularidade da velocidade (especialmente da axial). É preciso então distinguir as **componentes média e flutuante da velocidade**.

A componente flutuante é a variação da velocidade relativamente à velocidade média. Como se a velocidade média fosse o nível médio do mar, e as flutuações as ondas.

Anteriormente ao para termos usado a equação de Bernoulli tivemos de considerar o fluido invíscido ( $\mu = 0$ ), o que daria um Re infinito. Mesmo assim obtivemos resultados razoáveis porque os efeitos viscosos não tinham grande importância nos casos estudados (Re altos), porque as velocidades que usamos nos cálculos eram as médias, e porque o perfil de velocidades de um escoamento interior turbulento é quase uniforme, exceto em especial junto à parede.

A existência de turbulência influencia, por exemplo, a velocidade de transferência de calor, quantidade de movimento e mistura de fluidos – todos eles aumentam. Por exemplo é mais fácil misturar completamente água com leite, do que mel com resina das árvores. Lembrar que também no escoamento turbulento também a propagação das  $\tau$  é mais rápida (comprimento de entrada menor que escoamento laminar). Assim, **a queda de pressão por comprimento também é maior numa tubagem com escoamento turbulento**, sendo precisas bombas mais potentes para por o fluido em movimento. No corpo humano por exemplo, só nas grandes artérias com grande caudal é que se não se verifica escoamento laminar. Também nos aviões o arrasto nas asas é menor se o escoamento for laminar.

Aceleração convectiva é a variação da velocidade do fluido com o espaço. Numa zona em que o escoamento seja completamente desenvolvido, a aceleração convectiva é zero.  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$

### +8.3.2 Tensões de corte em regime turbulento

A grande diferença entre escoamento turbulento e laminar reside no comportamento caótico das várias propriedades do fluido que são descritas num campo – velocidade, pressão, tensão de corte, temperatura, etc.

Quanto maior a **intensidade de turbulência** maiores as **flutuações da velocidade**. Nos escoamentos laminares não existem flutuações de velocidade e portanto a única contribuição para as tensões de corte é de natureza molecular (camadas de fluido com diferentes velocidades a roçarem-se umas nas outras provocando tensão de corte) e não também macroscópica como no escoamento turbulento (redemoinhos).

Outro parâmetro é a escala de tempo. Esses redemoinhos e oscilações podem ocorrer com frequências de 10-1000Hz (água) ou  $10^{-3}$ Hz (Júpiter, corrente do Golfo).

Enquanto no escoamento laminar só haviam tensões de corte entre as camadas do escoamento com diferentes velocidades ( $\tau_{\text{viscosas}}$  também chamadas  $\tau_{\text{laminares}}$ ) e a parede do tubo, no escoamento turbulento, para além dessas, ainda existe a  $\tau$  devido aos movimentos em redemoinho e aleatórios presentes neste tipo de escoamento. Estes movimentos vão desde o tamanho de uma partícula até aos redemoinhos visíveis a olho nú e geram mais  $\tau$  que o deslizamento das “lâminas” do escoamento laminar (exceto na subcamada viscosa). Temos então, para um escoamento turbulento,

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'} = \tau_{\text{lam}} + \tau_{\text{turb}}$$

Em que  $u'$  e  $v'$  são as flutuações da velocidade nas direções  $x$  e  $y$  respetivamente (em escoamento laminar são 0). Notar que o segundo membro apesar do sinal negativo, é positivo, e já agora, também se chamam tensões de Reynolds, (que só se chamam de tensões porque têm as mesmas unidades). O que esta equação quer dizer é que a  $\tau$  já não é só diretamente proporcional à média da velocidade, mas também tem em conta a velocidade flutuante segundo  $x$  e  $y$ . O  $\rho$  está ali porque as tensões turbulentas derivam da transferência da quantidade de movimento do fluido pelos redemoinhos.

Estas duas tensões de corte relacionam-se da seguinte maneira: numa zona muito perto da parede (1000x inferior ao diâmetro) do tubo a tensão de corte laminar domina – essa zona é chamada **subcamada viscosa**. Chama-se viscosa porque as  $\tau$  que dominam aí são devidas principalmente à viscosidade do fluido (Lei de Newton da viscosidade). Até ao centro do tubo domina a  $\tau$  turbulenta.

Infelizmente, o cálculo destas tensões não está escrito nos astros nem a astróloga Maia os consegue dizer. Em regime turbulento só se consegue fazer por aproximações numéricas com a ajuda de computadores. Para além de determinar a tensão de corte de turbulência por  $\rho \overline{u'v'}$  outro método seria o de considerar a viscosidade dos redemoinhos (o equivalente à viscosidade das lâminas a deslizarem umas sobre as outras no escoamento laminar)  $\eta$ .  $\tau = \eta \frac{d\bar{u}}{dy}$ . Assim considerava-se a turbulência como o transporte de partículas de uma zona de uma certa velocidade para outra zona mais à frente de outra velocidade, separadas por um determinado comprimento de mistura. Sendo essa viscosidade função desse comprimento o problema cingir-se-ia em determiná-lo.

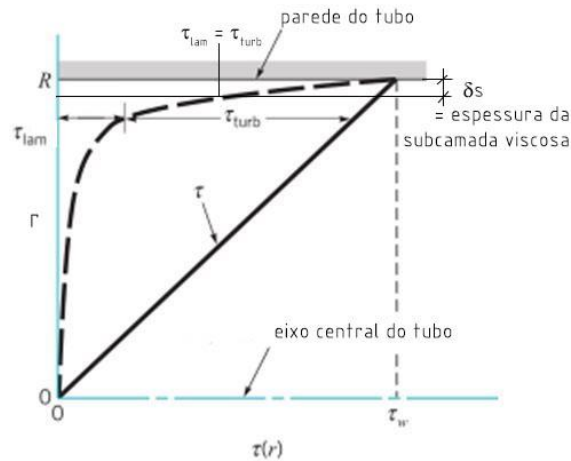


Fig. 18 - Importância das tensões de corte laminares e turbulentas com a distância radial

### +8.3.3 Perfil de velocidades em regime turbulento

Pode ser repartido em 3 regiões caracterizadas pela distância à parede.

- **Subcamada viscosa** (a que está mais perto da parede): nesta camada a viscosidade é uma variável importante e as tensões de corte viscosas dominam –  $\tau_{lam} = \mu \frac{du}{dy}$ . O perfil de velocidades para esta subcamada pode ser escrito na forma adimensional, a que se denomina **lei de parede**:

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{yu^*}{\nu} \quad \text{válido para: } 0 \leq \frac{yu^*}{\nu} \leq 5$$

Onde  $u^* = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$  é a velocidade de fricção, o segundo membro representa a distância à parede, e “y” é a distância da parede ao ponto que se pretende. Esta zona tem uma espessura representada por  $\delta s$  e é geralmente muito menos de 1% do diâmetro do tubo.

- **Região de sobreposição :**

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = 2.55 \log\left(\frac{yu^*}{\nu}\right) + 5 \quad , \quad 30 \leq \frac{yu^*}{\nu} \leq 1000$$

- **Camada exterior** (até ao centro): nesta camada a densidade é uma variável importante, as tensões de corte de turbulência dominam  $\tau_{turb} = \rho \overline{u'v'}$ . Existem duas aproximações que se costumam usar que são

$$\frac{V_c - \bar{u}}{u^*} = 2.55 \log\left(\frac{R}{y}\right) \quad , \quad \frac{yu^*}{\nu} \geq 1000$$

e

$$\frac{\bar{u}}{V_c} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$$

Onde “Vc” é a velocidade no eixo (central). À expressão de baixo chama-se **lei de potência** e também é usada como aproximação do perfil de velocidades dum escoamento em regime turbulento.

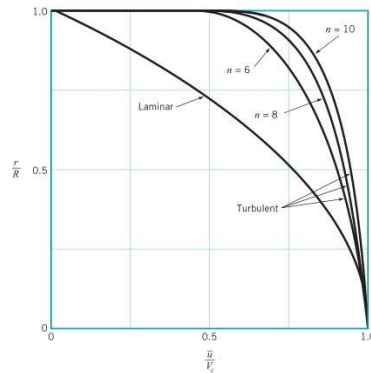


Fig. 19 - Perfil de velocidade laminar, e turbulentos obtidos por diferentes valores de n para a lei de potência.

Quanto maior o número de Reynolds mais achatado fica o perfil. Porquê? Porque por exemplo para o mesmo fluido (mesma viscosidade) a  $\tau_{lam}$  mantém-se mas a  $\tau_{turb}$  aumenta (maior Re, maior velocidade, maiores as flutuações da velocidade). Como as  $\tau_{turb}$  afetam o escoamento por todo o tubo sem ser na parede (ao contrário das laminares que é mais ao pé da parede) mais uniforme passa a ser o perfil de velocidades. Daí se pode ver que para os escoamentos com elevadíssimos Re, o perfil de velocidades é quase uniforme e foi por isso que ao usarmos Bernoulli assumindo que o escoamento tem perfil de velocidade uniforme por ser invíscido e sem falar na turbulência, não ficámos muito aquém da realidade.

#### +8.3.4 Modelação de turbulência

A razão porque é necessário criar tantas aproximações para o escoamento turbulento e não simplesmente por exemplo obter expressões a partir de Navier-Stokes para os valores médios (as chamadas equações médias temporais de Navier-Stokes) é que essas equações não são lineares e portanto também se obteria ao mesmo tempo as médias dos produtos das flutuações (que é aquilo que se está a tentar eliminar ao usar os valores médios).

#### +8.3.5 Caos e turbulência

É discutida a possibilidade das equações de Navier-Stokes englobarem o caos do escoamento turbulento, sendo o estado do escoamento muito dependente das condições iniciais.

### +8.4 Análise dimensional do escoamento no interior de tubagens. Perda de carga em linha em condutas lisas de secção circular.

Distinguem-se dois tipos principais de perdas de carga:

- Major: perda de carga devido aos efeitos viscosos em tubos;
- Minor/localizadas: perda de carga devido aos vários componentes da tubagem (válvulas, T's, curvas, etc).

O termos major (em linha) e minor (localizadas) não têm nada a ver com a sua importância uma vez que por exemplo num tubo curto mas cheio de curvas e componentes diferentes as perdas minor podem ser maiores que as major. Diferentes notações –

$$h_L = h_{L\_emlinha} + h_{L\_localizadas}$$

$$h_L = h_{Lmajor} + h_{Lminor} \quad , \quad h_L = h_{Lmaj} + h_{Lmin}$$

$$h_{Total} = h_{fricção} + h_{loc} \quad , \quad h_T = h_f + h_{loc}$$

Chama-se perda de carga (head loss,  $h_L$ ) à perda de energia equivalente em altura [m] num fluido incompressível devido à fricção (p.230). A equação da energia é

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2 + \rho g h_L$$

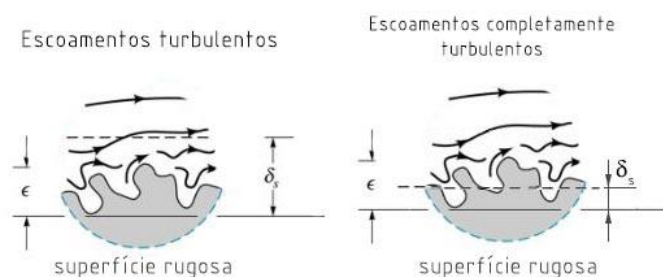
Ignorando o facto de a velocidade não ter perfil uniforme, senão tinha que se entrar com os alfas e v média (p.236)

**+8.4.1 Perdas de carga em linha. Coeficiente de fricção de Darcy. Equação de Darcy-Weisbach. Diagrama de Moody. Efeito da rugosidade - escoamento hidraulicamente liso e escoamento rugoso. Equação de Colebrook.**

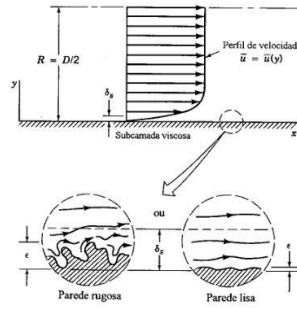
Ao contrário dos escoamentos laminares, os turbulentos serão função da rugosidade da parede (e da densidade). A dependência da rugosidade podemos entender pelo fator de fricção que a inclui na sua fórmula ou porque a rugosidade esta altera a subcamada viscosa. A dependência da densidade podemos entender como vinda das tensões de corte turbulentas.

