Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Departamento de Engenharia Mecânica
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica
Ano Letivo 2012/2013

MECÂNICA DOS SÓLIDOS

2º Teste, 11 de Junho de 2013

Duração: 120 minutos.
Com consulta de formulário.

---

1. Considere o conjunto representado na Figura 1, constituído por um veio maciço AB com $2\ \mathrm{m}$ de comprimento e um elemento linear de secção tubular BC com um comprimento de $1\ \mathrm{m}$, ligados pela secção comum em B. O elemento linear de secção tubular tem a forma de um retângulo com dimensões $0{,}3R \times 0{,}7R$ e uma espessura uniforme de $10\ \mathrm{mm}$. O conjunto é fabricado em aço ($G = 80\ \mathrm{GPa}$, $\sigma_{ced} = 350\ \mathrm{MPa}$) e está encastrado em A, estando a extremidade C livre. O conjunto está submetido a um momento torsor de $5\ \mathrm{kNm}$.

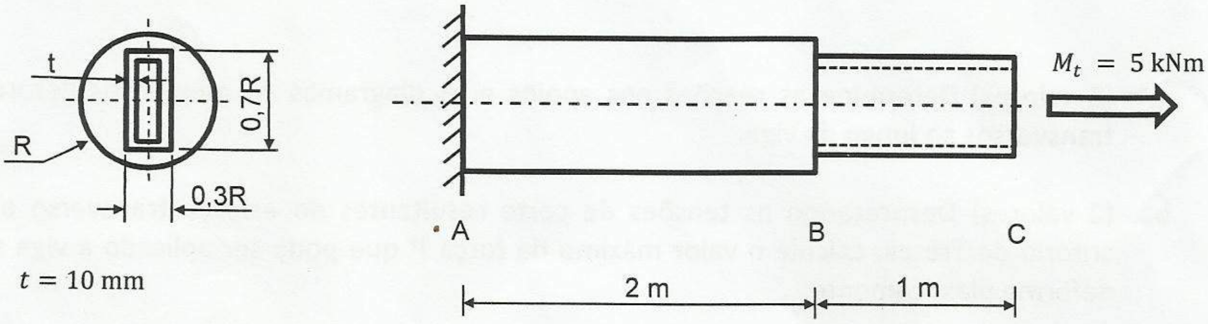


Figura 1

Determine:

a. (3 valores) O raio (R) do veio maciço AB de forma que $\tau_{máx} < 50\ \mathrm{MPa}$.

b. (2 valores) A rotação máxima da peça.
Nota: se não resolveu a alínea anterior considere $R = 110\ \mathrm{mm}$

c. (4 valores) O raio (R) do veio maciço AB de forma que a $\tau_{máx} < 50\ \mathrm{MPa}$ quando o conjunto é submetido simultaneamente ao momento torsor de $5\ \mathrm{kNm}$ e a um esforço normal de $10\ \mathrm{kN}$.

2. Considere uma viga em aço ($E = 210$ GPa, $\sigma_{ced} = 300$ MPa) com as dimensões indicadas na Figura 2a) e carregada de acordo com o esquema representado na Figura 2b).

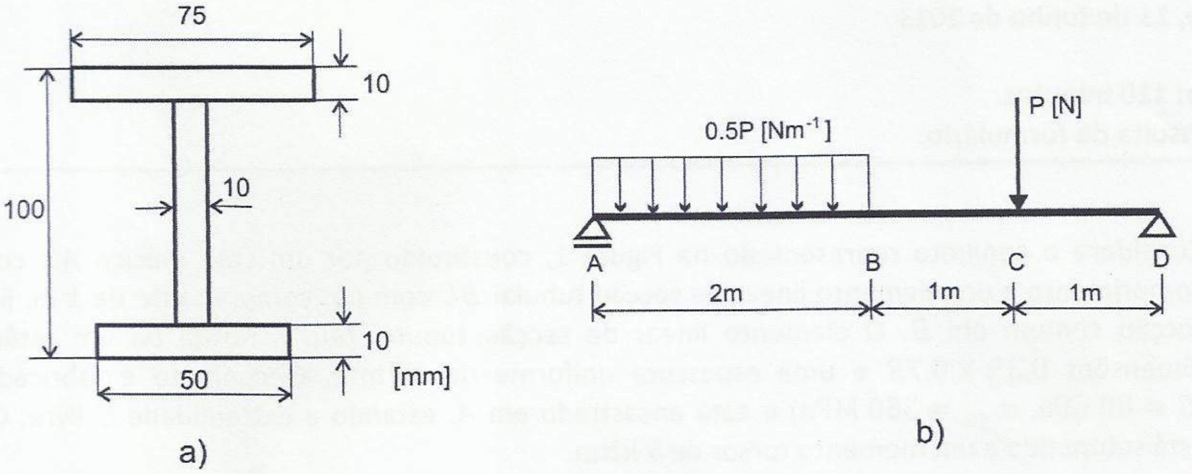


Figura 2

a. (3 valores) Determine as reações nos apoios e os diagramas de momentos fletores e esforços transversos ao longo da viga.

b. (2 valores) Desprezando as tensões de corte resultantes do esforço transverso e utilizando o critério de Tresca, calcule o valor máximo da força P que pode ser aplicado à viga sem que esta deforme plasticamente.

c. (2 valores) Determine os valores das tensões de corte nas zonas de ligação entre a alma e as abas da viga na secção onde o esforço transverso é máximo.
Nota: se não resolveu a alínea anterior considere $Vmáx = 15.25$ kN.

d. (4 valores) Determine o deslocamento vertical em C e a rotação em A.
Nota: se não resolveu a alínea anterior considere $P = 15.25$ kN.

Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Departamento de Engenharia Mecânica
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica
Ano Lectivo 2011/2012

MECÂNICA DOS SÓLIDOS

1ª Teste, 10 de Abril de 2012

Duração: 60 minutos.
Com consulta de formulário.

---

1. A matriz de tensão num ponto material de um sólido é dada por:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 40 & 20 \\ 40 & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ 20 & \tau_{zy} & -50 \end{bmatrix} \; [MPa]$$

As propriedades elásticas do material são as seguintes: $E = 210GPa$; $\upsilon = 0.3$. O vetor tensão resultante nesse ponto associado a um plano de corte cuja direção normal tem como versor $\hat{n} = \{\sqrt{2}/2, \quad -\sqrt{2}/2, \quad 0\}^T$ é: $\vec{T} = \{60, \quad -40, \quad 0\}^T$ [MPa].

Determine:

a. (4 valores) As componentes σ_{xx}, σ_{yy} e τ_{zy} da matriz de tensão.

b. (4 valores) A direção da tensão de corte que atua no plano referido na alínea anterior. Nota: se não resolveu a alínea anterior considere $\sigma_{xx} = 125MPa$, $\sigma_{yy} = 97MPa$ e $\tau_{zy} = 20MPa$.

c. (3 valores) A matriz de deformações.

d. (3 valores) As deformações principais e as direções principais de deformação.

e. (3 valores) A deformação linear nos planos octaédricos.

f. (3 valores) Utilizando um fator de segurança N=1.5 determine o valor mínimo da tensão de cedência plástica do material (σ_{ced}) para que o ponto considerado não deforme plasticamente.

Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Departamento de Engenharia Mecânica
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica
Ano Lectivo 2011/2012

MECÂNICA DOS SÓLIDOS

2º Teste, 19 de Junho de 2012

Duração: 120 minutos.
Com consulta de formulário.

---

1. Considere a peça tubular de espessura uniforme t=5mm e com 3m de comprimento representada na Figura 1. A peça é fabricada em aço (G=80GPa, $\sigma_{ced} = 350\text{MPa}$) e está encastrada numa extremidade, estando a outra extremidade livre.

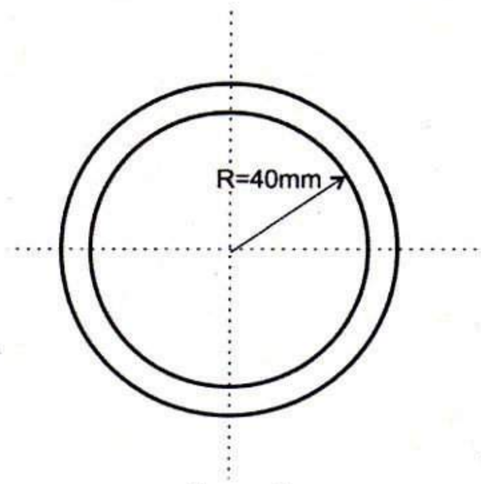


Figura 1

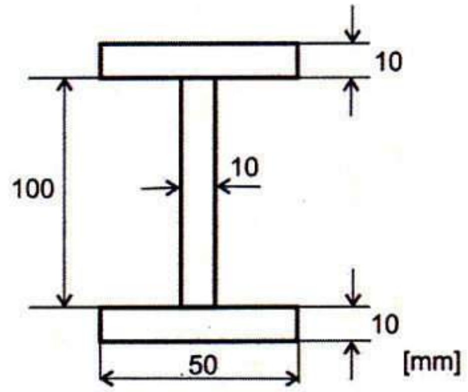
Determine:

a. (2,5 valores) O momento torsor máximo que pode ser aplicado à peça sem que esta deforme plasticamente.

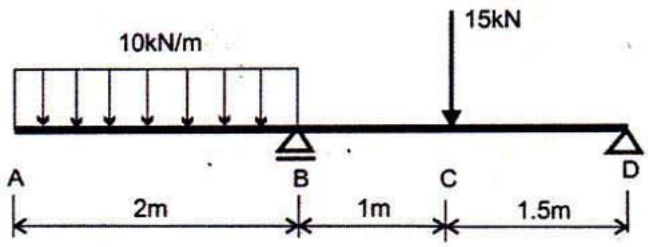
b. (2,5 valores) O momento torsor máximo que pode ser aplicado à peça de forma a que a sua rotação máxima não exceda 3°.

c. (4 valores) Considerando que a peça está submetida a um momento torsor de 4kNm determine o valor máximo do momento fletor que pode aplicar à peça sem que esta deforme plasticamente. Nota: o momento de inércia de um veio maciço de secção circular e diâmetro d é: $I_z = \frac{\pi d^4}{64}$.

2. Considere uma viga em aço (E=210GPa, $\sigma_{ced} = 350$MPa) de secção em $\mathbf{I}$ com as dimensões indicadas na Figura 2a) e carregada de acordo com o esquema representado na Figura 2b).



a)



b)

Figura 2

Determine:

a. (3 valores) As reações nos apoios e os diagramas de momentos fletores e esforços transversos ao longo da viga.

b. (2 valores) A tensão normal máxima aplicada na viga.
<u>Nota</u>: se não resolveu a alínea anterior considere: $M_{máx} = -20$ kNm.

c. (2 valores) O valor absoluto da tensão normal e da tensão de corte na zona de ligação entre a alma e a aba da viga na secção onde o esforço transverso é máximo.
<u>Nota</u>: se não resolveu a alínea anterior considere: $M = -20$ kNm e $V = 20$ KN.

d. (4 valores) O deslocamento vertical em A e a rotação em B.

Universidade do Porto FEUP Faculdade de Engenharia	Departamento de Engenharia Mecânica **Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica**
Duração: 30 minutos	2011-06-08

Exame de *Mecânica dos Sólidos - parte Teórica*

Nota: *Não é permitida a consulta dos apontamentos da disciplina nem livros.*

Pergunta 1

(1,5) a) Considerando a distribuição de tensões que actua nas faces de um elemento de volume elementar sujeito à acção de um sistema de forças arbitrárias, incluindo forças de superfície e de volume, deduza a equação de Equilíbrio de Forças segundo a direcção do eixo dos xx.

(1,0) b) Escreva as expressões que permitem calcular em coordenadas cartesianas as componentes do campo de deformações, sendo conhecido o campo de deslocamentos u, v e w associado ao corpo material em estudo.

Pergunta 2

(1,5) O que entende por função de Saint-Venant Φ(x,y), matematicamente definida pela equação (diga em que tipo de problemas que estudou ela é aplicada) :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta$$

Pergunta 3

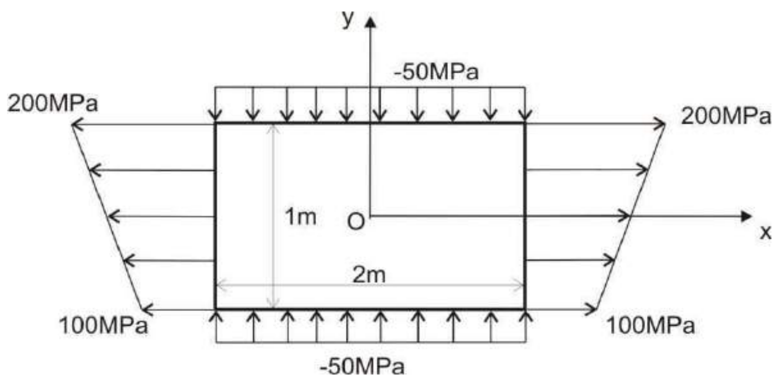
(1,0) Explique qual a diferença entre Flexão Pura, Flexão Plana e Flexão Desviada.