No escoamento laminar não existe subcamada viscosa, porque todo escoamento é “viscoso”, todas as  $\tau$  são devidas à viscosidade do fluido. Verifica-se que o fator de atrito nos escoamentos laminares diminui com o aumento do nº de Re. Quanto maior a força dos efeitos de inércia em relação aos viscosos, menos as “lâminas se conseguem agarrar” umas às outras. Se tivermos lâminas de esferovite (baixa massa) a deslizar devagar com cola (elevada viscosidade) pelo meio o “agarrar” será muito maior do que se forem de xumbo, à velocidade do som com gelo. Aí a sua quantidade de movimento (forças de inércia) é tão grande, que o pouco que o gelo agarra não serve de nada.

Por outro lado no escoamento turbulento, a rugosidade influencia a subcamada viscosa, podendo destruí-la, causando um aumento da fricção. No entanto se o número de Reynolds for muito alto, a subcamada viscosa fica mais pequena (as forças viscosas têm menos “força” do que as de inércia em Re’s altos) e então a rugosidade é o único fator a influenciar a fricção. Quanto maior a rugosidade mais “embate” o fluido nas pregas perdendo quantidade de movimento.



**Fig. 20 – O escoamento da esquerda também tem o nome de hidraulicamente liso porque a espessura média da rugosidade < espessura da subcamada viscosa.**



Tendo em conta as dificuldades apresentadas em analisar um escoamento turbulento completamente desenvolvido, o melhor meio de o fazer é mesmo por análise dimensional.

Analisando dimensionalmente um fluido a escoar-se num tubo horizontal chegamos a

$$\Delta p = f \frac{l \rho v^2}{D}$$

Onde “f” é o fator de fricção / coeficiente de fricção de Darcy

Escoamento laminar	Escoamento turbulento
$f = \phi(Re)$	$f = \phi\left(Re, \frac{\epsilon}{D}\right)$
$f = \frac{64}{Re}$	$f = ? \rightarrow$ análise experimental $\rightarrow$ diagrama de Moody $\rightarrow$ fórmulas de Colebrook e Blasius

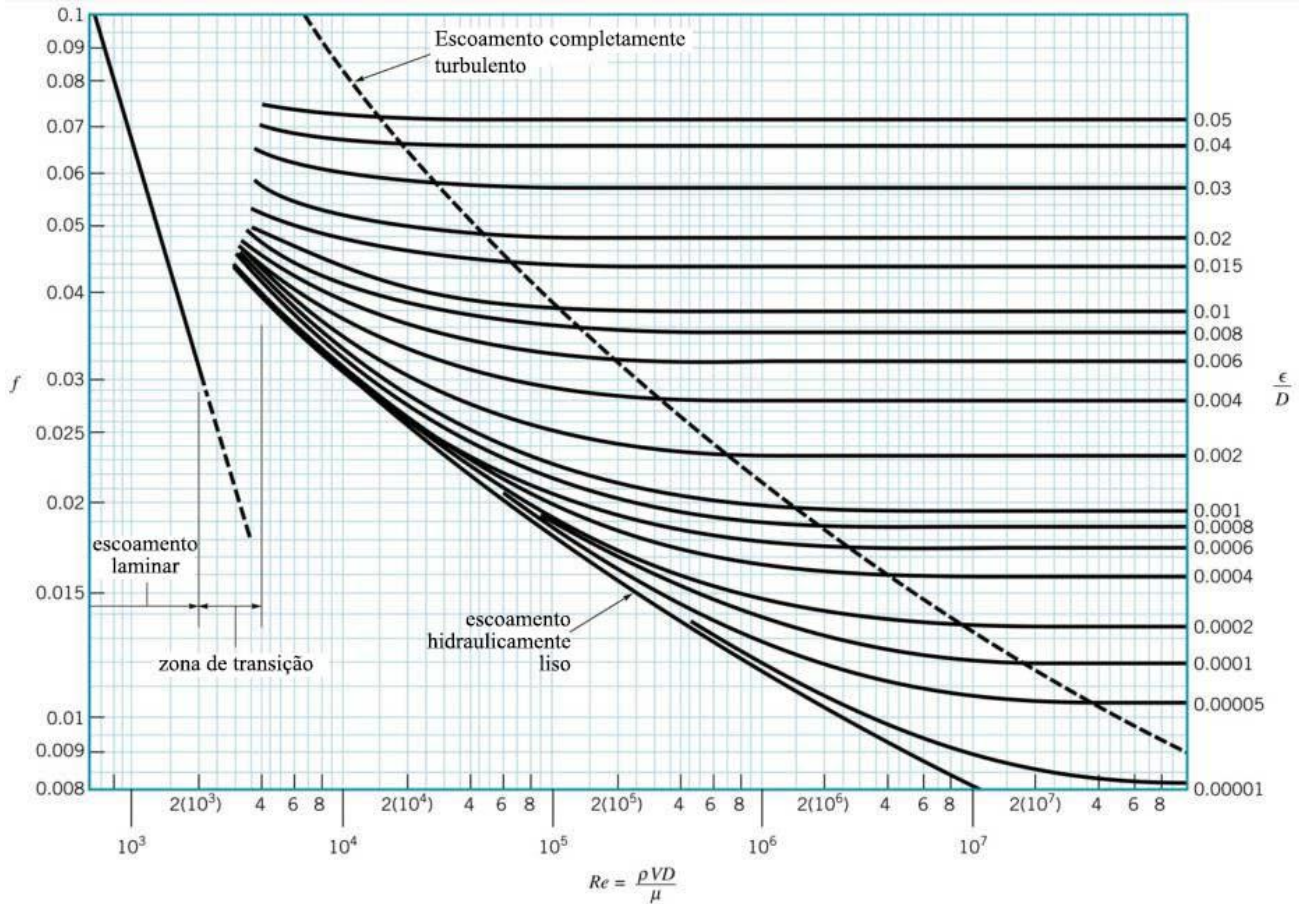


Fig. 21 - Diagrama de Moody

Essa função tem de ser obtida experimentalmente, e foi de numerosas experiências qe se obteve a equação de Colebrook, qe se verificou qe se ajustava as dados experimentais (+-10% precisão), e com ela se fez o diagrama de Moody para melhor se visualizar as ditas equações.

*Notas sobre o diagrama de Moody:*

- mesmo qe a rugosidade seja nula, o fator de fricção não é zero, devido à condição de não escorregamento na parede qe implica qe, para qualquer fluido viscoso, este se agarre sempre à parede.
- $0.008 \leq f \leq 0.1$
- Aumentando a rugosidade relativa  $\epsilon/D$  e diminuindo o número de Reynolds, mais facilmente se obtém escoamento completamente turbulento.
- Todas as linhas do escoamento turbulento tendem, para Re decrescentes, para a linha de escoamento hidraulicamente liso. Escoamento hidraulicamente liso ocorre quando a espessura média da rugosidade é bastante menor qe a espessura da subcamada viscosa  $\epsilon \ll \delta_s$ .

**+8.4.2 Perdas de carga localizadas.**

Até aqi foram vistas as perdas de carga resultantes do escoamento ao longo de uma tubagem longa. Muitas tubagens incluem, no entanto, alguns componentes pelo meio (válvulas, T's, curvas, expansões, etc) qe também geram perdas de carga – localizadas,  $h_{L\text{minor}}$  – cuja determinação parte de especificar o **coeficiente de perda  $K_L$** . Este representa quantas vezes a energia cinética do fluido

foi perdida. Se  $K_L = 2$  de um componente significa qe, ao passar nele, o fluido perde 2 vezes o valor da sua  $E_c$  (energia essa qe terá de vir da energia da pressão qe o fluido tem consigo).

$$K_L = \frac{2gh_{Lminor}}{v^2} = \frac{2\Delta p}{\rho v^2}$$

$K_L = \Phi$  ( geometria,  $Re$  ). Devido às bruscas variações de direção e velocidade qe o fluido sofre dentro dos componentes, as forças de inércia geradas ganham muito mais peso do qe a relação forças de inércia / forças viscosas do próprio fluido (lembrar definição do nº de  $Re$ ). Então nestes componentes as forças de inércia acabam quase sempre por dominar relativamente às viscosas, por causa da geometria e, portanto, o número de Reynolds torna-se secundário. Portanto *o  $K_L$  quase só depende da geometria do componente*. Se comprarmos uma válvula das feitas na Trofa em latão reciclado por fundição é uma coisa, se comprarmos uma italiana com designs suaves é outra. O valor do  $K_L$  é dado pela empresa qe vende o componente geralmente e é obtido por via experimental, visto o escoamento no interior do componente ser muito complexo.

Notar semelhança entre perda de carga em linha e local

Perda de carga em linha	Perda de carga local
$\Delta p = f \frac{l}{D} \frac{\rho v^2}{2}$	$\Delta p = K_L \frac{\rho v^2}{2}$
$f = \Phi \left( Re, \left( \frac{\epsilon}{D} \text{ se turb} \right) \right)$	$K_L = \Phi (Re, \text{geometria})$
$h_L = f \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g}$	$h_L = K_L \frac{v^2}{2g}$

Daqui também podemos observar outra coisa qe é qe as perdas localizadas variam com o quadrado do caudal  $h_{Lmin} \sim \dot{V}^2$ . Isto vem de

$$h_{Lmin} = K_L \frac{v^2}{2g} = \frac{K_L}{2gA^2} \dot{V}^2 \rightarrow h_{Lmin} \approx cte \cdot \dot{V}^2$$

**Comprimento equivalente:** comprimento do tubo em linha reta qe seria necessário para causar a mesma perda de carga qe um componente. Ter em conta qe enquanto o  $K_L$  é caraterístico do componente, o comprimento equivalente também já depende do tubo (do seu fator de fricção).

É mais fácil acelerar um fluido sem perdas do que desacelerar. O qe acontece é qe ao desacelerar as partículas batem e roçam-se umas nas outras. É claro qe no final elas estão mais comprimidas, mas uma parte da energia ficou no aumento da temperatura causado por elas andarem a roçar-se, isto é, grande parte da energia cinética no desacelerar é perdida por efeitos viscosos.

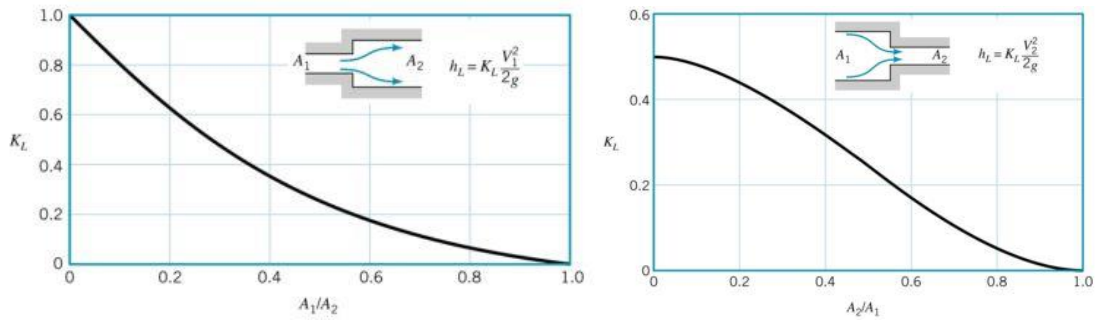
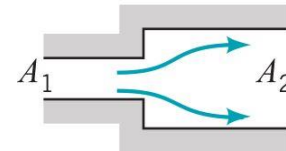


Fig. 22 - Variação do coeficiente de perda com a relação de áreas da expansão.

Além disso, numa região de entrada  $K_L$  depende da geometria, numa região de saída  $K_L \geq 1$  (maior que um porque podemos por exemplo ter à saída um filtro ou uma grelha que também dificulte a saída do fluido, e aí não só se perde a  $E_c$  do fluido mas também alguma da sua pressão).

Isto excetuando em expansões súbitas onde uma análise simples a partir da conservação da massa, quantidade de movimento e energia permite obter

$$K_L = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$



Ao contrário do que seria de esperar, nem sempre um difusor cónico é melhor do que uma expansão súbita (e quando digo melhor, significa  $K_L$  menor). Para ângulos de abertura grandes, pode passar a ser preferível a expansão súbita, isto é, ângulo reto, como na figura acima.

Então, tirando este caso, todos os cálculos têm de ser feitos com base em análise dimensional e dados experimentais.

Também as curvas nas tubagens produzem perdas de carga locais. Estas são principalmente devidas à separação do escoamento que se forma devido às diferentes forças centrípetas que o fluido está sujeito e ao escoamento separado que se forma na curva interior da tubagem. O fluido ao fazer a curva é empurrado contra a parede de fora e é claro que junto à curva são poucas as partículas que têm estofa para ficar.

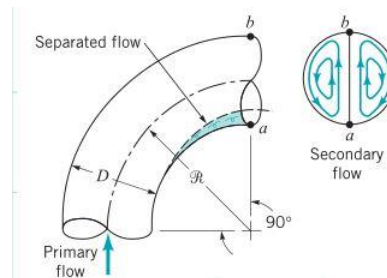


Fig. 23 - Ocorrência de separação do escoamento devido à curvatura de um tubo.

Válvulas completamente fechadas têm  $K_L$  infinito.

#### +8.4.3 Conduitas não circulares.

Para este tipo de condutas o perfil de velocidades é função de duas direções, y e z, em vez de apenas a radial.

*Para escoamentos laminares:*

A maneira mais prática de tratar estes escoamentos é escrever o fator de fricção sob a forma

$$f = \frac{C}{Re_h}$$

Onde  $Re_h$  é o Re com o diâmetro hidráulico e a constante “C” depende da geometria da secção. Para secção circular, C=64, para as outras. Essa constante pode ser tirada de tabelas (p. 426 Munson)

*Para escoamentos turbulentos:*

Os cálculos podem ser feitos recorrendo ao diagrama de Moody, tendo apenas que usar o  $D_h$  em vez do D (a exatidão no entanto desce de 10% para 15%)

Este diâmetro deve entrar no cálculo de

$$Re_h = \frac{\rho v D_h}{\mu}, \quad h_L = f \frac{l}{D_h} \frac{v^2}{2g}, \quad \text{rugosidade relativa} = \frac{\epsilon}{D_h}$$

## 8.5 Tipo de problemas de instalações e sistemas de bombagem. Escoamento no interior de sistemas de tubagens.

### +8.5.1(Apenas um tubo)

3 tipos de problemas principais:

- Tipo I – É pedida a perda de pressão/carga ou aumento de pressão necessário (potência da bomba);
- Tipo II – É pedido o caudal/velocidade
- Tipo III – Dimensionamento de tubos.

Ver exercícios 8.9 e 8.12

### +8.5.2 Tubagens em série e tubagens em paralelo.

Em série as perdas de carga somam-se.

*Em condutas em paralelo, a perda de carga entre 2 pontos comuns às condutas é sempre a mesma independentemente do caminho percorrido.* Se duas condutas que ambas saiam do Porto e vão ter a Gaia, mas que uma delas passe pelo Algarve, ambas têm a mesma perda de carga entre o Porto e Gaia, que são os pontos comuns aos dois tubos.

A análise é semelhante à feita para circuitos elétricos. Há um balanço entre caudal, queda de pressão e resistência ao escoamento. No entanto há uma diferença importante a ter em conta que é ao contrário da lei de Ohm, nos fluidos ao dobrar a queda de pressão não se dobra o caudal (a menos do escoamento laminar).

$$\text{turbulento: } \Delta p = f \frac{l}{D} \frac{\rho v^2}{2} = \dot{V}^2 R$$

$$\text{laminar: } \Delta p = \frac{64 l \rho v^2}{Re D} = \frac{32\mu l v}{D^2} = VR$$

Onde R, de resistência, inclui todas as constantes.

Nos escoamentos com tubos em paralelo muitas vezes o sentido do escoamento não é óbvio, e uma parte da resolução passará por determinar esse sentido. Assim pode-se admitir que o escoamento se processa num sentido e verificar os sinais do escoamento resultante. Se o caudal ou a velocidade derem negativos, ou sem solução, o sentido arbitrado não acontece.

## +8.6 Medição de caudal e velocidade num tubo.

Neste capítulo vai ser discutido como tomar em conta os efeitos viscosos nos aparelhos medidores de caudal (algo qe foi desprezado anteriormente ao falar deles).

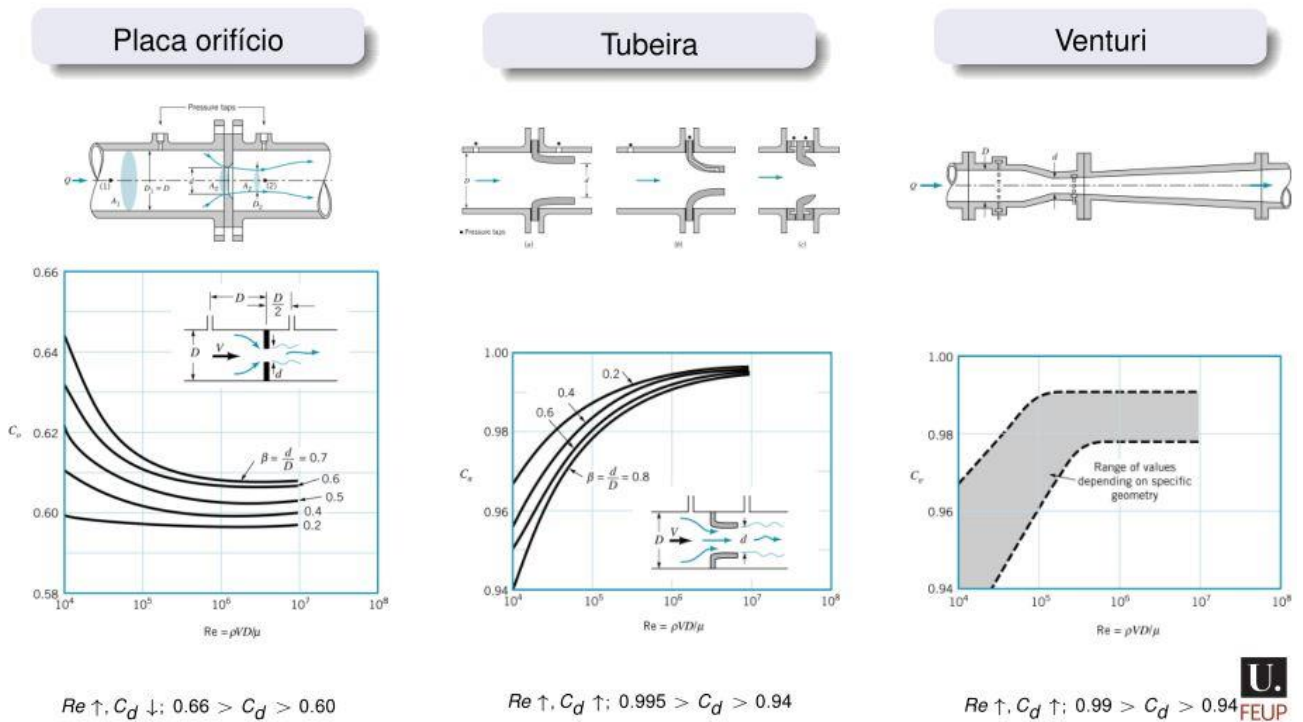
### +8.6.1 Medidores de caudal. Placa-orifício, bocal/tubeira, Venturi. Rotâmetro.

Todos se baseiam no mesmo princípio de funcionamento. Ao restringir um fluido, a velocidade é forçada a aumentar e a pressão a diminuir para fornecer a energia para acelerar o fluido. Então sabendo quanto a pressão e a área diminuíram, dá para calcular o caudal pelas equações da conservação da massa e Bernoulli.

$$\dot{V}_{ideal} = A_{p.o.} \left( \frac{2\Delta p}{\rho(1 - \beta^4)} \right)^{1/2}$$

Mas ao usar-se a equação de Bernoulli está-se a assumir qe o fluido é invíscido, o qe não é verdade, e além disso podem-se formar redemoinhos logo a seguir à parte mais estreita do medidor. Então o caudal real é obtido multiplicando o ideal pelo **coeficiente de descarga ( $C_d$ )** qe depende do medidor. Este coeficiente mede o afastamento do escoamento ao ideal (invíscido, em qe  $h_L=0$ ). Se um medidor de caudal tem um  $C_d$  baixo significa qe causa ao fluido muitas irregularidades (separação do escoamento, redemoinhos, vena contracta...) e portanto a diferença de pressões medida foi maior do qe o qe devia ser.

$$\dot{V}_{ideal} \cdot C_d = \dot{V}_{real}$$

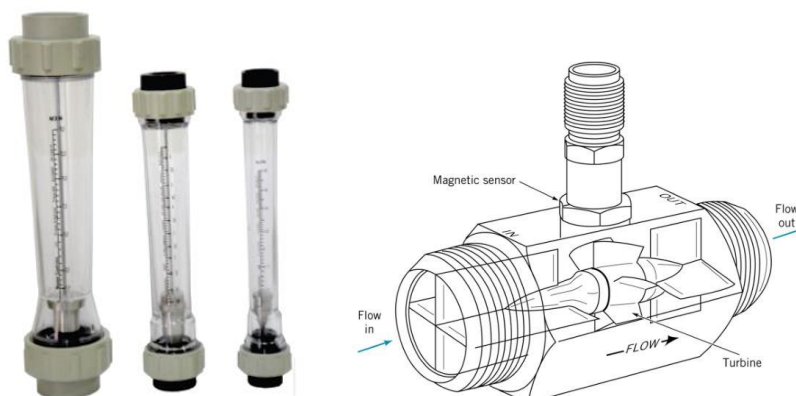


**Fig. 24 - Variação do coeficiente de descarga para cada um dos medidores de caudal de obstrução fixa e a sua variação com o número de Reynolds.**

Com a placa orifício forma-se uma vena contracta a seguir ao orifício com área inferior à deste e turbulência junto às placas. O coeficiente de descarga toma em conta estes efeitos.

O mais preciso dos 3 (e mais caro) é o tubo de venturi. Neste, ao contrário dos outros 2, a única perda de carga que ocorre é ao longo das paredes do tubo (não ocorre vena contracta nem separação do escoamento em redemoinhos).

Outro medidor de caudal também usado por ser preciso e barato é o rotâmetro. Este funciona de maneira que quando se dá o equilíbrio de forças a que um aparelho no seu interior, o flutuador, está sujeito (Peso = atrito+quantidade de movimento+flutuação), é mostrado o caudal a atravessar o seu interior. Notar que a área da secção do tubo aumenta na vertical de baixo para cima.



**Fig. 25 - Rotâmetro (esq.) e turbina (dª).**

Ainda outro usado é o medidor de turbina no qual uma turbina a gira com velocidade angular medida por um aparelho magnético e que é proporcional à velocidade média do fluido que atravessa o tubo.

#### **+8.6.2 Medidores de volume.**

Por exemplo o contador de água nas casas que mede o volume de água consumido, por oposição ao caudal a ser usado num determinado momento como os anteriores medidores fazem.

## +Cap. 12 – Turbomáquinas

### +12.1 Introdução

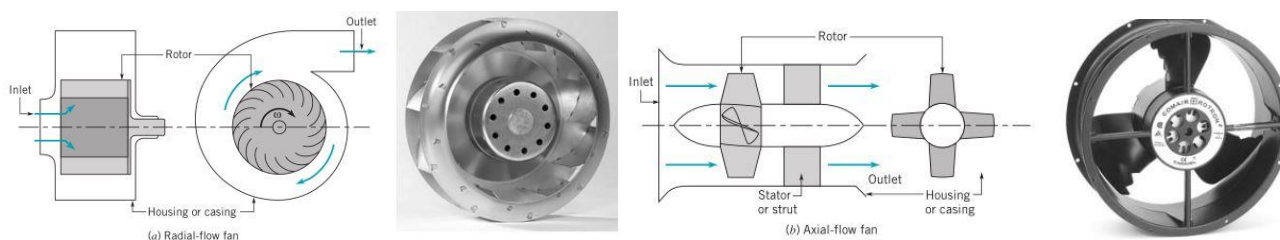


Fig. 26 - Turbomáquina radial (esq.) e axial (dª).