Universidade do Porto FEUP Faculdade de Engenharia	Departamento de Engenharia Mecânica **Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica**
Duração: 2 horas	2011-06-08

Exame de *Mecânica dos Sólidos - parte Prática*

Nota: *É permitida a consulta de livros.*

1. Uma placa de aço, rectangular (E=200GPa, ν=0,3) com as dimensões de 2x1m^2 e uma espessura de 1mm, é solicitada da forma representada na figura seguinte.

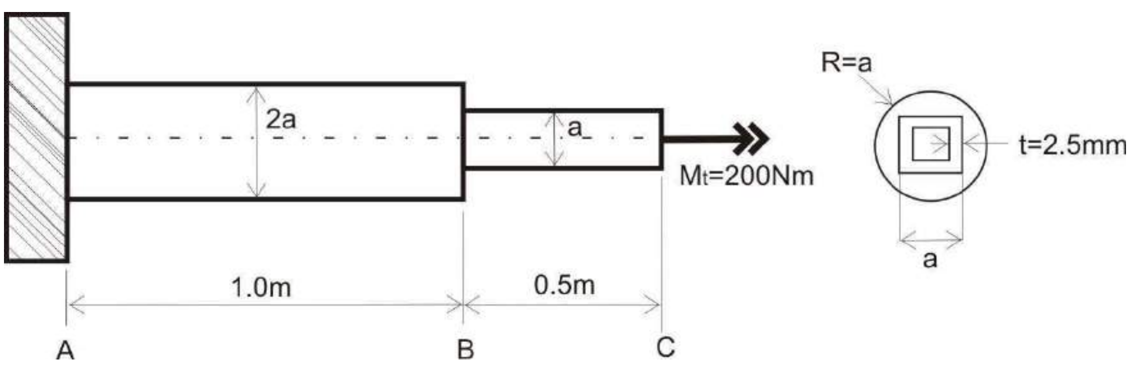


a) (1,5) Demonstre que o campo de tensões, definido por σ_{xx} = 50y+150 MPa , σ_{yy} = –50 MPa , sendo nulas as outras componentes do tensor das tensões quando representado no sistema de eixos Oxyz, só é admissível se for nulo o campo das forças por unidade de volume.

b) (2,0) Determine a tensão de corte máxima no centro da placa e a equação do plano segundo o qual esta actua.

c) (1,5) Calcule a deformação linear no centro da placa segundo uma direcção que faz um ângulo de 30º com o eixo O-x.

2. O veio representado na figura seguinte é composto de dois segmentos, ambos em aço (G=90GPa, τ_{ced}=150MPa), um de secção circular (diâmetro 2a) e o outro de secção tubular quadrada com uma parede fina. O conjunto é submetido a um momento torsor de intensidade constante M_t=200Nm entre as secções extremas A e C.

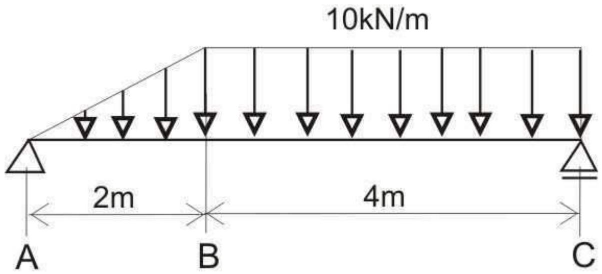


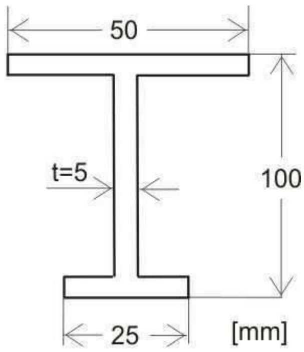
a) (1,5) Detemine o valor mínimo da dimensão (a) de forma a que a tensão de cedência ao corte (τ_{ced}) não seja excedida em nenhum ponto material do conjunto dos dois veios.

b) (1,5) Considerando a=20mm calcule o ângulo de torção máximo que ocorre no conjunto.

V.S.F.F.

3. Considere a viga em aço (E=200GPa, ν=0.3) com uma espessura constante (t=5mm) representada na figura seguinte.





a) (1,0) Determine as reacções nos apoios.

b) (2,0) Represente os diagramas dos esforços transversos e dos momentos flectores ao longo do eixo da viga.

c) (1,0) Calcule o valor máximo da tensão normal de flexão.

d) (1,0) Calcule o valor máximo da tensão de corte na zona de ligação entre a alma e a aba da parte superior da viga.

e) (2,0) Determine o deslocamento vertical e a rotação do ponto B.

DEMEGI (MS #01)

CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

QUESTÃO 1: Um corpo elástico, homogéneo e isotrópico (E=200 GPa, ν=0.3), está sujeito a um campo bi-axial de tensões uniforme, definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{xx} = 100\ MPa\ , \qquad \sigma_{yy} = 200\ MPa\ , \qquad \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

***a*)-**Determine a tensão de corte máxima e o plano segundo o qual actua.

***b*)-**Deduza as expressões que definem o campo dos deslocamentos.

***c*)-**Determine as extensões sofridas pelas duas diagonais da base dum cubo centrado na origem, com os lados de 1 metro de comprimento, orientado paralelamente aos planos coordenados.

***d*)-**Determine a energia elástica acumulada no interior do cubo referido em *c*).

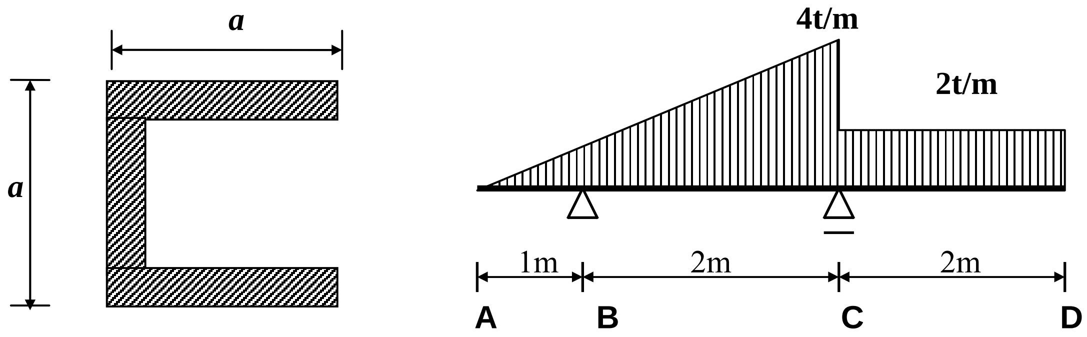
QUESTÃO 2: Um veio de secção rectangular composta é construído a partir de uma barra de aço (G_a=80 GPa) com as dimensões100mmx20mm de lado, revestida por um tubo de latão (G_l=40 GPa), com uma espessura de parede de 5mm, perfeitamente acoplado à barra de aço.

***a*)-**Considerando o elemento de latão como um *"tubo de parede fina"*, calcule o valor máximo do momento torsor transmissível pelo veio, tomando $(\tau_{adm})_{aço}$=50 *Mpa e* $(\tau_{adm})_{lstão}$=20 *Mpa*. Para esse momento máximo, calcule o ângulo de torção por metro de comprimento.

***b*)-**Reconsidere agora o mesmo problema, tendo em conta que o elemento exterior não é, propriamente, um *"tubo de parede fina"*.

V.S.F.F.

3. Pretende-se construir uma viga de secção em **U**, conforme representado na figura, com a altura igual à largura, a partir de chapa de aço (E=200 *GPa*, ν=0.3), e espessura uniforme de 40 *mm*. A viga está apoiada e é solicitada de acordo com o esquema representado na figura. Considere o valor de 200 *MPa* para a tensão de flexão admissível do material.



a)-Determine a dimensão mínima ***a*** da secção

b)-Determine Centro de Torção da secção

c)-Determine o esforço razante máximo que ocorre entre cada um dos elementos horizontais e o elemento vertical da secção

d)-Determine a flecha nas extremidade **A** e **D**, bem assim como as rotações nos apoios **B** e **C**.

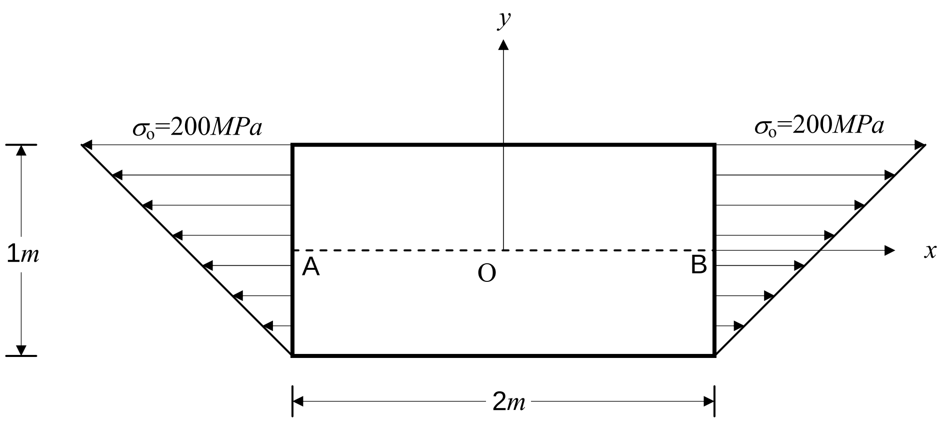
DEMEGI (MS #02)

CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

1. Uma placa rectangular de aço, (E=200 Gpa, ν=0.3), com as dimensões de 2 x 1 m^2 e espessura de 0.10 *m*, é solicitada ao longo das faces de menor dimensão por duas distribuições lineares de pressão, iguais e opostas, conforme ilustrado na figura seguinte.



Trata-se de um estado plano de tensões, definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{xx} = 100\,(2y+1)\ MPa\ ,\quad \sigma_{yy}=0\ ,\quad \tau_{xy}=0$$

a)-Demonstre que tal campo de tensões só é compatível se for nulo o campo das forças de volume.

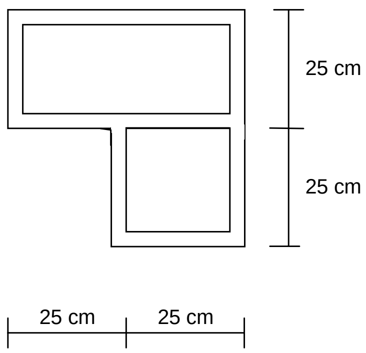
b)-Desenhe um elemento rectangular no centro da placa, com os lados inclinados a 45º em relação aos eixo coordenados e, sobre eles, represente, à escala, as correspondentes tensões normais e de corte.

c)-Determine a distribuição dos deslocamentos ao longo do lado **AB**, (recta de equação *y=0*).

d)-Calcule a energia elástica de deformação acumulado no corpo.

V.S.F.F.

2. Considere uma peça tubular de parede fina e espessura uniforme *(t),* com uma secção conforme está ilustrado na figura, construída em chapa de aço *(G=80 GPa)*.

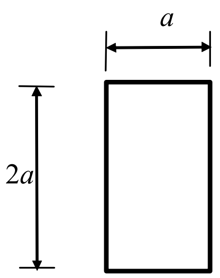


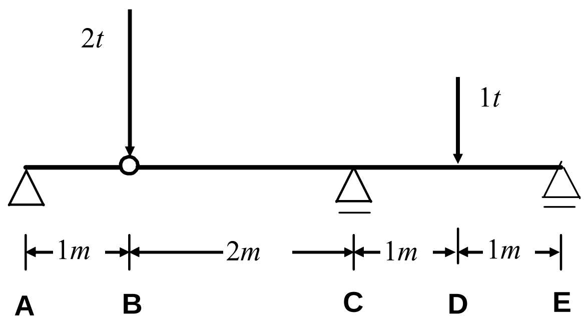
a)-Deduza as expressões para as tensões de corte em cada um dos elementos da secção, em função do momento torsor aplicado e da espessura da chapa.

b)-Calcule o valor mínimo que a espessura da chapa deve ter, para que a peça possa transmitir um momento torsor $M_t=40\ KN\text{x}m$, considerando $\tau_{adm}=50\ MPa$.

c)-Para a situação considerada na alínea b), calcule o ângulo de torção por metro de comprimento.

3. Pretende-se construir uma viga de secção rectangular (2*a*x*a*), conforme indicado na figura a seguir apresentada, em aço (E=200 *GPa*, ν=0.3). A viga está apoiada e é solicitada conforme o esquema também representado na figura. Considere o valor de 140 *MPa* para a tensão de flexão admissível do material.





a)-Determine as reacções nos apoios

b)-Determine os diagramas dos esforços transversos e dos momentos flectores ao longo do eixo da viga.

c)-Determine o valor mínimo da dimensão ***a*** da secção recta da viga, de tal modo que a tensão de flexão não ultrapasse o valor limite de 140 *MPa*.

d)-Determine a flecha na rótula B e a rotação no apoio C.