Uma turbomáquina é turbina se extrair energia do fluido e bomba se adicionar energia ao fluido.

#### Classificação das turbomáquinas:

- Axiais – fluido sai na direção do eixo;
- Radiais – fluido sai na direção do raio;
- Mistas – fluido sai com um ângulo, direção intermédia entre axial e radial.

### +12.2 Conservação de energia

$$v = w + u$$

**U** – velocidade absoluta da pá, vinda de  $u = \omega r$

**V** – velocidade absoluta do fluido

**W** – velocidade da pá relativamente ao fluido

Ou, noutra notação,  $v_{10} = v_{12} + v_{20}$ ,  $v_{10}$  e  $v_{20}$  relativas ao ref. 0, fixo.)

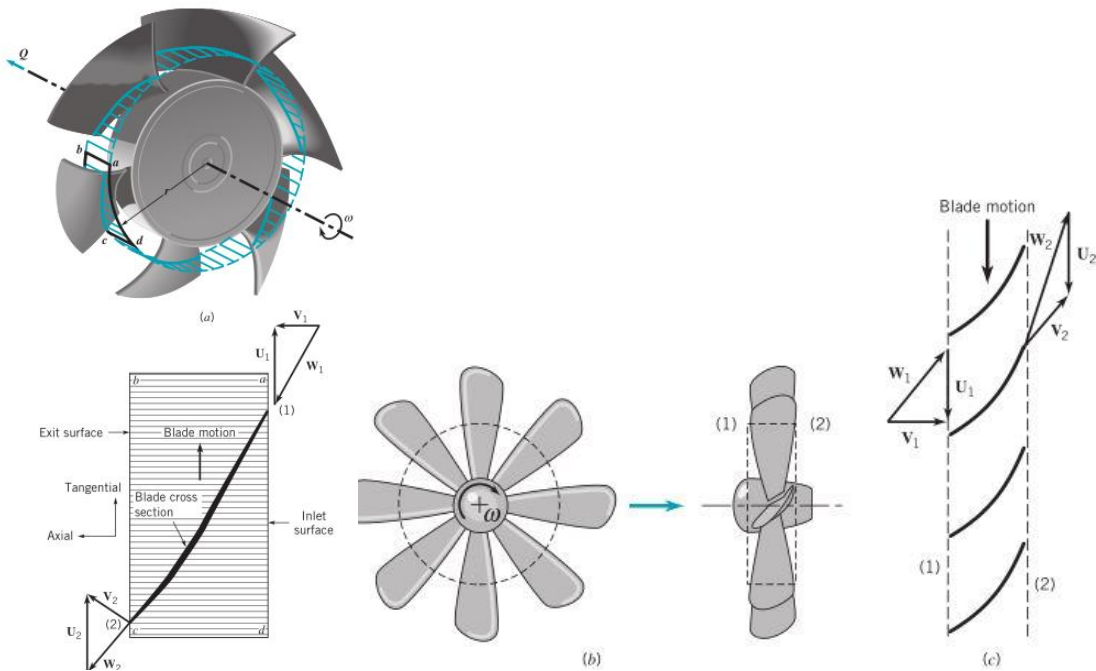


Fig. 27 - Diagrama esquemático das pás de uma bomba (esq.) e turbina / moinho (dª) e o respetivo triângulo de velocidades.

À esquerda, ventoinha movida por um rotor (bomba). À direita ventoinha de um moinho (turbina), ambas turbomáquinas axiais. A ventoinha “empurra” o fluido fazendo-o mudar de direção. Inicialmente o fluido não tinha componente da velocidade segundo a direção do movimento da pá, depois já passa a ter. Como a força que a pá exerce e o seu movimento têm a mesma direção, esta exerce trabalho no fluido. O inverso se passa no moinho. Se eu empurrar um móvel, a força e o meu andamento têm o mesmo sentido, logo eu realizo trabalho. Já o móvel anda ao contrário da força que exerce sobre mim, logo recebe trabalho.

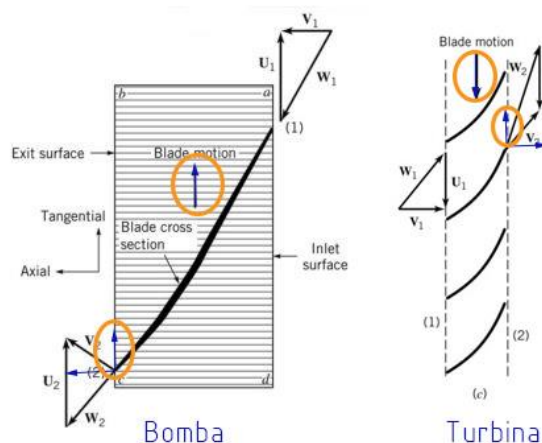
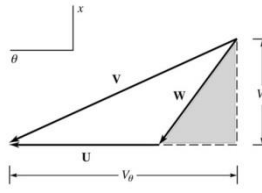


Fig. 28 - A bomba é a responsável pela aparência de uma componente da velocidade tangencial no fluido.

### -d12.3 Conservação da quantidade de movimento angular.

A equação da conservação de quantidade de movimento angular aplica-se a um volume de controle sob uma pá de uma bomba.

$$\underbrace{\sum_{VC} \vec{r} \times \vec{F}}_B = \int_{SC} \underbrace{(\vec{r} \times \vec{V})}_{rV_\theta} \underbrace{\rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS}_{\dot{m}}$$


Soma dos momentos torsores atuantes no volume de controle = fluxo de quantidade de movimento angular através da superfície de controle. O **B** é o momento tursor no eixo da máquina. Daqui se obtém a equação de Euler para turbomáquinas

$$B = -(r_1 V_{\theta 1}) \dot{m}_1 + (r_2 V_{\theta 2}) \dot{m}_2$$

Onde o índice 1 representa a entrada, e 2 à saída. Como à entrada o fluido tem o sentido contrário à normal da superfície, o sinal vem negativo. Como  $\dot{W} = B\omega$  xega-se a uma expressão fundamental para qualquer tipo de turbomáquinas qe é

$$\dot{W} = -\dot{m}_1(U_1 V_{\theta 1}) + \dot{m}_2(U_2 V_{\theta 2})$$

Daqi se pode ver qe a potência da máquina depende essencialmente da componente da velocidade do fluido na direção tangencial (direção do movimento da pá, ver figura acima).

### +12.4 Bomba centrífuga. Determinação da curva característica da máquina. Curva real e outros parâmetros de funcionamento.

Impulsores, cobertura

2 tipos de impulsores de bombas: simples e dupla sucção.

Bombas podem ser de simples (um impulsor) ou multi estágios (vários impulsores no mesmo veio, em qe cada um aumenta um pouco a pressão).

#### +12.4.1 Considerações teóricas

Se da partindo da última equação do subcapítulo anterior entrarmos com

$$\dot{W} = \rho g \dot{V} h_i$$

Xegamos a uma expressão para  $h_i$ , qe é a equação de uma reta a descer. Define-se assim, a altura manométrica ideal da bomba. Para saber a ideal, há qe considerar qe o aumento de pressão ideal = aumento de pressão real + queda de pressão

$$h_i = h_r + h_L$$

Nota:  $h_r$  (português) ou  $h_a$  (Munson, ingles). Geralmente usa-se simplesmente a notação  $h_{\text{bomba}}$  em vez de  $h_{\text{real}}$ , uma vez qe raramente vamos usar o  $h_{\text{ideal}}$  e portanto não vale a pena fazer a distinção.

As curvas características das bombas têm sido determinadas experimentalmente uma vez que, por enquanto, não se tem conseguido prever a performance de uma bomba teoricamente.

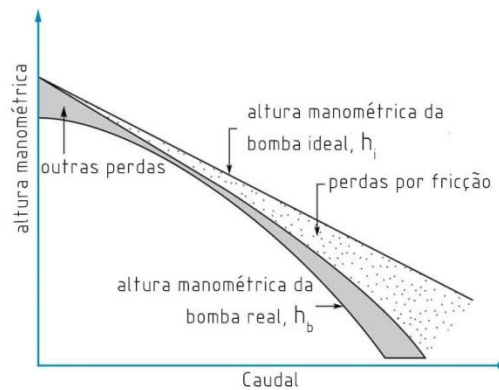


Fig. 29 - Efeito das perdas internas da bomba na sua altura manométrica.

### -12.4.2 Características da performance da bomba

A eficiência de uma bomba tem origem em 3 tipos de eficiências:

- Mecânica (atritos)
- Hidráulica
- Volumétrica (fugas)

Tal que

$$\eta = \eta_{mec} \eta_{hid} \eta_{vol}$$

A caracterização das bombas pode ser dada por uma curva que relaciona o aumento de pressão verificado, a performance e a potência com o caudal. ( $h_a, \eta, W \rightarrow V$ ). Geralmente bastam apenas 2 de entrada porque os 3 se relacionam entre eles. Os dois tipos mais comuns de curvas são as “de pressão a aumentar” em que o aumento de pressão aumenta sempre com a diminuição de caudal e as “de pressão a diminuir” que com a diminuição de caudal primeiro aumenta o  $h_a$  e depois desce.

Uma bomba (e a maioria das máquinas?) são projetadas para funcionar no seu melhor, a maior parte do tempo. Por isso se queremos uma bomba para um dado caudal, será correto ter/fazer/projetar uma bomba que tenha a maior eficiência para esse caudal.

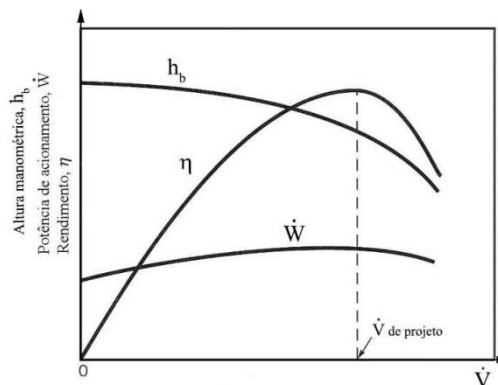


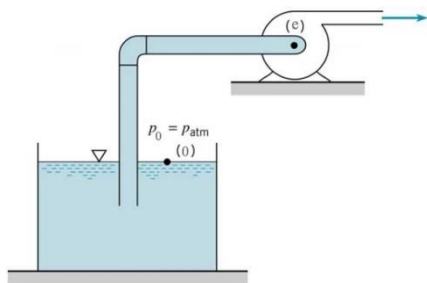
Fig. 30 - Características da performance de uma bomba a funcionar a rotação constante.

**+12.4.3 Cavitação e NPSH. Curva característica de uma instalação**

Quando a pressão estática iguala a pressão de vapor, formam-se bolhas de vapor e ocorre cavitação. Na admissão da bomba o fluido acelera (redução de secção), ocorrem perdas por atrito viscoso ⇒ a pressão estática diminui. Para que não ocorra cavitação, não é suficiente a pressão estática na admissão da bomba ser superior à pressão de vapor e é aí que entra o conceito de **NPSH**.

Há dois NPSH a ter em conta: o necessário para que não ocorra cavitação **NPSH<sub>Requerido</sub>** e o **NPSH<sub>Available</sub>** (disponível). Para que a bomba funcione como deve ser (sem cavitação), o disponível deve ser sempre maior que o requerido, i.e.,  $NPSH_A > NPSH_R$ .

Se aplicarmos a equação da energia entre um ponto no tanque de onde se suga o fluido e outro logo antes da bomba, e subtrairmos de ambos os membros  $p_v/\rho g$ , obtemos o NPSH disponível o qual depende unicamente da instalação, isto é, das condutas (diâmetro, rugosidade, perdas localizadas), do local onde está a bomba, e o do caudal a bombear.



$$\underbrace{\frac{p_e - p_v}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g}}_{NPSH_A \text{ (disponível)}} = -z_0 - \sum h_L - \frac{p_0 - p_v}{\rho g}$$

Em que  $p_v$  é a pressão vapor, isto é, a pressão à qual o líquido se transforma em vapor e o índice “e” representa as propriedades à entrada da bomba. A pressão vapor é geralmente fornecida em pressões absolutas, portanto se  $p_0$  estiver à pressão atmosférica, esta deve-se manter na equação.

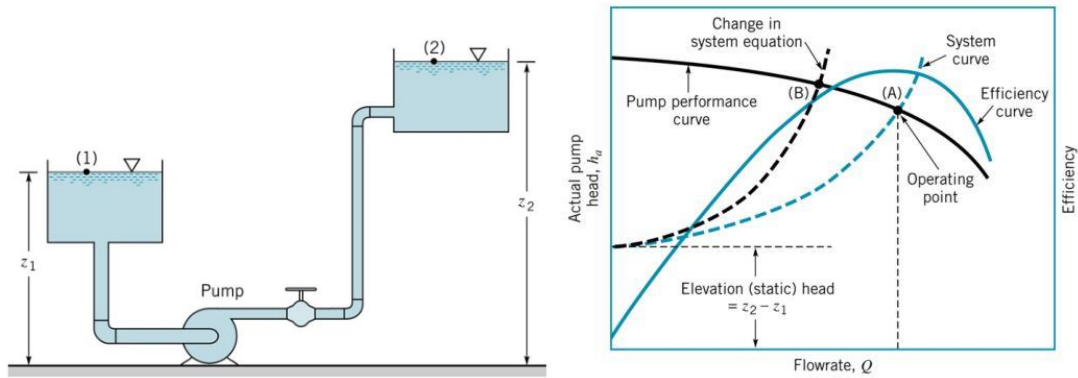
O requerido deverá ser fornecido pelo fabricante da bomba, sob a forma gráfica ou de uma equação que traduza o NPSH, uma vez que é o fabricante que conhece melhor que ninguém a variação da pressão dentro da bomba.

**+12.4.4 Compatibilização entre as características de uma instalação e de uma bomba. Associação de bombas**

Aplicando eq. da energia entre 1 e 2 (ver figura em baixo) xega-se a

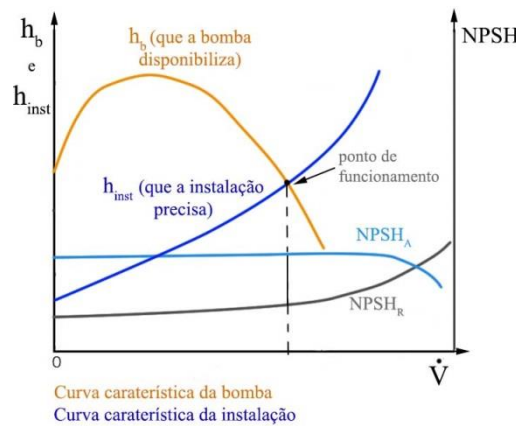
$$h_B = h_{inst} = z_2 - z_1 + \sum h_L = z_2 - z_1 + K\dot{V}^2$$

$h_{inst}$  – energia necessária para vencer a diferença de cota e as perdas de carga.



**Fig. 31 - Utilização da curva característica da bomba e da instalação para a determinação do ponto de funcionamento.**

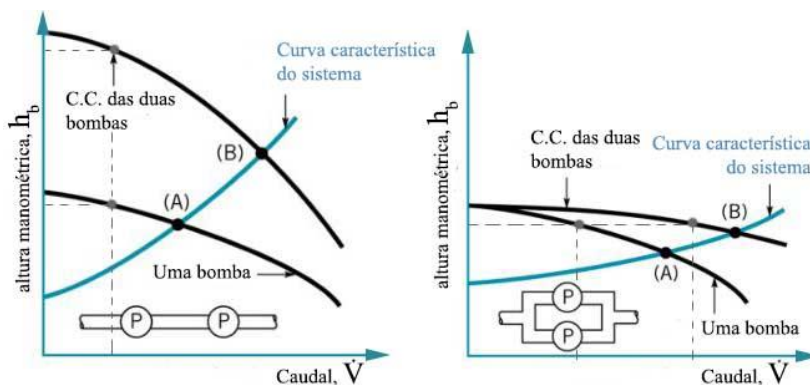
Onde o 2º membro não é mais do que a curva característica da instalação e daí a forma parabólica da curva. Se por exemplo fecharmos uma válvula, o  $h_L$  aumenta e gera-se uma nova curva para o sistema, mais fechada (relembrar equação de uma parábola). Assim, o ponto de funcionamento desloca-se ao longo da curva característica da bomba.



**Fig. 32 - Curvas características da bomba e instalação e NPSH requerido e disponível.**

Obter curva característica de bombas associadas em:

- série – somar os aumentos de cargas (para o mesmo caudal)
- paralelo – somar os caudais (para o mesmo aumento de carga)



**Fig. 33 - Efeito da associação de bombas em série (esq.) e paralelo (dª) e a curva característica resultante da associação.**

## -12.5 Análise dimensional e semelhança em turbomáquinas.

O funcionamento de uma bomba pode ser descrito por várias variáveis, as quais são função de parâmetros geométricos da bomba, do escoamento e do fluido.

$$h_a, \dot{W}, \eta = f(\underbrace{D, \ell_j, \epsilon}_{\text{geometria}}, \underbrace{Q, \omega}_{\text{dinâmica}}, \underbrace{\mu, \rho}_{\text{fluido}})$$

Fazendo análise dimensional para estas 3 principais características das bombas (aumento de carga real, potência de eixo e eficiência), e fazendo as seguintes simplificações

- fluido incompressível;
- desprezar efeitos da viscosidade dentro da bomba (o que experiências mostram que se pode fazer para valores de Re altos, como é o caso dentro das bombas);
- desprezar perda de carga em linha (as localizadas na bomba têm muito mais peso);
- assumir que todas as bombas são geometricamente semelhantes.

xegamos a 3 equações, uma para cada uma das variáveis:

$C_H = \frac{gh_a}{\omega^2 D^2} = \phi_1 \left( \frac{\dot{V}}{\omega D^3} \right)$	$C_W = \frac{\dot{W}_B}{\rho \omega^3 D^5} = \phi_2 \left( \frac{\dot{V}}{\omega D^3} \right)$	$\eta = \frac{\rho g \dot{V} h_a}{\dot{W}_B} = \phi_3 \left( \frac{\dot{V}}{\omega D^3} \right)$
--	--	--

Onde o termo dentro da **função independente** se chama **coeficiente de caudal** ( $C_Q$ ). Se duas bombas tem  $C_Q$  iguais, todos os outros são iguais respetivamente ( $C_{H1}=C_{H2}$  e  $C_{B1} = C_{B2}$ )

Estas leis permitem determinar as características de uma bomba em qualquer ponto de operação desde que se conheça o comportamento de uma bomba da mesma família num ponto de operação.

### +12.5.1 Leis de escala

Há dois casos relativos à análise de semelhança de bombas que aparecem muito. *Saber como as características de uma bomba variam com*

1 – *a mudança da velocidade de rotação* – Para uma bomba a operar com um dado  $C_Q$ , nas equações em cima fazer  $D_1 = D_2$ . É útil fazer isto quando temos dados de uma bomba que foi testada, e com as mesmas dimensões da nossa e cuja velocidade de operação conhecemos → para a nossa bomba a operar com um dado  $C_Q$ :

$$\dot{V} \sim \omega$$

$$h_r \sim \omega^2$$

$$\dot{W} \sim \omega^3$$

2 – *a mudança do diâmetro do impulsor* (rotor) – fazer  $\omega_1 = \omega_2$ . → Para bombas geometricamente semelhantes:

$$\dot{V} \sim D^3$$

$$h_r \sim D^2$$

$$\dot{W} \sim D^5$$

### + 12.5.2 Velocidade específica

Relacionando  $C_Q$  com  $C_H$ , através de uma razão, elimina-se o D e obtém-se um parâmetro adimensional chamado **velocidade específica**,  $N_s$ . É um parâmetro de grande utilidade, que

relaciona três parâmetros fundamentais (velocidade de rotação, caudal e altura de elevação). Sabendo  $\dot{V}, h_a, \omega$ , é possível saber qual a bomba mais adequada para uma aplicação com o auxílio deste conceito. Cada família de bombas tem uma faixa de  $N_s$ .

$$N_s = \frac{\omega \dot{V}^{0.5}}{(gh_a)^{3/4}}$$

Olhando para a fórmula pode-se ver que  $N_s$  altos correspondem a v. rotação ou caudais altos (caraterísticos de bombas axiais), e  $N_s$  baixos a  $h_a$  baixos (caraterísticos de bombas radiais).

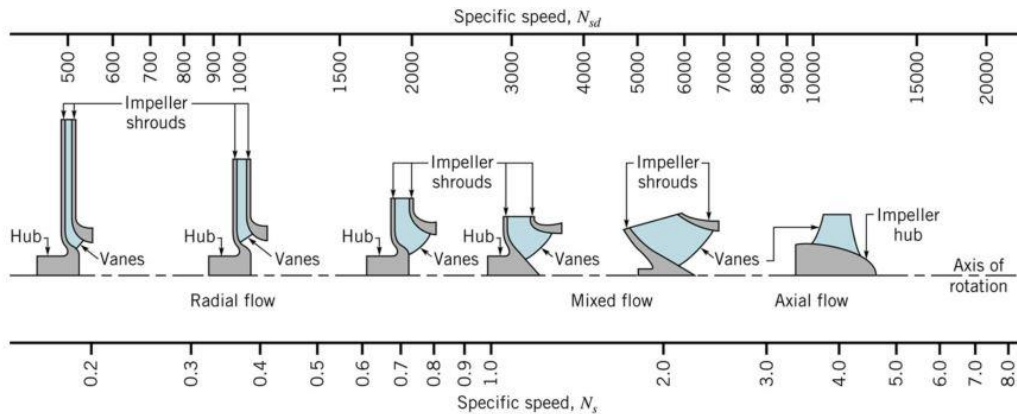


Fig. 34 - Variação da velocidade de sucção específica com o tipo de bomba.

- Para igual caudal, máquinas axiais são mais compactas (menor diâmetro) e rodam a velocidades mais elevadas
- Máquinas radiais têm uma altura de elevação mais elevada
- Máquinas axiais têm um caudal maior

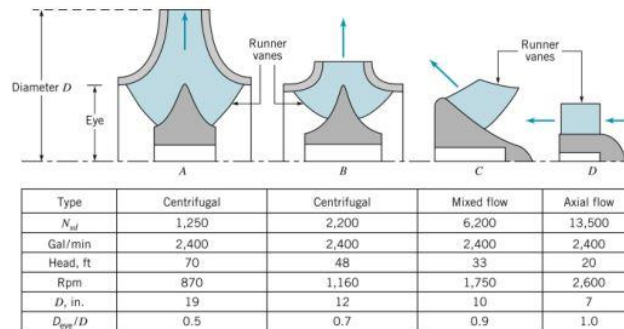


Fig. 35 - Comparação dos diferentes tipos de impulsores. Velocidade de sucção específica para bombas centrífugas com o mesmo caudal.

### +12.5.3 Velocidade de sucção específica. Outros parâmetros.

Substituindo na expressão da velocidade específica o  $h_r$  pela altura de sucção necessária, obtemos a velocidade de sucção específica  $S_s$ . Este parâmetro adimensional é muito útil na determinação das condições operacionais na sucção da bomba

As bombas de fluxo axial normalmente operam com caudais altos e cargas baixas (ex: para irrigação / drenagem). As de fluxo radial o contrário.

### -12.6 Bombas axiais e bombas mistas

A carga desenvolvida por uma bomba centrífuga inclui uma contribuição devido à ação centrífuga enquanto que a carga produzida por uma bomba de fluxo axial é devida principalmente à força tangencial aplicada no fluido pelas pás do propulsor.