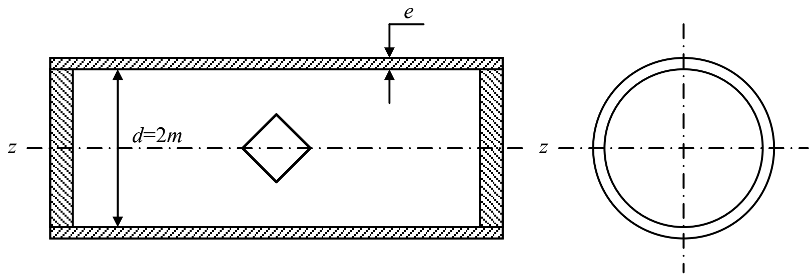
DEMEGI (MS #03)

CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

1. Considere um reservatório cilíndrico de parede fina em chapa de aço (E=200GPa, ν=0,3), sujeito a uma pressão interior de p=15 bar, conforme o esquema representado na figura.



a)-Demonstre que, na zona central do reservatório, as direcções axial e circunferencial são direcções principais e que as respectivas tensões são dadas pelas expressões seguintes:

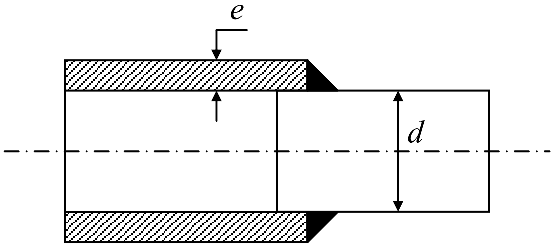
$$\sigma_{zz}=\frac{pr}{2e} \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta}=\frac{pr}{e}$$

b)-Sobre o elemento rectangular representado na figura (inclinado a 45º relativamente ao eixo do cilindro), esboce as tensões normais e de corte, indicando os respectivos valores numéricos.

c)-Calcule qual deverá ser o valor mínimo da espessura ***e*** do reservatório, considerando uma tensão admissível ao corte de τ_{adm}=50MPa.

d)-Determine qual o aumento de diâmetro do reservatório na secção central.

2. Considere um veio de aço (G=80GPa; τ_{adm}=50MPa) composto de um troço maciço e um troço tubular ligados por soldadura, conforme o esquema ilustrado na figura, e que deverá ser dimensionado para transmitir um binário M_t=100 Nxm.

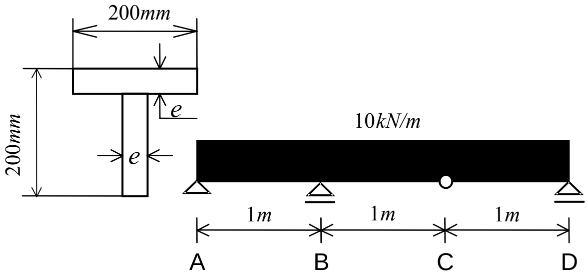


a)-Calcule o diâmetro ***d*** do veio e a espessura ***e*** do tubo de tal modo que em nenhum dos troços seja ultrapassada a tensão admissível do material.

b)-Reveja os valores anteriores para ***d*** e ***e***, de tal modo que a rigidez do veio seja constante ao longo de todo o seu comprimento.

c)-Tendo em conta o valor que encontrou para a espessura ***e***, comente àcerca do rigor da teoria em que baseou os seus cálculos.

3.-Considere uma viga de secção em T, construída a partir de duas pranchas em madeira (E=10GPa) com as dimensões indicadas na figura e carregada de acordo com o esquema apresentado.



a)-Determine a espessura ***e*** que deverão ter as pranchas, considerando uma tensão de flexão admissível de σ_{adm}=22,4MPa.

b)-Calcule o valor máximo do esforço rasante entre as duas pranchas.

c)-Calcule a *flecha* vertical na rótula C e a *rotação* no apoio B.

DEMEGI (MS #04)

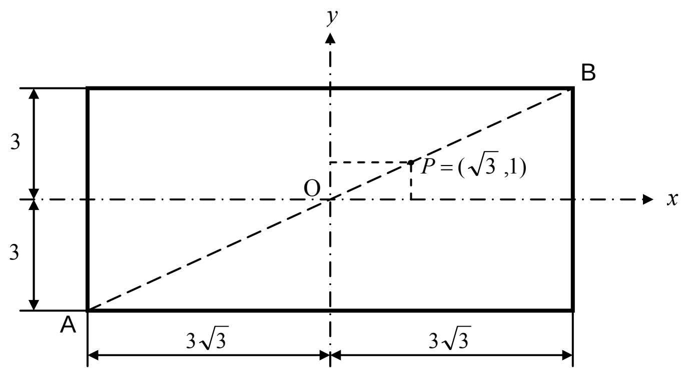
CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

1. Para placa representada na figura, construída num material genérico (E, ν), de espessura unitária e solicitada por forças de bordo paralelas ao plano da placa e uniformemente distribuidas ao longo da espessura, considere um campo de tensões definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{xx} = 3x - 3\sqrt{3}\,y\,; \qquad \sigma_{yy} = x - \sqrt{3}\,y\,; \qquad \tau_{xy} = \sqrt{3}x - 3y$$



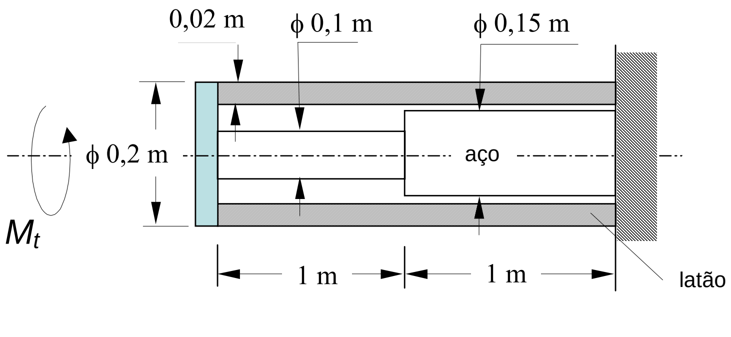
a)-Demonstre que aquele campo de tensões só é admissível se forem nulas as forças de volume.

b)-Calcule as tensões principais no ponto $P = (\sqrt{3}, 1)$ e as respectivas direcções principais.

c)-Determine e esboce sobre a figura o tipo de solicitação gerador daquele campo de tensões.

d)-Calcule a variação de comprimento da diagonal AB.

2. O veio representado na figura é composto por um varão de aço com 2m de comprimento (dois troços de ϕ150*mm* e ϕ100*mm*, respectivamente) e um tubo de latão com 200*mm* de diâmetro e espessura 20*mm*. O varão e o tubo estão solidarizados em ambas as extremidades.



Tomando $\tau_{adm} = 50MPa$, $G = 80GPa$ para o aço e $\tau_{adm} = 40MPa$, $G = 38GPa$ para o latão, determine:

a)-Qual o valor máximo do Momento torsor que pode ser aplicado ao veio.

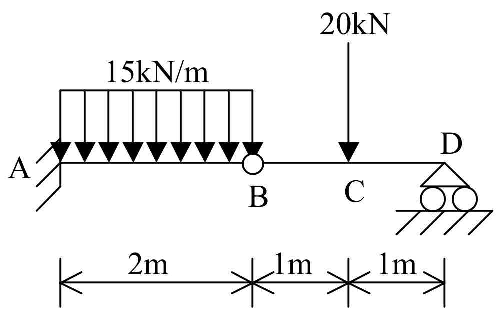
b)-Qual a rigidez à torção do veio composto representado.

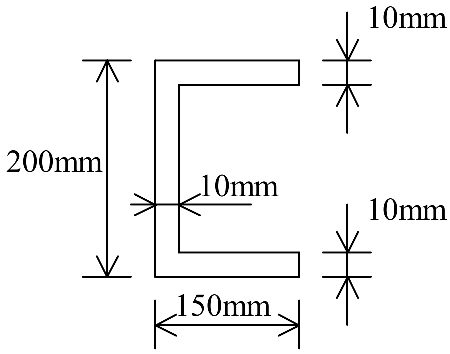
3. Considere a viga representada na figura sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 15*kN/m* aplicada entre as secções A e B, e uma carga concentrada de 20*kN* aplicada na secção C, constituída por um perfil em aço (*E*= 200*GPa*) de secção em U, encastrada na extremidade A e simplesmente apoiada na extremidade D. Na secção B existe uma rotula.

a)-Desenhe os diagramas dos esforço Transverso e do Momento Flector ao longo da viga.

b)-Identifique a secção crítica da viga determine as máximas tensões normais (σ_{xx}) e de corte (τ_{xy}) aí existentes.

c)-Determine a flecha para a secção B da viga.





DEMEGI (MS #05)

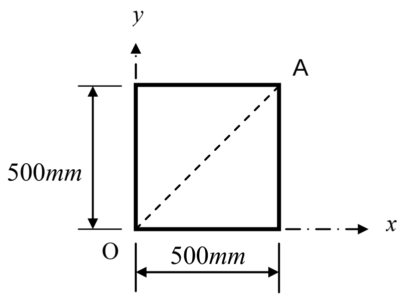
CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

1. Uma placa quadrada (500*mm*x500*mm*), com 10*mm* de espessura, em aço (E=210*GPa*, ν=0.3), está sujeira a um estado plano de tensão, do qual são conhecidas as seguintes componentes normais:

$$\sigma_{xx} = 10\,y\,; \qquad \sigma_{yy} = 10x$$

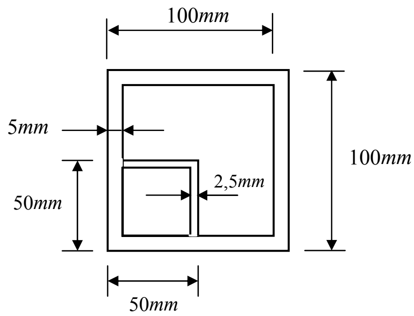


a)-Determine a expressão mais geral para a componente de corte τ_{xy}, compatível com a componentes σ_{xx} e σ_{yy}.

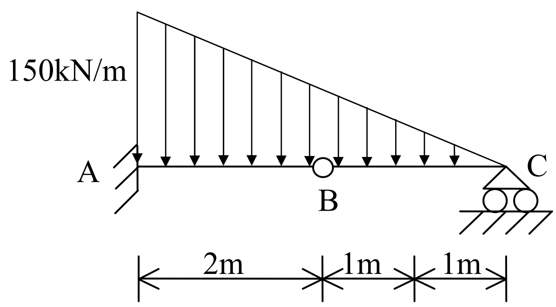
b)-Calcule as tensões principais no centro da placa.

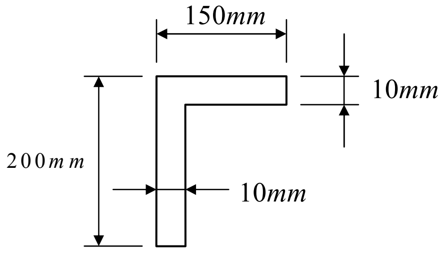
c)-Calcule a extensão que sofre a diagonal OA.

2. Considere uma peça tubular de secção coma a representada na figura, construída em chapa de aço (G=80*GPa*) de 5*mm* e 2.5*mm* de espessura. Determine o momento de torção máximo que a peça é capaz de transmitir, para uma tensão admissível τ_{ad}=70*MPa* e uma deformação admissível de 3º por metro de comprimento.



3. Considere a viga representada na figura sujeita a uma carga triangular de valor máximo de 150*kN/m* aplicada entre as secções A e C, constituída por um perfil em aço (*E*= 200*GPa, ν*=0.3) de secção em L, encastrada na extremidade A e simplesmente apoiada na extremidade C. Na secção B existe uma rotula.





a)-Desenhe os diagramas dos esforço Transverso e do Momento Flector ao longo da viga.

b)-Identifique a secção crítica da viga determine as máximas tensões normais (σ_{xx}) e de corte (τ_{xy}) aí existentes.

c)-Determine a flecha para a secção B da viga.

DEMEGI (MS #06)

CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

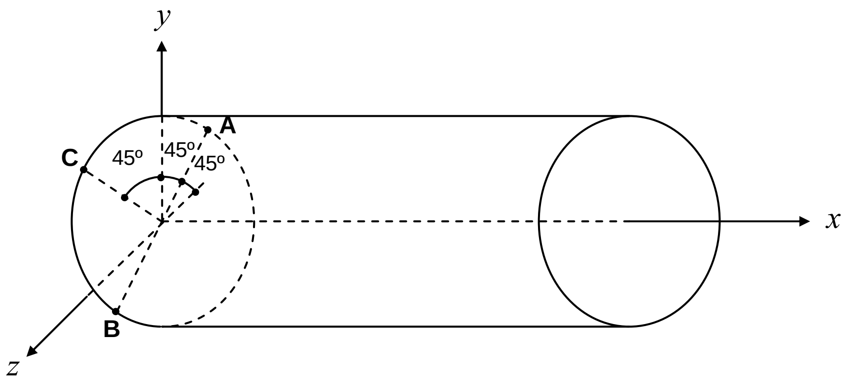
DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

1. O campo das tensões num cilindro de raio unitário (1 *m*) elástico, homogéneo e isotrópico (ver figura) é definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{xx} = 30\sqrt{2}\,(z-y)\ MPa\ ,\quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -25\sqrt{2}\,z\ MPa \ \text{ e }\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = 25\sqrt{2}\,y\ MPa$$

sendo nulas as restantes componentes, isto é $\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\tau_{yz}=\tau_{zy}=0$.



a)-Determine as tensões principais nos pontos **A** e **B**, e as respectivas direcções.