Os parâmetros adimensionais e relações de escala vistos aplicam-se a todos os tipos de bombas. No entanto verifica-se que as características de potência e rendimento para as bombas centrífugas não depende tanto do caudal como as axiais.

### +12.7 Ventiladores

São utilizados para escoar gases. Como a sua densidade não varia muito ao atravessar os ventiladores pode-se considerar o escoamento como incompressível. Para o ar por exemplo só aumenta 7000Pa.

Também existem de fluxo radial, axial e misto. A análise é quase igual em tudo às bombas. Só se substitui  $h_r$  por  $p_r/\rho g$  no  $C_H$  obtendo-se assim, juntamente com a eficiência e o  $C_Q$ , a lei dos ventiladores.

Se fizermos  $C_{H1} = C_{H2}$  podemos relacionar dois ventiladores geometricamente semelhantes.

### -12.8 Turbinas

De impulso – o momento torsor é produzido do impacto dos jatos individuais ao baterem nas pás (daí o “impulso”?). Para baixo caudal, alta carga.

De reação – o rotor encontra-se completamente envolto em fluido. Existe queda de pressão e variação da velocidade relativa (fluido / pás da turbina). Para alto caudal, baixa carga.

$$W = Mt \cdot \theta \rightarrow \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} (Mt \cdot \theta) = Mt \cdot \omega$$

#### -12.8.1 Turbinas de impulso

A velocidade relativa do fluido em relação à pá em que embate só varia de direção, não de módulo, é essa variação de direção que causa o momento torsor. Então  $W_{\text{entrada}} = W_{\text{saída}}$  (velocidade relativa do fluido em relação à pá onde se desloca). Fazendo um triangulo de velocidades para a entrada e saída e combinando com as equações de  $M_t$  e potência da equação momento da quantidade de movimento **obtem-se**:

#### -12.8.2 Turbinas de reação

Apropriados para altos caudais, baixas cargas. O momento da quantidade de movimento, a pressão e a velocidade do fluido diminuem à medida que o fluido escoar pelo rotor da turbina e é assim que o rotor da turbina extrai energia do fluido.

Para muito pequenas cargas na alimentação da turbina, os melhores são axiais.

## +Cap. 9 – Escoamentos exteriores / sobre corpos imersos

### ++9.1 – Características gerais de escoamentos em torno de corpos

Escoamento exterior significa que o corpo é totalmente envolvido por fluido, que está imerso no fluido. Para análise de escoamentos exteriores em que o fluido é ar existe a área da aerodinâmica, quando é água, a da hidrodinâmica.

Vamos assumir que o fluido passa pelo objeto com velocidade constante e uniforme, regime permanente (o que apesar de muitas vezes não ser verdade – nos escoamentos turbulentos por exemplo – é de pouca importância). Lembrar também que o fluido estar parado e o objeto andar é a mesma coisa que o fluido a andar e o objeto parado, o que interessa é a velocidade relativa entre os dois, senão os túneis de vento não tinham utilidade...

As características do escoamento dependem bastante do aero/hidrodinamismo do corpo. Um corpo aero/hidrodinâmico provoca menos alterações no fluido que o rodeia.

### ++9.1.1 Conceitos de sustentação e arrasto e respectivos coeficientes aerodinâmicos

Quando um corpo se move através de um fluido este exerce sobre o fluido uma certa pressão (perpendicular à superfície do corpo, e que resulta do fluido querer ocupar o espaço que é “dele”) e uma certa tensão de corte (tangencial à superfície do corpo que resulta da viscosidade do fluido e de “agarrar” a superfície do objeto). As forças resultantes dessa distribuição de pressão e  $\tau$  têm nomes:

- na direção do escoamento – **Força de arrasto**,  $F_D$ ;
- na direção normal ao escoamento – **Força de sustentação**,  $F_L$ .

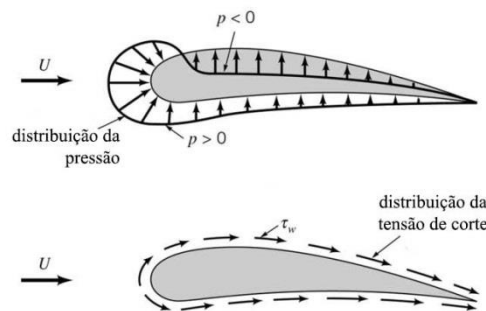


Fig. 36 - Tipos de forças que atuam num corpo bidimensional num escoamento exterior.

Ambas podem ser calculadas integrando o campo de pressões / tensões de corte à superfície do corpo. Só que esse campo é geralmente muito difícil de determinar (especialmente o as tensões de corte, visto que para o das pressões podem-se usar várias tomadas de pressões e fazer um valor médio) e muitas vezes xega apenas saber as forças resultantes. Então, o que se costuma fazer é recorrer a expressões que se adequem ao que se verifica experimentalmente, e daí determinam-se as forças. É assim que surgem os **coeficientes de arrasto**  $C_{Drag}$  e **sustentação**  $C_{Lift}$ , onde “A” é a área projetada na direção do escoamento, exceto em perfis de asas ou placas planas, onde essa área é a normal ao escoamento (convenção).

$$F_{D \text{ ou } L} = \frac{\rho_{fluido} v_{relativa}^2}{2} C_{D \text{ ou } L} A_{ref}$$

Esta fórmula foi obtida integrando a distribuição de pressão e  $\tau$  segundo a direção do escoamento (para o arrasto) e perpendicular ao escoamento (para a sustentação). Assim, para cada uma das forças podemos ou não ter uma componente viscosa e outra de pressão.

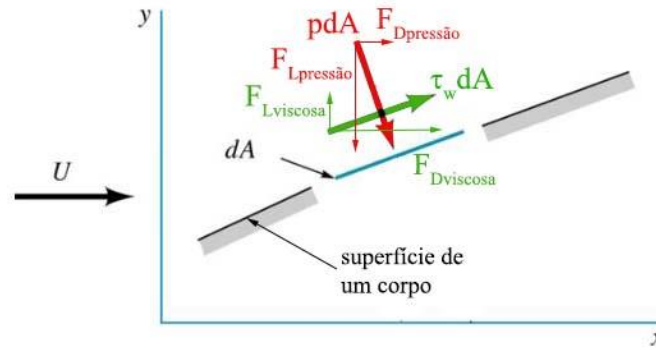


Fig. 37 - A decomposição das forças de arrasto e de sustentação nas suas componentes viscosas e de pressão num elemento de área de uma superfície.

Para um dado corpo, o escoamento depende do tamanho do corpo, orientação, velocidade e propriedades do fluido.

**+9.1.2 Escoamento separado, zona de recirculação, esteira, pontos de estagnação, separação e recolagem.**

Há três tipos principais de escoamento a ter em conta:

- Bi-dimensional, infinitamente longo numa das direcções e secção uniforme em tamanho e forma, por exemplo, escoamento ao longo de uma placa plana.
- Axi-simétrico, por exemplo, à volta de um cilindro.
- Tri-dimensional

Ao estudar estes escoamentos usamos sempre placas planas e cilindros, porque as características dos escoamentos são semelhantes a outros corpos aero/hidrodinâmicos e rombudos respetivamente.

**Placa plana:**

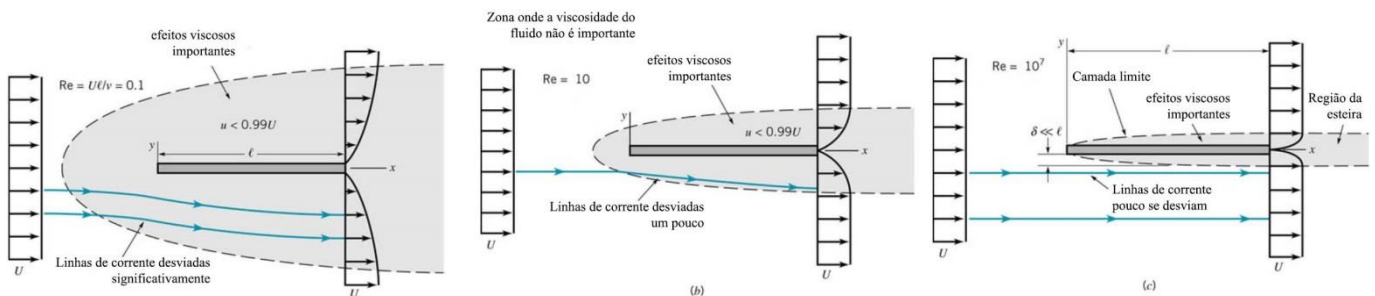


Fig. 38 - Influência do nº de Reynolds no escoamento viscoso à volta de uma placa plana paralela ao escoamento.

Para baixos  $Re$ , os efeitos viscosos são importantes e o objeto altera bastante o fluido em redor dele, dentro duma zona chamada **camada limite**. A camada limite é uma região muito fina, (comparativamente ao comprimento do objeto) de espessura que se costuma usar  $\delta$  para representar, e adjacente à superfície do corpo onde os efeitos viscosos são muito importantes e fora da qual o fluido se comporta como invíscido. Só faz sentido falar da camada limite para  $n^\circ$ s de  $Re$  altos porque em escoamentos com  $n^\circ$ s de  $Re$  baixos, a viscosidade é importante em todo o escoamento, e portanto falar em camada limite não faria sentido (tal como não se fala em subcamada viscosa no escoamento interior laminar, porque os efeitos viscosos são importantes em

todo o escoamento e não só junto à parede do tubo). Tal como a subcamada viscosa, com o aumento do nº de Re, fica mais pequena.

**Escoamento separado** ocorre para objetos pouco aerodinâmicos, e qe consiste no facto de a inércia do fluido ao passar pelo objeto o impedir de acompanhar a superfície do mesmo.

Uma **esteira** forma-se a jusante do objeto onde o regime do escoamento passa a transitório ou turbulento.

### Cilindro

Muitas características semelhantes ao do escoamento ao longo de uma placa plana, com uma particularidade... a existência de escoamento separado: região que encerra fluido em que a velocidade é de sentido oposto ao sentido da velocidade a montante do corpo.

**Ponto de separação** é o ponto na superfície do corpo que marca o início da zona de escoamento separado. A esteira a jusante do cilindro tem uma forma irregular e um comprimento elevado.

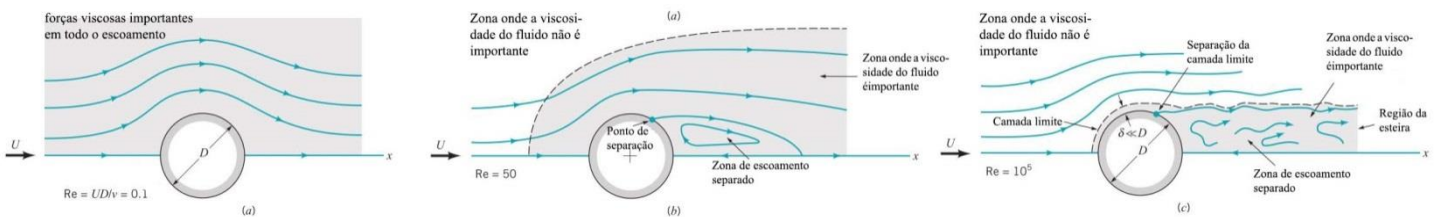


Fig. 39 - Influência do nº de Reynolds num escoamento viscoso à volta de um cilindro.

## +9.2 Caraterísticas da camada limite

A camada limite em escoamentos viscosos e devido à condição de não escorregamento. Fora da camada limite o fluido comporta-se como invíscido, mas tal consideração só pode ser feita para valores de Re altos. Para Re baixos (<1000), não se fala em camada limite, porque não é só uma parte do escoamento que é afetado predominantemente pela viscosidade do fluido, mas sim todo o escoamento (ver figura acima).

### -9.2.1 Camada limite sobre uma superfície plana. Espessura de deslocamento, espessura de quantidade de movimento e factor de forma.

Neste capítulo vai ser estudado o caso mais simples que é escoamento de fluido viscosos e incompressível numa placa plana de comprimento muito grande. Re vai ser definido para o comprimento característico, x, que é a distância ao bordo de ataque.  $Re_x = \frac{\rho vx}{\mu}$ . Como o comprimento é muito grande garantimos que temos valores de Re elevados o que permite a existência da camada limite.

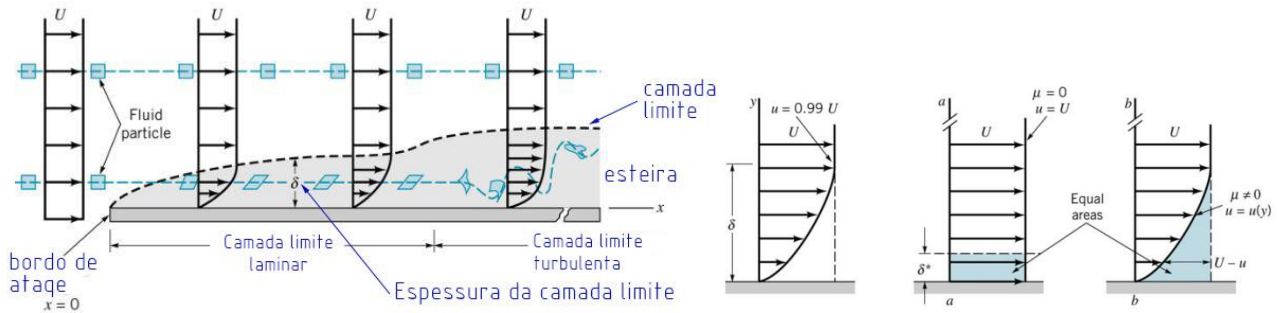


Fig. 40 – À esq. duas partículas de fluido escoam, uma dentro e outra fora da camada limite. À d<sup>a</sup> o significado da espessura de deslocamento.

**Espessura de deslocamento**,  $\delta^*$ , é a espessura do perfil de velocidades não alterado pelos efeitos viscosos qe é necessário remover para qe o caudal nesse caso (fluido invíscido) seja igual ao caudal do perfil de velocidades alterado pela viscosidade (i. e., na camada limite). Outra definição é qe a espessura de deslocamento representa o aumento de espessura do corpo necessário para qe o caudal do escoamento invíscido seja igual ao dos escoamento viscoso.

**Espessura de quantidade de movimento** é outra definição para a espessura da camada limite relacionada com a redução do fluxo de quantidade de movimento na camada limite.

**+9.2.2 Equações de camada limite laminar em formulação diferencial. Análise dimensional das equações de camada limite bi-dimensional. Solução de Prandtl/Blasius.**

Por simplificação das equações de Navier-Stokes (escoamento 2D, pressão constante ao longo do mesmo, velocidade normal ao escoamento muito menor que na direção do escoamento, regime permanente, e desprezando efeitos gravitacionais (condições válidas apenas para a camada limite)) e pelo uso de transformação de coordenadas foi possível (Blasius) transformar as equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias, as quais podem ser integradas computacionalmente e daí xegar-se a expressões para a espessura da camada limite e tensão de corte na parede.

**-9.2.3 Soluções aproximadas da camada limite turbulenta. Formulação integral de camada limite.**

A formulação integral é um método alternativo de determinar as tensões de corte num corpo, num escoamento exterior, útil para a determinação do arrasto causado ao mesmo, nas condições da camada limite.

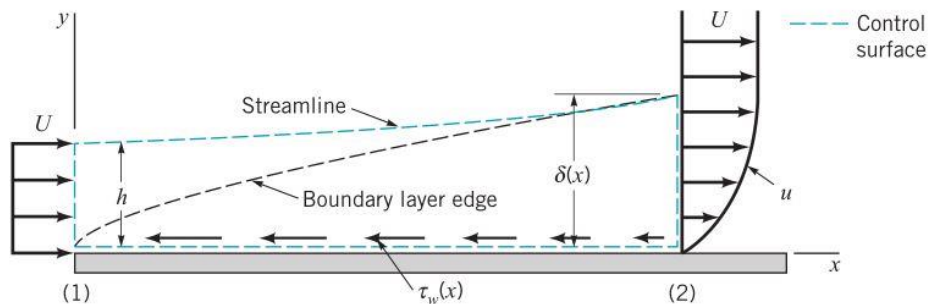


Fig. 41 – Volume de controlo usado para a formulação integral da camada limite.

Considerando este volume de controlo, e aplicando-lhe a equação da quantidade de movimento segundo a direção do escoamento, e notando que a resultante das forças de pressão é nula, e que tem de existir conservação de massa, é possível obter uma expressão que dá o arrasto em função da diferença de fluxo de quantidade de movimento no volume de controlo.

$$F_D = D = \rho b \int_0^\delta u(U - u)dy$$

Onde D é a força de arrasto (notação do Munson). Manipulando um pouco mais podemos chegar a

$$\tau_p = \rho U^2 \frac{d\Theta}{dx}$$

Onde  $\Theta$  é a espessura da camada limite de quantidade de movimento.

#### **-9.2.4 Transição de camada limite de regime laminar a turbulento.**

Há que notar especialmente a mudança do perfil de velocidades, do laminar para turbulento, ficando mais achatado.

“A transição pode ser despoletada por uma pequena rugosidade da placa que tem consequências diferentes, caso a rugosidade ocorra na região laminar ou na região de transição. No primeiro caso, a instabilidade provocada pela rugosidade será atenuada e, no segundo caso, amplificada, despoletando o processo de transição de regime laminar para turbulento.

A camada limite sobre placa plana em regime laminar passará a regime turbulento para qualquer valor da velocidade exterior, desde que a placa seja suficientemente longa; ou seja, desde que o número de Reynolds exceda o valor crítico

O Reynolds crítico é da ordem de  $2 \times 10^5$  a  $3 \times 10^6$ , e depende da rugosidade da superfície, intensidade de turbulência no escoamento exterior, etc.

Para efeito de referência considera-se:

$$Re = 5 \cdot 10^5 = Re_{crit} = \frac{\rho U x_{crit}}{\mu}$$

Onde “U” é a velocidade fora da camada limite. A transição laminar para turbulento não é súbita e não ocorre num ponto específico bem definido, mas numa região –região de transição. Uma vez a transição iniciada ela propaga-se para jusante, ao longo do escoamento.”

Tal como nos escoamentos interiores, também os perfis de velocidades são diferentes se o escoamento for laminar e turbulento.

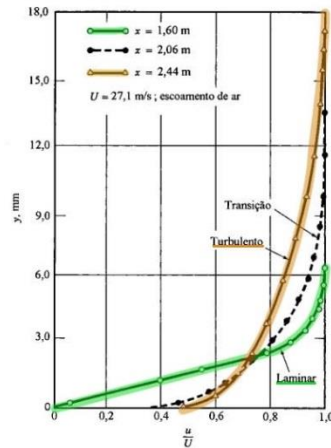


Fig. 42 – Perfis de velocidade típicos para uma placa plana para os diferentes tipos de escoamento.

**+d9.2.5 Camada limite turbulenta.**

Devido à existência de redemoinhos a nível molecular e ao movimento aleatório das partículas de fluido neste escoamento, tal como nos escoamentos interiores,  $\tau_{camada\ limite\ turbulenta} > \tau_{camada\ limite\ laminar}$ . Esta última foi possível determinar em capítulos anteriores por soluções aproximadas, já a primeira ainda só é possível determinar por aproximações.

Não há soluções exatas para escoamento na camada limite turbulenta, só numéricas e aproximadas, entre as quais a integral. Obtendo a tensão de corte na parede é possível determinar a força de arrasto (viscoso) e daí o coeficiente do mesmo nome. Então é possível desenhar o diagrama seguinte.

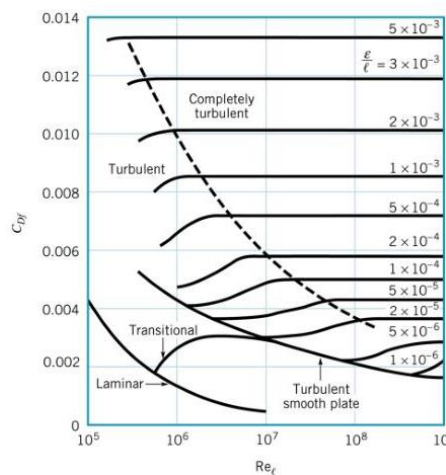


Fig. 43 - Coeficiente de arrasto viscoso para uma placa plana paralela ao escoamento

Notar a semelhança entre o diagrama de coeficiente de arrasto e o de Moody. O coeficiente de arrasto viscoso é o fator de fricção dos escoamentos exteriores. A principal diferença entre os dois é que o escoamento numa camada limite (com gradiente de pressão nulo) sobre uma placa plana é um balanço entre forças de inércia e forças viscosas, e o escoamento no interior de um tubo o balanço entre forças de pressão e forças viscosas.

**-9.2.6 Camada limite na presença de gradiente de pressão.**

Até agora tratou-se do escoamento por cima de uma placa plana, o qual é dos poucos casos onde a pressão é constante por todo o fluido.

Quanto mais rombudo for o corpo, maior é o gradiente de pressão a que está sujeito (primeiro favorável, i.e. na direção do escoamento, e depois desfavorável). Quanto maior esse gradiente mais as possibilidades de ocorrer separação do escoamento (causando um aumento significativo do arrasto). Daí que os corpos aero/hidrodinâmicos são feitos para não terem grande gradiente de pressões, especialmente não tendo uma pressão muito baixa na esteira.

O escoamento separado é um escoamento diferente do principal, com linhas de corrente próprias. É uma zona onde o escoamento principal não consegue xegar. Esta separação ocorre porque o fluido perde energia pelo caminho, devido à viscosidade do fluido, e então já não tem suficiente para “curvar”, e vai a direito. Por exemplo no caso do uma esfera, no fundo para o fluido viscoso poder percorrer de um lado ao outro da esfera, teria que tomar balanço.

A energia cinética e a quantidade de movimento associadas ao escoamento na camada limite turbulenta são bastante maiores que as associadas à laminar. Daí o ponto de separação com o escoamento turbulento ocorrer mais para trás do que com o escoamento laminar. Q

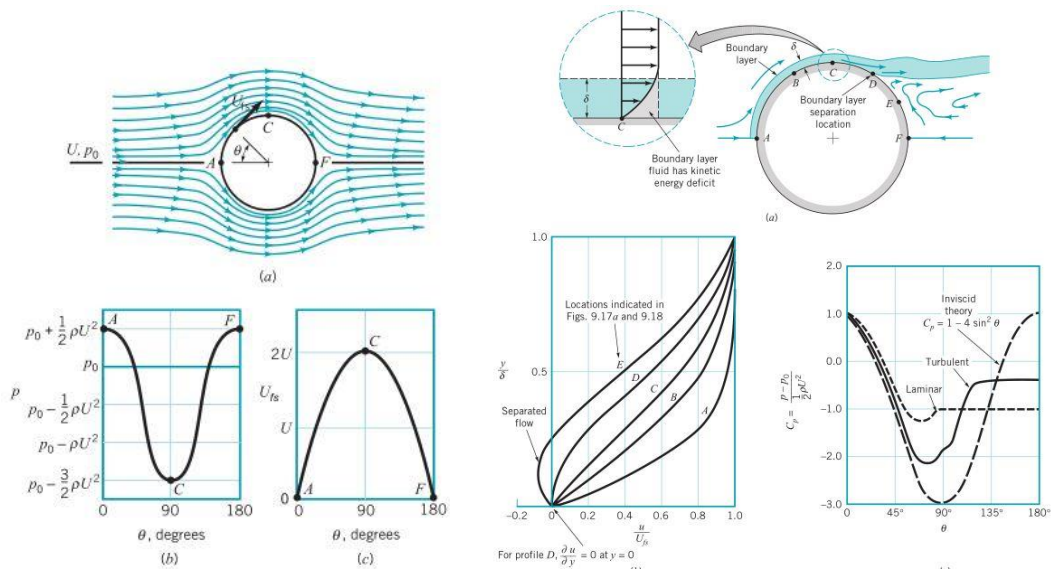


Fig. 44 - Variação da pressão do escoamento e velocidade ao longo da superfície de uma esfera num fluido invíscido (esq.); Distribuição da pressão e variação da velocidade à superfície de um cilindro para fluido invíscido e viscoso (d<sup>a</sup>)

### -9.2.7 Formulação integral de camada limite com gradiente de pressão

## +9.3 Arrasto/Resistência aerodinâmica. Influência da forma do corpo e do número de Reynolds.

A resistência aerodinâmica resulta das forças de pressão e tensão de corte na parede. É determinada experimentalmente ou computacionalmente e relaciona-se com o coeficiente de arrasto  $C_D$  do objeto em que

$$C_D = \Phi(\text{forma}, Re, Ma, Fr, \epsilon/l)$$

A resistência aerodinâmica atua segundo a direção do escoamento.

$$C_D = C_{D_{\text{fricção ou viscosas}}} + C_{D_{\text{pressão}}}$$

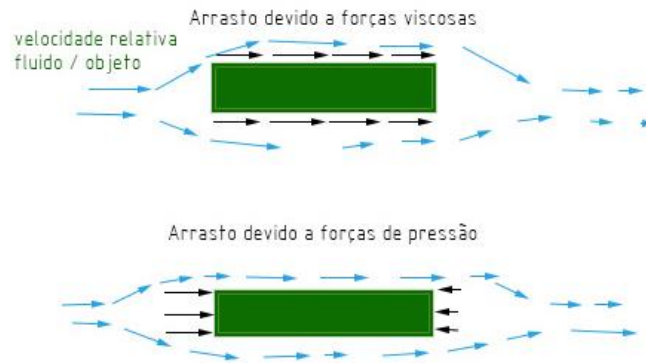


Fig. 45 - Decomposição do arrasto devido à viscosidade e devido à pressão.