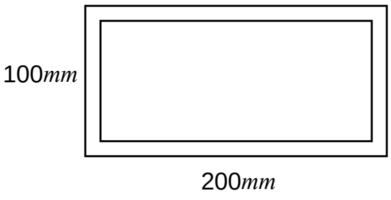
b)-Desenhe os círculos de Mohr correspondentes ao estado de tensão no ponto **C**.

c)-Mostre que o campo de tensões em questão corresponde a uma solicitação de flexão combinada com torção aplicada sobre o cilindro.

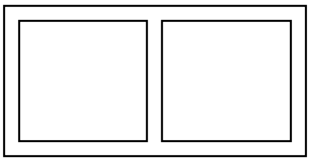
2. Considere um tubo em aço (G=80 GPa) de secção rectangular simples de dimensões 200*mm*x100*mm* e espessura de parede 10 *mm*, conforme representado na Fig. (*a*).

a)-Analise a variação da rigidez torsional do tubo quando é introduzido um septo central da mesma espessura, conforme ilustrado na Fig. (*b*).

b)-Para a configuração representada na Fig. (*b*), calcule o valor do momento torsor máximo que o tubo é capaz de suportar, considerando uma tensão de corte admissível de 50 *MPa*.



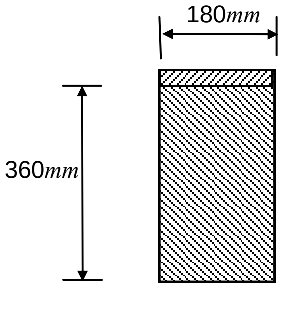
(*a*)



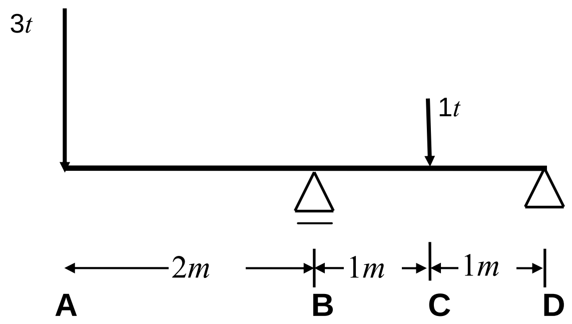
(*b*)

V.S.F.F.

3. Considere uma viga em madeira (E_m=10 *GPa*) de secção rectangular (360*mm*x180*mm*), reforçada por uma chapa em aço (E_a=200 *GPa*) de 20 *mm* de espessura, conforme indicado na Fig. (*a*) A viga está apoiada e é solicitada conforme o esquema representado na Fig. (*b*).



(*a*)



(*b*)

a)-Determine as reacções nos apoios **B** e **D**.

b)-Determine os diagramas dos esforços transversos e dos momentos flectores ao longo do eixo da viga.

c)-Determine os valores máximos das tensões de flexão na madeira e no aço.

d)-Determine a tensão de corte máxima a que está sujeito o adesivo que liga a chapa de aço à viga de madeira.

e)-Determine as flechas nos pontos **A** e **C** as rotações nos apoio **B** e **D**.

DEMEGI (MS #07)

CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

1. O campo das tensões num elástico, homogéneo e isotrópico é definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{zz}= 60\sqrt{2}\,(y\text{-}x)\ MPa\ ,\quad \tau_{xz}= \tau_{zx}= -50\sqrt{2}\,y\ MPa \ \text{ e }\ \tau_{yz}= \tau_{zy}= 50\sqrt{2}\,x\ MPa$$

sendo nulas as restantes componentes, isto é $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\tau_{xy}= \tau_{yx}=0$.

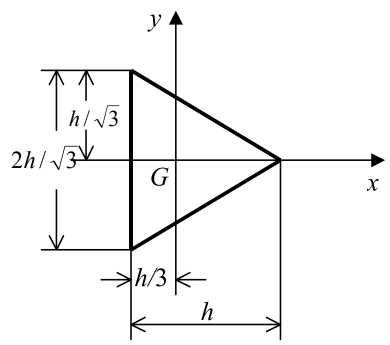
a)-Determine as tensões principais nos pontos **A**$\equiv(\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2}/2,\ 0)$ e **B**$\equiv(-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2,\ 0)$, e as respectivas direcções.

b)-Desenhe os círculos de Mohr correspondentes ao estado de tensão no ponto **C**$\equiv(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2,\ 0)$.

c)-O campo das tensões definido pelas expressões em cima representa um estado plano de tensão ou não? Justifique.

2. A solução do problema relativo à torção dum veio de secção triangular equilátera (ver figura) pode obter-se a partir da seguinte função de torção de Saint-Venant:

$$\Phi=K\left(x-\sqrt{3}y-\frac{2}{3}h\right)\left(x+\sqrt{3}y-\frac{2}{3}h\right)\left(x+\frac{1}{3}h\right)$$



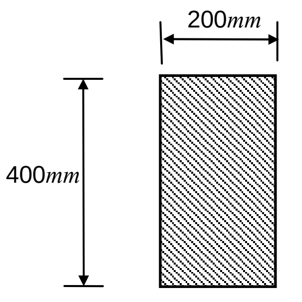
a)-Determine a constante K, em termos de G e θ, e mostre que o momento torsor é dado pela expressão:

$$M_t=\frac{G\theta h^4}{15\sqrt{3}}$$

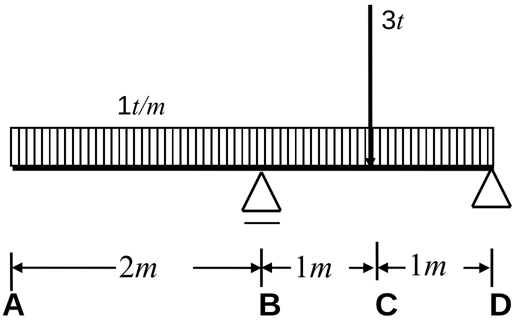
b)-Compare a secção sólida representada na figura com uma secção tubular fina (com a mesma forma e dimensões exteriores e espessura de parede igual a $h/10$), sob os pontos de vista da rigidez e do valor da tensão máxima

V.S.F.F.

3. Considere uma viga em madeira (E_m=10 GPa) de secção rectangular (400mmx200mm), conforme indicado na Fig. (a) A viga está apoiada e é solicitada conforme o esquema representado na Fig. (b).



(a)



(b)

a)-Determine as reacções nos apoios **B** e **D**.

b)-Determine os diagramas dos esforços transversos e dos momentos flectores ao longo do eixo da viga.

c)-Determine os valores máximos das tensões de flexão na madeira e no aço.

d)-Determine a tensão de corte máxima a que está sujeito o adesivo que liga a chapa de aço à viga de madeira.

e)-Determine as flechas nos pontos **A** e **C** as rotações nos apoio **B** e **D**.

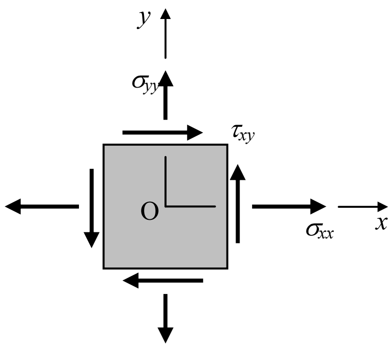
DEMEGI (MS #07)

CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

1. Um elemento bidimensional está sob a acção dum estado plano de tensão (ver figura a seguir). Considere o caso particular em que as componentes cartesianas normais da tensão são σ_{xx}=78*MPa* e τ_{xy}= -30*MPa*. Sabe-se, também, que uma das tensões principais é igual a 87*MPa* em tracção.



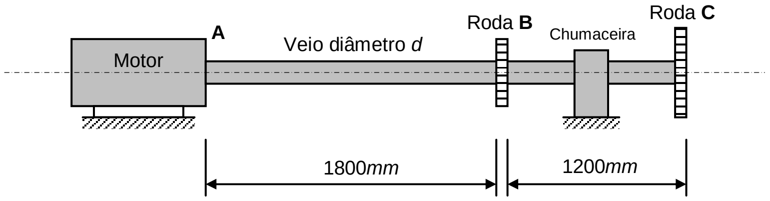
a)-Determine a tensão σ_{yy}.

b)-Determine a outra tensão principal.

c)-Determine a orientação das duas direcções principais de tensão.

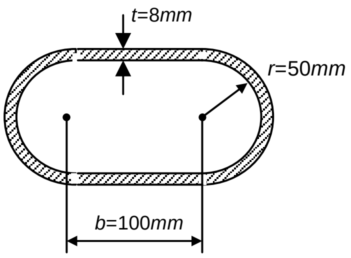
d)-Represente as duas tensões principais sobre um elemento convenientemente orientado no plano *xy*.

2. a)-Um motor desenvolve uma potência de 200 kW às 250 rpm sobre a secção **A** de um veio de secção circular, conforme ilustrado na figura. As rodas dentadas em **B** e **C** absorvem 90 kW e 110 kW, respectivamente. Calcule o diâmetro que o veio deverá ter, supondo que a tensão admissível do material ao corte é de 50*MPa* e que o ângulo de torção entre o motor e a roda dentada **C** está limitada a um valor de 1,5º. Considere que o módulo de rigidez do material do veio é *G*=80*GPa*.
Nota importante: Tenha em atenção que *Potência*(*kW*)=*Binário*(*kN*x*m*)xω(*rad*/*s*).

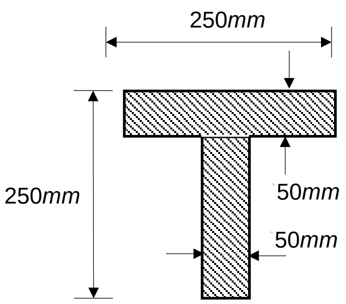


V.S.F.F.

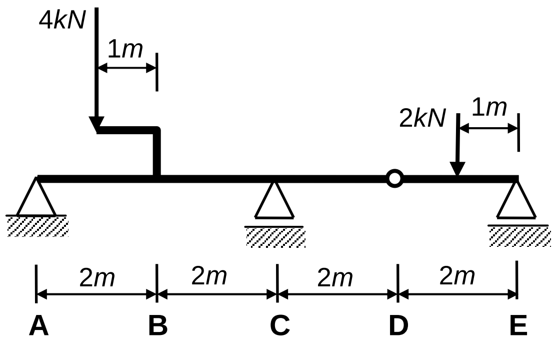
b)-Calcule a tensão de corte τ e o ângulo de torção ϕ para um tubo de aço (G=80GPa) com uma secção recta tubular com a forma e as dimensões indicadas na figura. O tubo em questão tem um comprimento total de 1,5 *metro* e está sujeito a um momento de torção igual a 15kNxm.



3. Considere uma viga em aço (E=200GPa) de secção recta em forma de T (250mmx250mmx50mm), conforme indicado na Fig. (*a*). A viga tem uma rótula na secção **D**, está apoiada e é solicitada conforme o esquema representado na Fig. (*b*).



(*a*)



(*b*)

a)-Determine as reacções nos apoios **A**, **C** e **E**.

b)-Determine os diagramas dos esforços transversos e dos momentos flectores ao longo do eixo da viga.

c)-Determine os valores máximos das tensões normais (tracção e compressão) e indique o(s) ponto(s) da(s) secção(ões) crítica(s) onde ocorrem. Justifique.

d)-Determine a tensão de corte máxima a que o material está sujeito e indique o(s) ponto(s) da(s) secção(ões) crítica(s) onde ocorrem. Justifique.

e)-Determine as flechas no pontos **B** e **D** e as rotações nos apoios **A**, **C** e **E**.

DEMEGI (MS #08)

CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

1. O campo das tensões num corpo sólido elástico, homogéneo e isotrópico é definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{yy} = 120\sqrt{2}\,(z\text{-}y)\ MPa\ ,\quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -100\sqrt{2}\,z\ MPa\ \text{ e }\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = 100\sqrt{2}\,y\ MPa$$

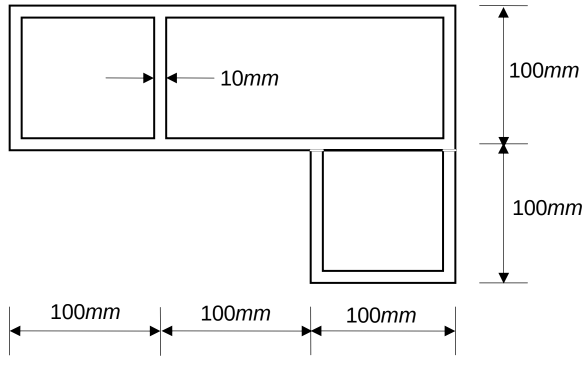
As restantes componentes do campo das tensões são nulas.

a)-Determine as tensões principais nos pontos **A**$\equiv(0, \sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2}/2)$ e **B**$\equiv(0, -\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)$, e as respectivas direcções.

b)-Desenhe os círculos de Mohr correspondentes ao estado de tensão no ponto **C**$\equiv(0, \sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)$.