### -9.3.1 Arrasto devido a forças viscosas.

- Tal como nos escoamentos interiores, o fluido ser viscoso faz com que as suas partículas se agarrem à superfície dos corpos à volta do qual escoam;
- Como a viscosidade dinâmica dos fluidos mais comuns é pequena, os números de Reynolds são altos e portanto a contribuição da tensão de corte para o arrasto total é muito pequena (ver Fig. 43).
- Em escoamentos de número de Reynolds elevado em redor de corpos rombudos ou não-fuselados, o arrasto é praticamente só de pressão.
- Em escoamentos em redor de corpos fuselados, o arrasto é quase só viscoso.
- $F_{D_{\text{viscoso}}} \sim v$

### -9.3.2 Arrasto devido a forças de pressão.

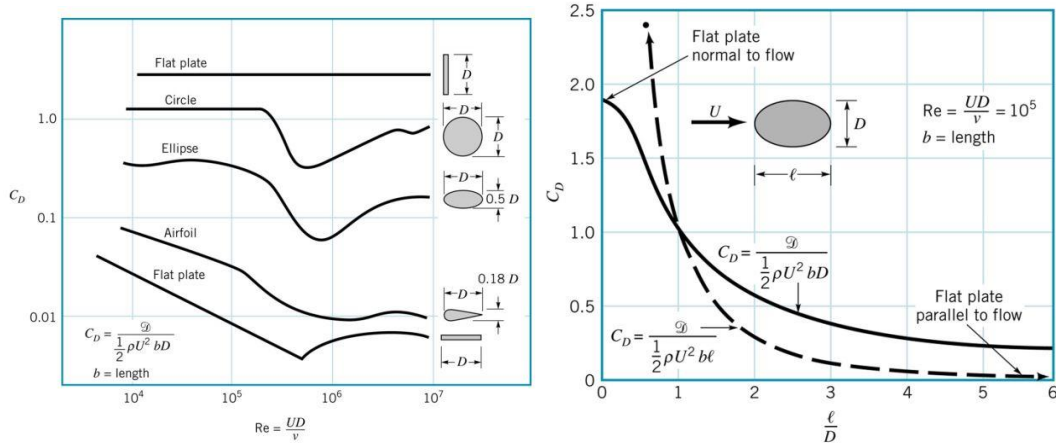
- Em escoamentos de número de Reynolds elevado em redor de corpos rombudos ou não-fuselados, a contribuição dos efeitos de pressão para a resistência é a maior.
- O arrasto devido a forças de pressão está muito associado ao escoamento a jusante do corpo – a esteira – cuja existência depende da viscosidade. *Para um fluido invíscido, não há qualquer tipo de arrasto.*
- $F_{D_{\text{pressão}}} \sim v^2$

### --9.3.3 Arrasto / resistência aerodinâmica do escoamento em torno de objectos bi e tri-dimensionais.

À medida que a forma do corpo é menos fuselada (corpo mais rombo), a influência do número de Reynolds diminui. É a forma do corpo que determina o valor de  $C_D$ .

#### *Dependência da forma*

Objetos com forma rombuda têm geralmente (sempre?) maiores  $C_D$  do que objetos com forma aero/hidrodinâmica e são menos dependentes do número de Reynolds.



**Fig. 46 - Influência da forma e a dependência do coeficiente de arrasto no nº de Reynolds.**

*Quanto menos aerodinâmico é um corpo, menor é a sua dependência com o nº de Reynolds.* Se o mel e a água tivessem a mesma densidade, empurrar uma placa debaixo de água deve custar tanto como debaixo de mel. No entanto, para a mesma condição de densidade, é mais difícil nadar em mel do que em água. O mel tem maior viscosidade que a água (portanto menor Re, se a densidade fosse a mesma) e uma pessoa a nadar é um corpo relativamente hidrodinâmico.

**Dependência do número de Reynolds**

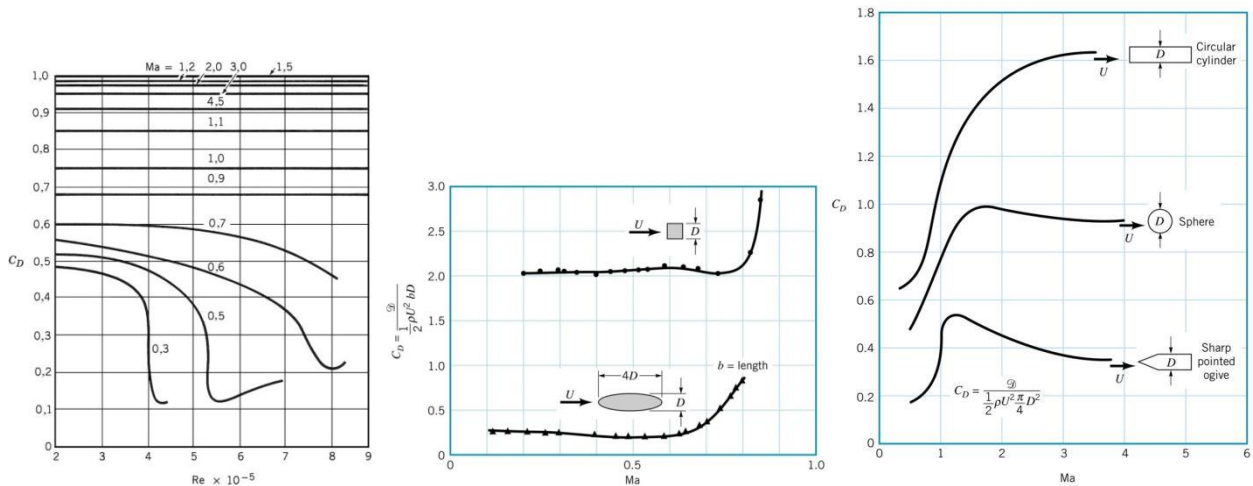
Quanto maior a parte do  $C_D$  que é devida às forças viscosas, maior a dependência de Re (ver Fig. 46). Se a maior componente do  $C_D$  for devida às forças de pressão, é como se as forças de inércia tivessem mais peso (fluido a embater num corpo rombo tem de mudar bastante a sua direção), e isso é como tivessem um nº de Reynolds muito alto em que as forças de inércia é que dominam.

Corpo	$C_D$
Disco perpendicular ao escoamento 	$20.4 / Re$
Disco paralelo ao escoamento 	$13.6 / Re$
Esfera 	$24.0 / Re$
Semi-esfera 	$22.2 / Re$

**Fig. 47 - Para escoamentos laminares,  $C_D$  diminui com aumento do nº de Re.**

**Dependência da compressibilidade do fluido**

A discussão até agora tem sido sobre escoamentos incompressíveis. No entanto se a velocidade do escoamento for alta o suficiente os efeitos de compressibilidade tornam-se importantes e o  $C_D$  passa a ser função também de Ma. Essa função é complexa, mas geralmente simplifica-se dizendo que para só a partir de  $Ma > 0.5$  é que estes efeitos devem ser considerados no  $C_D$ , aumentando especialmente perto de  $Ma = 1$ , aumento esse devido às ondas de choque na passagem do escoamento sub-sônico.



**Fig. 48 - Efeitos dos nºs de Mach e Reynolds no coeficiente de arrasto de uma esfera (esq.). Dependência do coeficiente de arrasto no nº de Mach (meio). Influência da forma de um corpo no coeficiente de arrasto em escoamentos supersônicos (d<sup>a</sup>).**

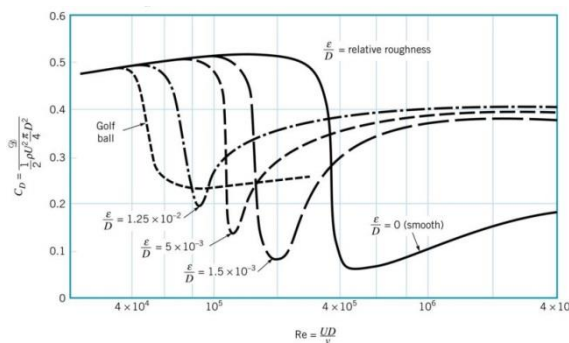
Para números de Reynolds altos, os efeitos de compressibilidade podem não ser desprezáveis e  $C_D$  dependerá também do número de Mach ( $Ma$ )

Para escoamento subsônico e  $Ma < 0.5$ ,  $C_D$  não depende de Mach.

Para escoamento supersônico a forma do corpo influencia muito como  $C_D$  depende de  $Ma$ . Corpos pontiagudos exibem o valor máximo de  $C_D$  para  $Ma \approx 1$ , devido ao modo como a formação e propagação de ondas de choque ocorre.

*Dependência da rugosidade superficial do corpo*

Geralmente para corpos aerodinâmicos, com o aumento da rugosidade aumenta o arrasto. Para corpos rombudos, um aumento da rugosidade pode diminuir o arrasto (ex. bola de golfe). Isso deve-se ao facto de que esse aumento de rugosidade pode favorecer a passagem da camada limite para turbulenta. Ora as camadas limites turbulentas têm uma menor zona de esteira que as laminares e, assim, há um menor arrasto devido à pressão.



**Fig. 49 - Antecipação do nº de Reynolds crítico e diminuição do coeficiente de arrasto devido ao aumento da rugosidade relativa numa esfera (ex. da bola de golfe).**

*Dependência do número de Froude*

Relaciona o arrasto causado pela onda que é necessário gerar quando um corpo se move num fluido com superfície livre (por exemplo um barco). Portanto só é importante na existência de uma superfície livre.



**Fig. 50 - Muitos barcos têm esta forma estranha para minimizar o arrasto causado pelas ondas que o barco cria ao "cortar" a água.**

### *Arrasto para corpos compostos*

Muitas vezes adiciona-se as contribuições de cada corpo, quando isso é possível e não traz erros de maior.

## **+9.4 Sustentação. Escoamento em torno de perfis alares.**

Em corpos assimétricos ou que produzam escoamento assimétrico, para além do arrasto também teremos sustentação.

### **9.4.1 Distribuição de pressão na superfície do corpo.**

### **9.4.2 Conceito de circulação**

## Bibliografia

Munson et al. (2009). *Fundamentals of Fluid Mechanics*. 6h Ed. USA: Wiley.

Palma, J.M. Laginha (2013). Slides da U.C. de Mecânica dos Fluidos II. FEUP. Porto.

Website da NASA: <http://www.nasa.gov/>

[www.estudomec.info](http://www.estudomec.info)