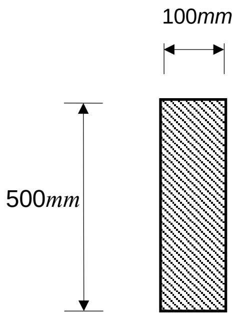
c)-À volta do ponto **B**, desenhe um paralelepípedo elementar de faces paralelas aos planos cartesianos e, sobre cada uma dessas faces, represente as tensões correspondentes.

2. Considere uma peça tubular de secção coma a representada na figura, construída em chapa de aço (G=80*GPa*) de 10*mm* de espessura. Determine o momento de torção máximo que a peça é capaz de transmitir, para uma tensão admissível τ_{ad}=70*MPa* e uma deformação admissível de 3º por metro de comprimento.

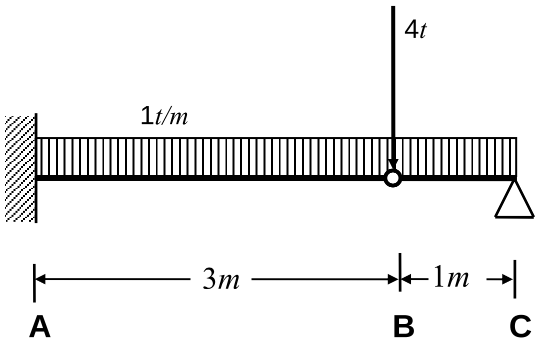


V.S.F.F.

3. Considere uma viga em madeira (E_m=10 GPa) de secção rectangular (500mmx100mm), conforme indicado na Fig. (a) A viga tem uma rótula na secção **C**, está apoiada e é solicitada conforme o esquema representado na Fig. (b).



(a)



(b)

a)-Determine as reacções nos apoios **A** e **C**.

b)-Determine os diagramas dos esforços transversos e dos momentos flectores ao longo do eixo da viga.

c)-Determine os valores máximos das tensões normais (tracção e compressão) e indique o(s) ponto(s) da(s) secção(ões) crítica(s) onde ocorrem. Justifique.

d)-Determine a tensão de corte máxima a que o material está sujeito e indique o(s) ponto(s) da(s) secção(ões) crítica(s) onde ocorrem. Justifique.

e)-Determine a flecha no pontos **B** e a rotação no apoio **C**.

DEMEGI (MS #09)

CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

1.- Numa barra metálica de secção rectangular (25x5 mm^2) simplesmente apoiada nas extremidades e sujeita a uma força vertical a meio vão, conforme ilustrado no esquema da Fig.1, mediram-se as deformações ε_{xx} e ε_{yy} na secção média P, tendo-se registado os seguintes valores:

$\varepsilon_{xx}= +550 \times 10^{-6}$
$\varepsilon_{yy}= -157 \times 10^{-6}$

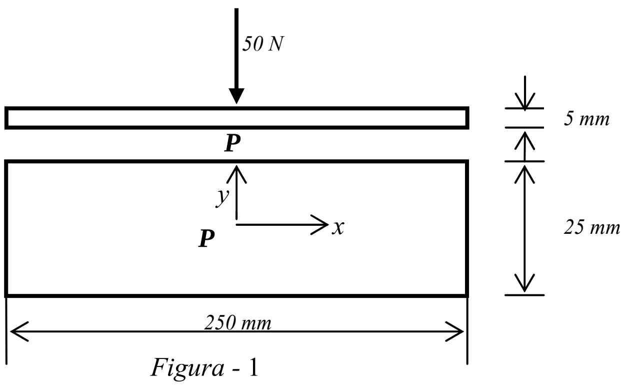


Figura - 1

a)-Determine, recorrendo às apropriadas equações da teoria da elasticidade, as constantes elásticas E e ν do material da barra.
b)-Discuta a precisão dos valores que obteve para essas constantes elásticas.

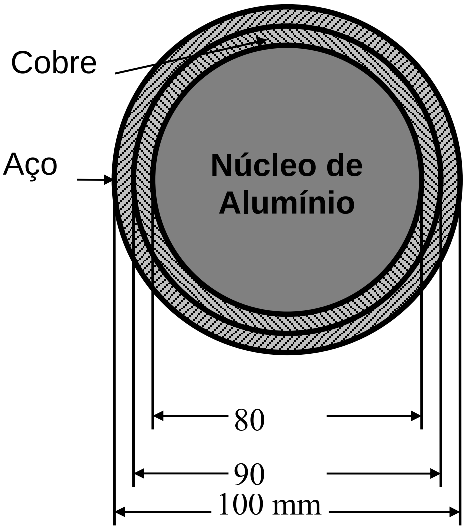
2.- Num ponto da superfície livre dum corpo material, mediram-se as deformações lineares segundo três direcções *a*, *b* e *c*, espaçadas de 60º:

$\varepsilon_a= +700 \times 10^{-6}$
$\varepsilon_b= 0$
$\varepsilon_c= -700 \times 10^{-6}$

a)-Determine, recorrendo às apropriadas equações da teoria da elasticidade, as deformações principais no ponto considerado e as respectivas orientações.
b)-Determine o valor da deformação de corte máxima e a orientação do plano segundo o qual ela se processa.
c)-Resolva as duas alíneas anteriores recorrendo, agora, à construção do círculo de Mohr.

V.S.F.F.

3. 2.-Um veio tubular de secção circular, é construído em *aço* (G=80GPa) e *cobre* (G=40GPa), e alumínio (G=30 Gpa), rigidamente ligados, com as dimensões indicadas na figura.

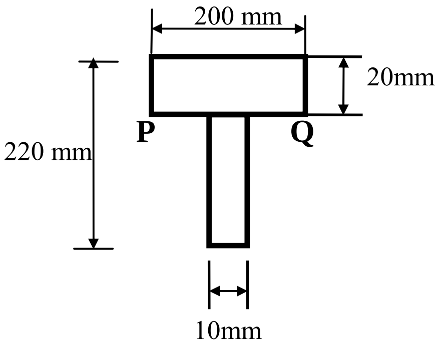


a)-Determine o valor da rigidez torsional (M_t/θ) do veio composto representado na figura.

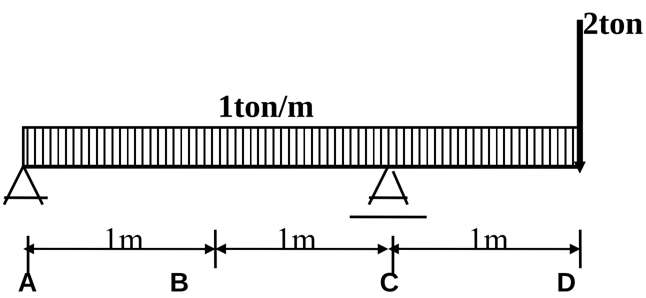
b)-Considerando as tensões admissíveis para o *aço*, para o *cobre* e para o alumínio iguais a 100MPa e 40Mpa e 35 MPa, respectivamente, determine o valor máximo de momento torsor que o veio é capaz de transmitir.

c)-Discuta a validade e limitações da metodologia que seguiu na resolução das alíneas anteriores, tendo em consideração, entre outros parâmetros, a relação entre as espessuras das paredes dos tubos e o respectivo diâmetro.

4.-Considere uma viga em aço (E=200 GPa, ν=0.3), de secção com a forma e dimensões indicadas na figura a seguir *(a)* e carregada de acordo com o esquema representado na figura *(b)*.



(a)



(b)

a)-Determine as reacções nos apoios

b)-Determine o diagrama dos momentos flectores e esforços transversos ao longo do eixo da viga.

c)-Identifique a posição ao longo do eixo da viga onde ocorre e determine o valor do esforço razante máximo, ao nível da ligação **PQ** entre os dois elementos da secção transversal da viga.

d)-Determine a flecha na extremidade **D** e a rotação no apoio **C**.

DEMEGI (MS #10)

CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

1. O campo das tensões num corpo elástico, homogéneo, isotrópico e isento de forças de volume é definido pelas seguintes componentes cartesianas:

$$\sigma_{xx}= 0 \qquad \tau_{xy}=4\,\boldsymbol{b}\,y - 10\,x$$

$$\sigma_{yy}= 2\boldsymbol{b}\,y + 4 \qquad \tau_{yz}= 2\boldsymbol{b}\,y + 4\,\boldsymbol{c}\,z + 2\boldsymbol{a}$$

$$\sigma_{zz}= 2 - 2\boldsymbol{a}\,z \qquad \tau_{zx}= 4 - 2\boldsymbol{c}\,z$$

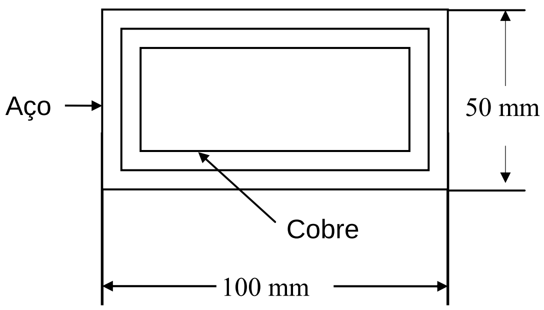
onde ***a***, ***b*** e ***c*** são três parâmetros reais.

a)-Determine os parâmetros. ***a***, ***b*** e ***c***, por forma que o campo de tensões definido pelas funções acima seja compatível com a teoria da elasticidade.

b)-Determine as tensões principais na origem das coordenadas e as respectivas direcções principais.

c)-Determine, **recorrendo à utilização do circulo de Mohr**, o valor da tensão de corte máxima na origem, bem como o plano e a direcção segundo os quais actua.

2. Um veio tubular de secção rectangular composta, é construído em *aço* (G=80GPa) e *cobre* (G=40GPa), ambos com uma mesma espessura de parede de 5 mm, estão rigidamente ligados e têm as dimensões indicadas na figura.



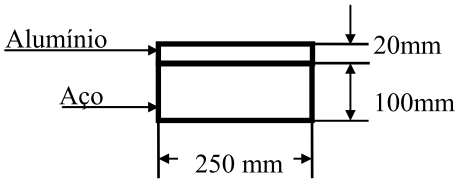
a)-Determine o valor da rigidez torsional (M_t/θ) do veio composto representado na figura.

b)-Considerando as tensões admissíveis para o *aço* e para o *cobre* iguais a 100MPa e 40MPa, respectivamente, determine o valor máximo de momento torsor que o veio é capaz de transmitir.

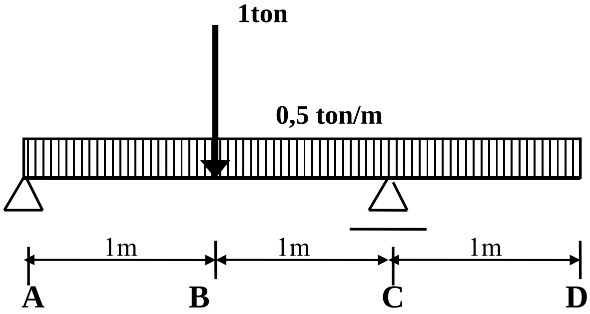
c)-Discuta a validade e limitações da metodologia que seguiu na resolução das alíneas anteriores..

V.S.F.F.

3. Considere uma viga composta em aço (E=200 GPa, ν=0.3), e alumínio (E= 100 Gpa, ν=0.28) de secção com a forma e dimensões indicadas na figura a seguir *(a)* e carregada de acordo com o esquema representado na figura *(b)*.



(a)



(b)

a)-Determine as reacções nos apoios

b)-Determine o diagrama dos momentos flectores e esforços transversos ao longo do eixo da viga.

c)-Calcule os malores máximos das tensões de flexão em cada um dos elementos da viga.

d)-Identifique a posição ao longo do eixo da viga onde ocorre e determine o valor do esforço razante máximo, ao nível da ligação entre os dois elementos da secção transversal da viga.

e)-Determine a flecha na extremidade **D** e a rotação no apoio **C**.

DEMEGI (MS #11)

CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

1. O campo das tensões num corpo elástico, homogéneo, isotrópico e isento de forças de volume é definido pelas seguintes componentes cartesianas:

$$\sigma_{xx} = 1 - \boldsymbol{a}\,x \; ; \qquad \sigma_{yy} = 0 \; ; \qquad \sigma_{zz} = \boldsymbol{b}\,z + 2$$

$$\tau_{xy} = 2 - \boldsymbol{c}\,x \; ; \qquad \tau_{yz} = 2\,\boldsymbol{b}\,z - 5\,y \; ; \qquad \tau_{zx} = \boldsymbol{b}\,z + 2\,\boldsymbol{c}\,\mathrm{x} + \boldsymbol{a}$$

onde ***a***, ***b*** e ***c*** são três parâmetros reais.

a)-Determine os parâmetros. ***a***, ***b*** e ***c***, por forma que o campo de tensões definido pelas funções acima seja compatível com as equações de equilíbrio da teoria da elasticidade. Qual o significado físico de tais equações?

b)-Determine as tensões principais na origem das coordenadas e as respectivas direcções principais.

c)-Determine, **recorrendo à utilização do circulo de Mohr**, o valor da tensão de corte máximo na origem, bem como o plano e a direcção segundo os quais actua.

2. Um corpo elástico, homogéneo e isotrópico (E=200 GPa, ν=0.3), está sujeito a um campo tri-axial de tracção uniforme, definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{yy} = 100 \text{ MPa} \quad ; \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

a)-Determine a tensão de corte máxima e o plano segundo o qual actua.

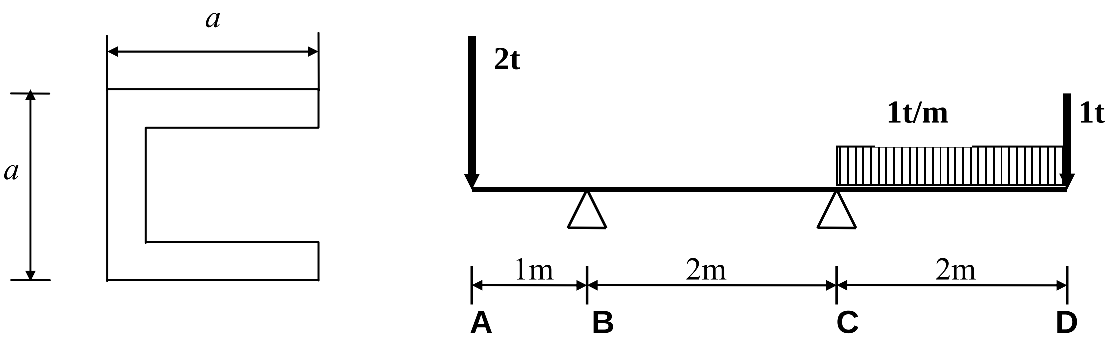
b)-Deduza as expressões que definem o campo dos deslocamentos.

c)-Determine as extensões sofridas pelas diagonais dum cubo centrado na origem, com os lados de 1 metro de comprimento, orientado paralelamente aos planos coordenados.

d)-Determine a energia elástica acumulada no interior do cubo referido em c).

(V.S.F.F.)

3. Pretende-se construir uma viga de secção em **U**, conforme indicado na figura a seguir apresentada, a partir de chapa de aço (E=200 Gpa, ν=0.3), com uma espessura uniforme de 50 mm. A viga está apoiada e é solicitada conforme o esquema também representado na figura. Considere o valor de 140 Mpa para a tensão de flexão admissível do material.



a)-Determine o valor mínimo que deverá ter a dimensão ***a*** da secção.

b)-Determine o ***centro de torção*** da secção..

c)-Determine a flecha na secção equidistante dos apoios , bem assim como a rotação na extremidade **D**.

DEMEGI (MS #12)

CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

1.- Num ponto da superfície livre dum corpo material, mediram-se as deformações lineares segundo três direcções *a*, *b* e *c*, espaçadas de 45º:

ε_a= -100 x 10^{-6}
ε_b= +500 x 10^{-6}
ε_c= +1000 x 10^{-6}

a)-Determine, recorrendo às apropriadas equações da teoria da elasticidade, as deformações principais no ponto considerado e as respectivas orientações.

b)-Determine o valor da deformação de corte máxima e a orientação do plano segundo o qual ela se processa.

c)-Resolva as duas alíneas anteriores recorrendo, agora, à construção do círculo de Mohr.

2. Um veio de secção circular composta é construído a partir de um varão de aço (G_a=80 GPa) com 75 mm de diâmetro revestida por um tubo de latão (G_l=40 GPa), com 5 mm de espessura de parede, perfeitamente acopulado ao varão de aço

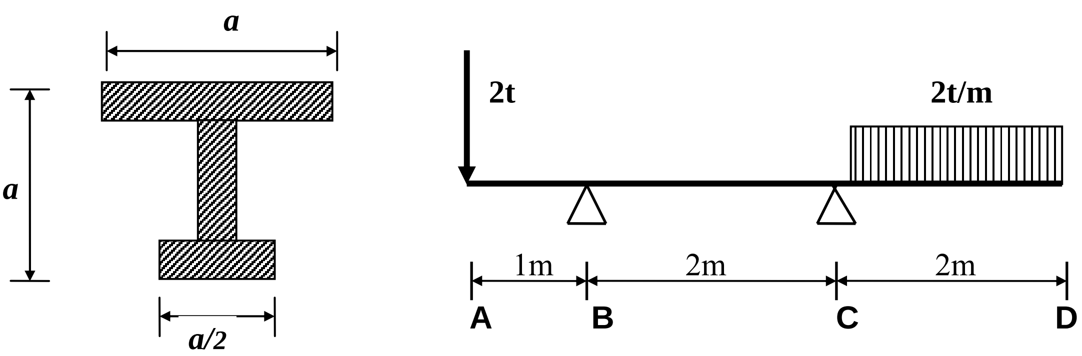
a)-Para um momento torsor de 16 kNm aplicado ao conjunto, determine como se distribui esse momento pelo tubo de latão e pelo varão de aço.

b)-Para esse mesmo momento torsor de 16 kNm, calcule a tensão de corte máxima em cada um dos materiais e o ângulo de torção do veio num comprimento de 2 metros.

c)-Para o valor do momento torsor considerado em b), calcule a energia elástica de deformação acumulada no conjunto.

V.S.F.F.

3. Pretende-se construir uma viga de secção conforme representado na figura, com altura igual à largura, a partir de chapa de aço (E=200 GPa, ν=0.3), com uma espessura uniforme de 50 mm. A viga está apoiada e é solicitada conforme o esquema também representado na figura. Considere o valor de 160 *MPa* para a tensão de flexão admissível do material.



a)-Determine a dimensão mínima ***a*** da secção.

b)-Determine o esforço razante máximo que ocorre entre a aba inferior e a alma da secção

c)-Determine a flecha nas extremidade **A** e **D**, bem assim como as rotações nos apoios **B** e **C**.

DEMEGI (MS #13)

CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

1. O campo das tensões num corpo elástico, homogéneo, isotrópico e isento de forças de volume é definido pelas seguintes componentes cartesianas:

$$\sigma_{xx}= 0 \qquad \tau_{xy}=2\,\boldsymbol{b}\,y - 5\,x$$
$$\sigma_{yy}= \boldsymbol{b}\,y + 2 \qquad \tau_{yz}= \boldsymbol{b}\,y + 2\,\boldsymbol{c}\,z + \boldsymbol{a}$$
$$\sigma_{zz}= 1 - \boldsymbol{a}\,z \qquad \tau_{zx}= 2 - \boldsymbol{c}\,z$$

onde ***a***, ***b*** e ***c*** são três parâmetros reais.

a)-Determine os parâmetros. ***a***, ***b*** e ***c***, por forma que o campo de tensões definido pelas funções acima seja compatível com a teoria da elasticidade.

b)-Determine as tensões principais na origem das coordenadas e as respectivas direcções principais.

c)-Determine, **recorrendo à utilização do circulo de Mohr**, o valor da tensão de corte máximo na origem, bem como o plano e a direcção segundo os quais actua.

2. Um corpo elástico, homogéneo e isotrópico (E=200 GPa, ν=0.3), está sujeito a um campo bi-axial de tensões uniforme, definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{yy}= 100 \text{ MPa}, \qquad \sigma_{zz}= 50 \text{ MPa}, \qquad \sigma_{xx}= \tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$$

a)-Determine a tensão de corte máxima e o plano segundo o qual actua.

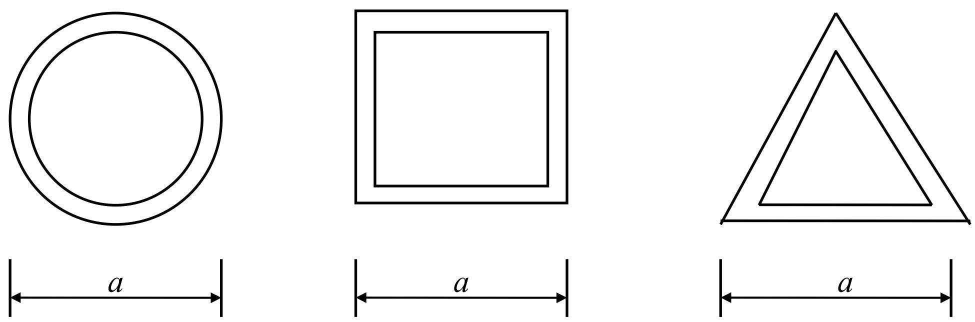
b)-Deduza as expressões que definem o campo dos deslocamentos.

c)-Determine as extensões sofridas pelas diagonais dum cubo centrado na origem, com os lados de 1 metro de comprimento, orientado paralelamente aos planos coordenados.

d)-Determine a energia elástica acumulada no interior do cubo referido em c).

(V.S.F.F.)

3. Considere as três secções tubulares de parede fina ilustradas na figura (circular, quadrangular e triangular equilâtera), todas com a mesma dimensão transversal ***a*** e espessura ***t*** igual a 5% dessa dimensão.

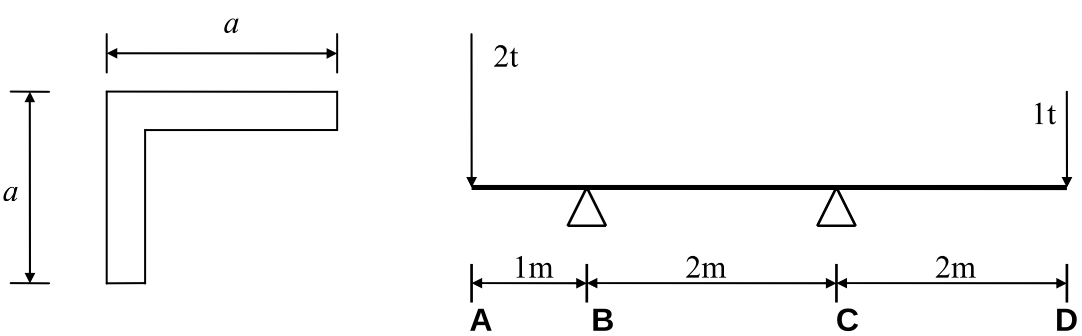


a)-Compare, sob o ponto de vista da resistência à torção (M_t/θ), as três secções representadas.

b)-Idem, sob o ponto de vista da tensão de corte máxima, para um mesmo momento torsor aplicado.

c)-Comente a precisão e rigor dos resultados a que chegou em a) e b), à luz da teoria da analogia de membrana de Prandtl.

4. Pretende-se construir uma viga de secção em **L**, de abas iguais, conforme indicado na figura a seguir apresentada, a partir de chapa de aço (E=200 Gpa, ν=0.3), com uma espessura uniforme de 50 mm. A viga está apoiada e é solicitada conforme o esquema também representado na figura. Considere o valor de 140 Mpa para a tensão de flexão admissível do material.



a)-Determine comprimento mínimo ***a*** da aba da secção.

b)-Determine o ***centro de torção*** da secção..

c)-Determine a flecha na secção equidistante dos apoios , bem assim como a rotação na extremidade **D**.

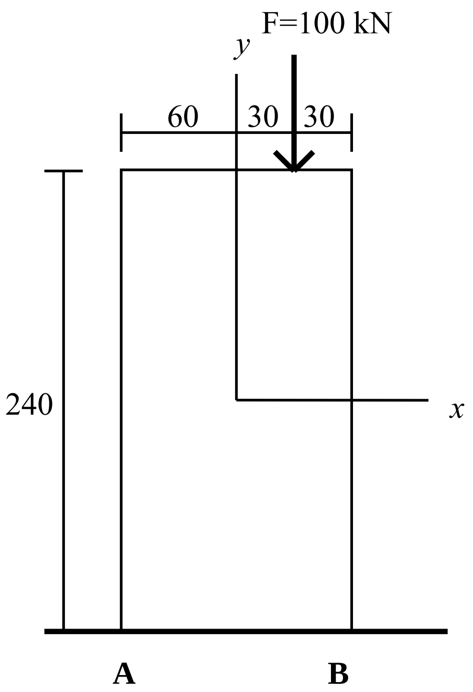
DEMEGI (MS #14)

CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

1.-Uma placa rectangular de aço, (E=200 Gpa, ν=0.3), com a espessura de 10 cm, está apoiada numa base rígida, sendo solicitada na face oposta por uma força excêntrica de intensidade **F=100 kN**, conforme ilustrado na Figura (dimensões indicadas em centímetros).



Trata-se de um estado plano de tensões, definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{xx}=0\ ,\ \sigma_{yy}=-(0.2x+8)F\ ,\ \tau_{xy}=0$$

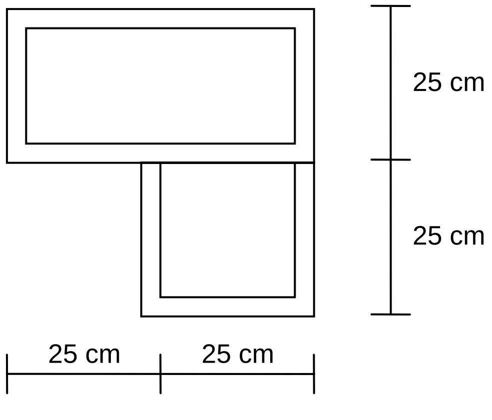
a)-Verifique que tal campo de tensões só é possível se fôr nulo o campo das forças de volume.

b)-Calcule o correspondente campo das deformações.

c)-Desprezando o atrito na base, determine a distribuição dos deslocamentos ao longo do lado **AB**.

d)-Calcule a energia elástica de deformação acumulado no corpo.

2. Considere uma peça tubular de parede fina e espessura uniforme *(t),* com uma secção conforme está ilustrado na figura, construída em chapa de aço *(G=80 GPa)*.

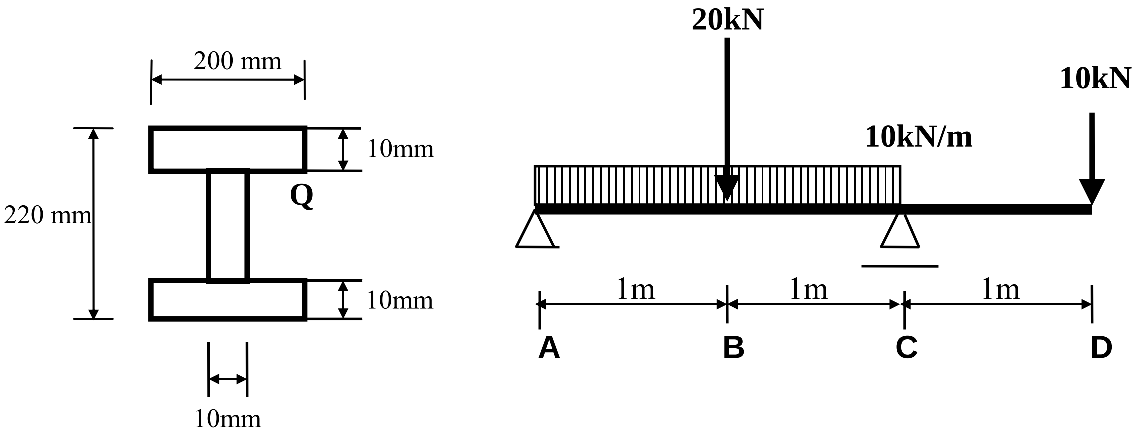


a)-Deduza as expressões para as tensões de corte em cada um dos elementos da secção.

b)-Calcule o valor mínimo que a espessura da chapa deve ter, para que a peça possa transmitir um momento torsor $M_t=40KN\times m$, e $\tau_{adm}=50\ MPa$.

V.S.F.F.

3.-Considere uma viga em aço (E=200 GPa, ν=0.3), de secção em **I** com as dimensões indicadas na figura a seguir *(a)* e carregada de acordo com o esquema representado na figura *(b)*.



(a) *(b)*

a)-Determine as reacções nos apoios

b)-Determine o diagrama dos momentos flectores e esforços transversos ao longo do eixo da viga.

c)-Identifique as posição onde ocorrem as tensões máximas de flexão e de corte, e determine os respectivos valores.

d)-Determine a flecha na extremidade **D** e a rotação no apoio **C**.

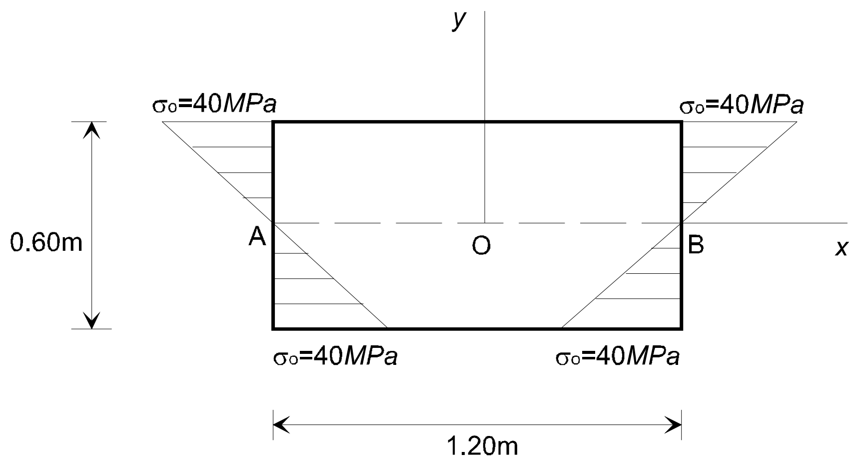
DEMEGI (MS #15)

CURSO DE LICENCIATURA EM ENGENHARIA MECÂNICA
DISCIPLINA: MECÂNICA DOS SÓLIDOS
ANO LECTIVO ____/__
PROVA DE EXAME REALIZADA EM: ___/___/___

DURAÇÃO: 2.30 HORAS

PARA RESOLVER COM CONSULTA DE UM (APENAS UM) LIVRO

1. Uma placa rectangular de aço, (E=200 GPa, ν=0.3), com as dimensões de 1.20 x 0.60 m^2 e espessura de 0.10 m, é solicitada ao longo das faces de menor dimensão por duas distribuições lineares de pressão, iguais e opostas, conforme ilustrado na figura seguinte.



Trata-se de um estado plano de tensões, definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{xx} = -\,8/3\ y\ (GPa)\ ,\quad \sigma_{yy}=0\ ,\quad \tau_{xy}=0$$

a)-Demonstre que tal campo de tensões só é compatível se for nulo o campo das forças de volume.

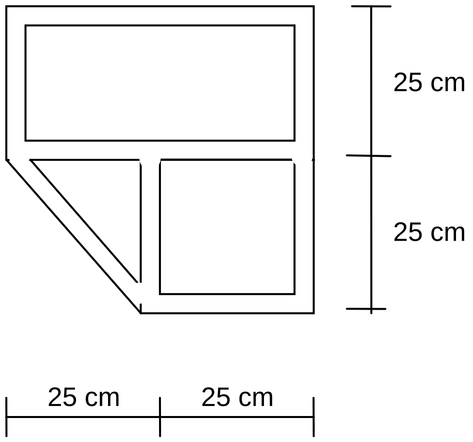
b)-Desenhe um elemento rectangular no centro da placa, com os lados inclinados a 45º em relação aos eixo coordenados e, sobre eles, represente, à escala, as correspondentes tensões normais e de corte.

c)-Determine a distribuição dos deslocamentos ao longo do lado **AB**, (recta de equação $y=0$).

d)-Calcule a energia elástica de deformação acumulado no corpo.

V.S.F.F.

2. Considere uma peça tubular de parede fina e espessura uniforme *(t),* com uma secção conforme está ilustrado na figura, construída em chapa de aço *(G=80 GPa)*.



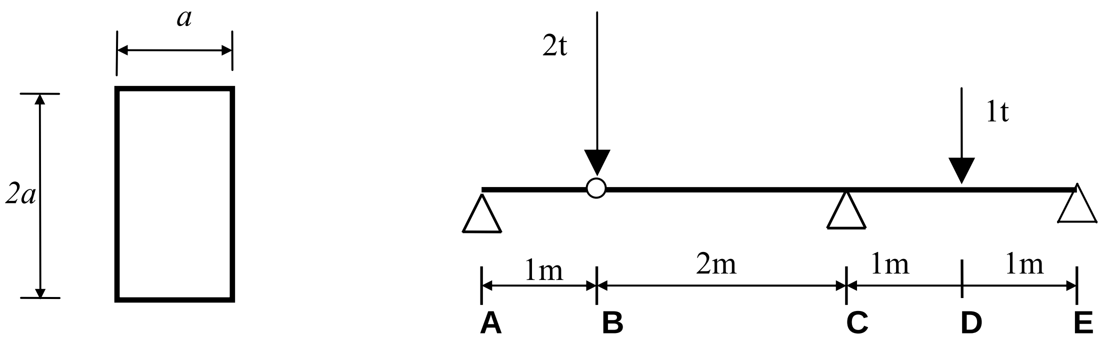
a)-Deduza as expressões para as tensões de corte em cada um dos elementos da secção.

b)-Calcule o valor mínimo que a espessura da chapa deve ter, para que a peça possa transmitir um momento torsor M_t=*40 KN*x*m*, considerando τ_{adm}=*50 MPa*.

c)-Descreva as hipóteses de base em que assenta a teoria de Saint-Venant para o estudo da torção de peças cilíndricas de secção arbitrária.

d)-Uma peça à torção, do tipo daquela que está em questão no presente problema, pode considerar-se em estado plano de tensão? Justifique.

3. Pretende-se construir uma viga de secção rectangular (2*a*x*a*), conforme indicado na figura a seguir apresentada, em aço (E=200 GPa, ν=0.3). A viga está apoiada e é solicitada conforme o esquema também representado na figura. Considere o valor de 140 MPa para a tensão de flexão admissível do material.



a)-Determine as reacções nos apoios

b)-Determine o diagrama dos momentos flectores ao longo do eixo da viga.

c)-Determine o valor mínimo da dimensão ***a*** da secção recta da viga, de tal modo que a tensão de flexão não ultrapasse o valor limite de 140 MPa.

d)-Determine a flecha na rótula **B** e a rotação no apoio **C**.

Universidade do Porto FEUP Faculdade de Engenharia	**Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial** **Licenciatura em Gestão e Engenharia Indudtrial**
Duração:2h	2006-01-16
Exame de *Resistência dos Materiais - Parte Prática*	
Nota: *É permitida a consulta dos apontamentos da disciplina.*	

1. Considere o cubo de dimensões unitárias representado na figura P1.2 no qual se pode considerar válidas as funções deslocamento seguintes:

$u = \alpha(x + 2y)$; $v = \beta y$; $w = \gamma z$ onde α, β e γ são constantes

e determine:

(1.-1) a)O tensor das deformações admitindo que se trata de pequenas deformações.

(1.0) b)A variação do ângulo formado por AO e OG.

(1.5) c)A variação de comprimento do segmento OC durante o processo de deformação do sólido.

(1.0) d)O tensor das tensões, admitindo que o material é isotrópico e tem as seguintes propriedades materiais:
E=210GPa e ν=0.3.

$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx}$

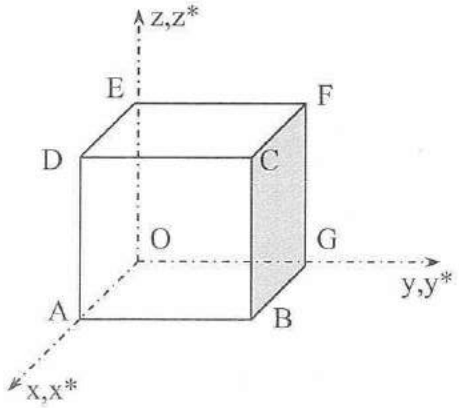
$\varepsilon_{yy} = \frac{dv}{dy}$

$\varepsilon_{zz} = \frac{dw}{dz}$

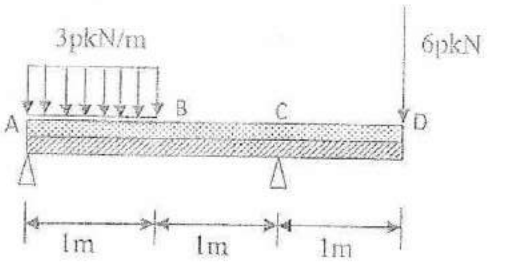
$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$

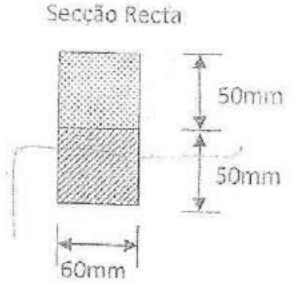
$\gamma_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$

$\gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}$



2. Considere a **Viga Plana Isostática**, representada na figura e despreze a acção do peso nos cálculos subsequentes. A Secção recta tem a forma representada na figura.





Material I E=100GPa σ_{adm}= 90MPa

Material II E=200GPa σ_{adm} = 150MPa

(2.0) a)Trace os Diagramas de Esforços Transversos e Momentos Flectores,

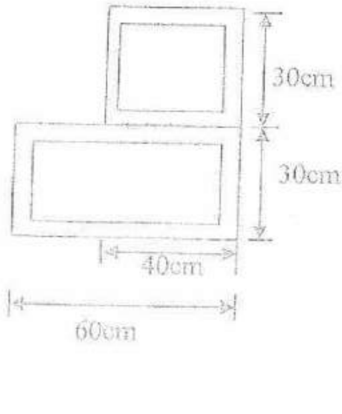
(2.5) b) Determine a carga p de modo a não serem excedidas as tensões admissíveis para o material I e II,

(2.0) c) Determine a Tensão de Corte no centro de gravidade da Secção Recta na secção da viga que corresponde ao esforço transverso máximo,

(3.0) d) Determine a Expressão da Deformada para o troço AC da viga da figura,

7 *(1.0)* e) Determine a Deformação Axial Máxima.

3. Considere uma peça tubular de parede fina e espessura uniforme t, com a forma indicada na figura e construída de um material para o qual é G=80Gpa.



(1.5) a) Deduza em função da espessura as expressões para as tensões de corte em cada um dos elementos da Secção.

(2.0) b)Determine o valor mínimo que a espessura da chapa deve ter para que a peça possa transmitir um momento torsor de 40kNm sendo a tensão admissível de 50MPa.

Licenciatura em Gestão e Engenharia Industrial

RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

***Data**: 5 de Fevereiro de 2002* ***Duração**: 1 Hora 45m* ***Sala**: B101*

Responda Concisamente às questões propostas .

1. Considere um prisma de dimensões $100\times150\times100\,\text{mm}^3$, constituído por um material linear elástico e isotrópico, de tal modo que:

- sujeito a um estado de pressão hidrostática p=100MPa o volume passe a ser de $1{,}515\times10^6\,\text{mm}^3$
- sujeito a uma tensão de corte τ=200MPa a distorção é γ=0.2° como se representa na figura 1.

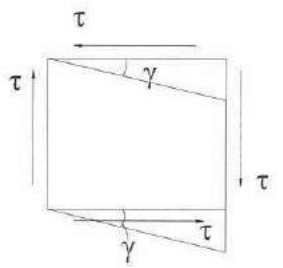


Figura 1

Sob a acção do estado de tensão caracterizado pelo tensor das tensões:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \times 10^2\,\text{MPa}$$

Determine:

(1.5) **a)** o Tensor das Tensões, sabendo que:

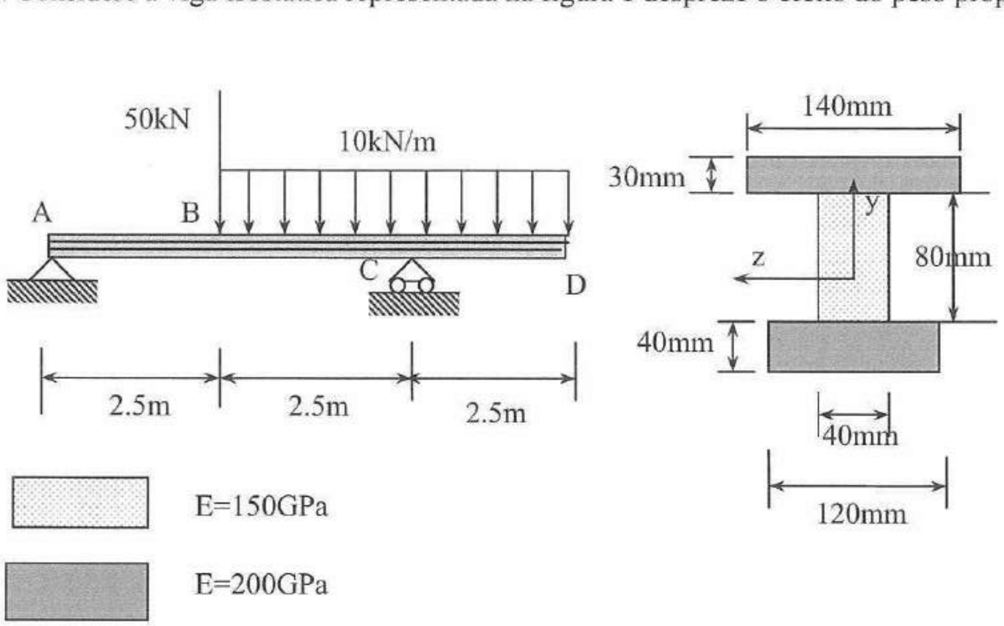
- uma tensão principal é nula
- as outras duas tensões principais têm o mesmo valor absoluto, sendo uma positiva e a outra negativa
- não é um estado plano de tensão,

(1.5) **b)**o Tensor das deformações,

*(1.0)***c)** a variação de volume do prisma,

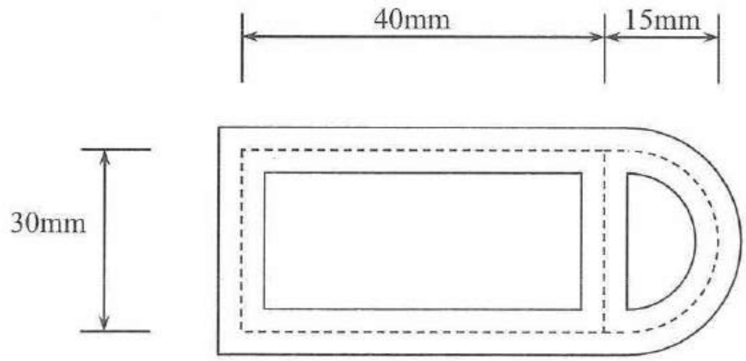
2. Considere a **Viga Plana Isostática** representada na figura **2**, cuja secção recta também se representa e despreze o peso da viga para efeitos dos cálculos subsequentes.

2. Considere a viga isostática representada na figura e despreze o efeito do peso próprio.



(2.0) **a)** Trace os Diagramas de Momentos e Esforços Transversos
(2.0) **b)** Determine as Tensões Axiais máximas.
(1.0) **c)** Determine a Tensão de Corte máxima.
(2.5) **d)** Determine a deformada em BC e a rotação em C.

(3.0) **3.** Considere um tubo de aço com 1.5m de comprimento com a secção representada na figura. O tubo está sujeito a um momento torsor de 200N.m. Determine a tensão de corte média em cada uma das paredes e o ângulo de torção do tubo. Considere E=210GPa e ν=0.3.



Espessura constante e igual a 4mm

FEUP Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia

Licenciatura em Gestão e Engenharia Industrial

RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

Data : 24 de Janeiro de 2003 *Duração : 2horas*

Parte Prática

Responda Concisamente às questões propostas .

1. Considere o Tensor das Tensões cujas componentes σ_{ij} são no referencial Oxyz,

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & -30 \\ 0 & 15 & 0 \\ -30 & 0 & 40 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

No ponto a que diz respeito o Tensor das Tensões

(0.5) **a)** Represente as componentes do Vector Tensão que actuam nas facetas normais aos eixos coordenados.

(0.5) **b)** Justifique que 15MPa é o valor de uma das tensões principais.

(1.0) **c)** Determine as Tensões Principais.

(1.0) **d)** Determine as Tensões Tangenciais máximas e respectiva orientação no sistema de eixos Oxyz

2. Considere a **Viga Plana Isostática** representada na figura **1**, cuja secção recta também se representa e despreze o peso da viga para efeitos dos cálculos subsequentes.

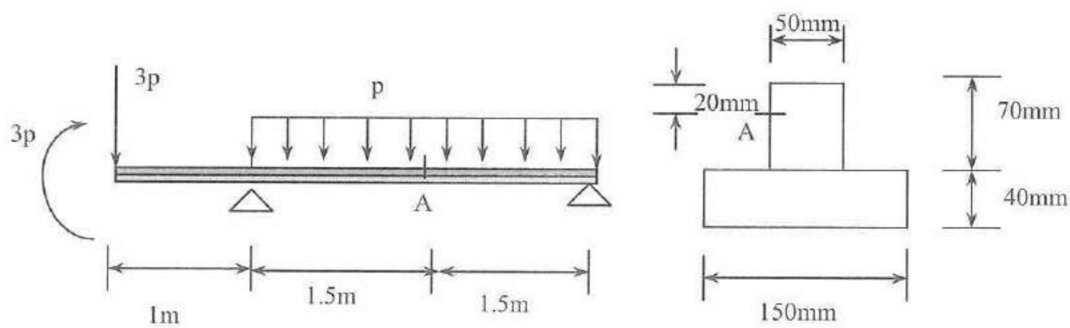


Figura 1 : Viga Simplesmente Apoiada

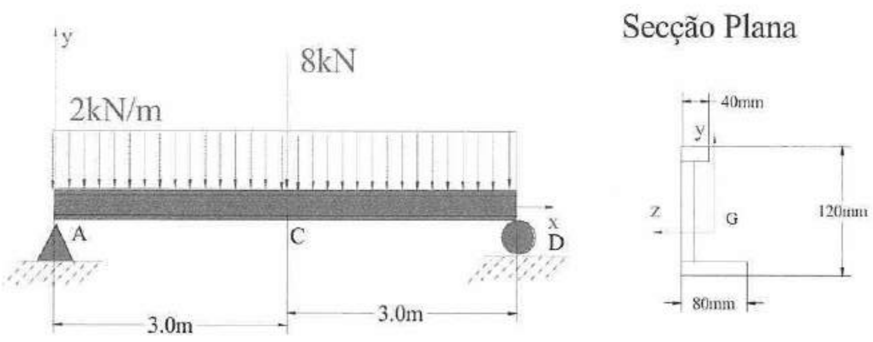


Figura 2 : Viga Simplesmente Apoiada

(1.0) **a)** Trace os Diagramas de Esforços Transversos e Momentos Flectores.
(1.0) **b)** Determine a Posição do Centro de Gravidade G da Secção.
(1.5) **c)** Determine os Eixos Principais de Inércia da Secção.
(1.5) **c)** Determine as Tensões Axiais Máximas e indique a secção ou secções em que actuam.
(2.0) **e)** Determine o Deslocamento Transversal no ponto **C** da viga da figura **2,** recorrendo ao método das diferenças finitas (considere 3 pontos na viga, excluindo os extremos).

3. Peças sujeitas a momentos torsores.
(2.0) Determine a distribuição de tensões tangenciais provocadas pelo Momento Torsor M_t na Secção representada na figura 3.

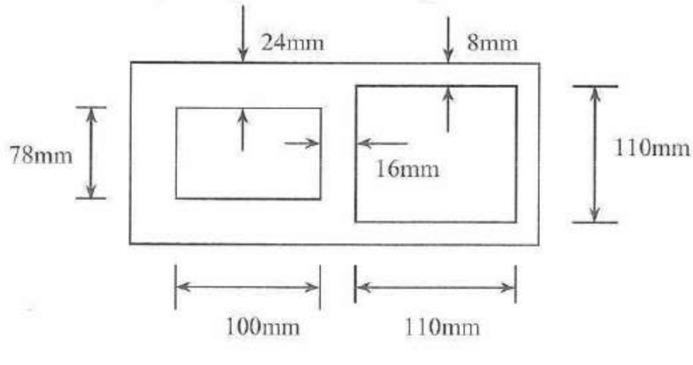


Figura 3

FEUP
Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia

Licenciatura em Gestão e Engenharia Industrial

RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

Data : 29 de Outubro de 2002 *Duração : 1 h 30m*

Parte Prática

Responda Concisamente às questões propostas .

1. Considere o tensor das tensões

$$\begin{bmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & 150 \\ y & 150 & 100 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

para o qual a faceta cuja normal é $\frac{\sqrt{3}}{3}(1 \quad 1 \quad 1)$ tem tensão tangencial nula.

(2.5) **a)** Determine o Tensor das Tensões.
(2.5) **b)** Determine as Tensões Principais e Direcções Principais de Tensão.
(2.0) **c)** Determine o Tensor das Deformações sabendo que o Módulo de Young é **E=210GPa** e o Coeficiente de Poisson é **ν = 0.30** .

2. Considere um sólido sujeito ao campo de deslocamentos seguinte:

$$u(x,y,z) = (ax + b\,y^2 + 4y) \times 10^{-2}\,mm$$

$$v(x,y,z) = (2cx + 3b\,y^2) \times 10^{-2}\,mm$$

$$w(x,y,z) = (3x+2b\,y^2 + z)10^{-2}\,mm$$

No ponto de coordenadas (0,0.1,0.2)cm , γ_{xy} é 0.00020 rad, a deformação volumétrica é 0.0002 e a extensão segundo x é 0.0001.

(3.0) **a)**Determine o vector deslocamento no ponto de coordenadas (3,1,1).
(1.5) **b)** Mostre que o tensor das deformações é compatível.
(1.5) **c)** Determine a Deformação de Corte máxima no ponto (3,1,1).

(1.5) **a)**Trace os Diagramas de Esforços Transversos e Momentos Flectores

(3.0) **b)** No ponto A da viga existe um extensómetro que indica que a deformação axial é de compressão e de 80×10^{-4}. Determine o valor de **p** interveniente nas cargas a que a viga está sujeita.

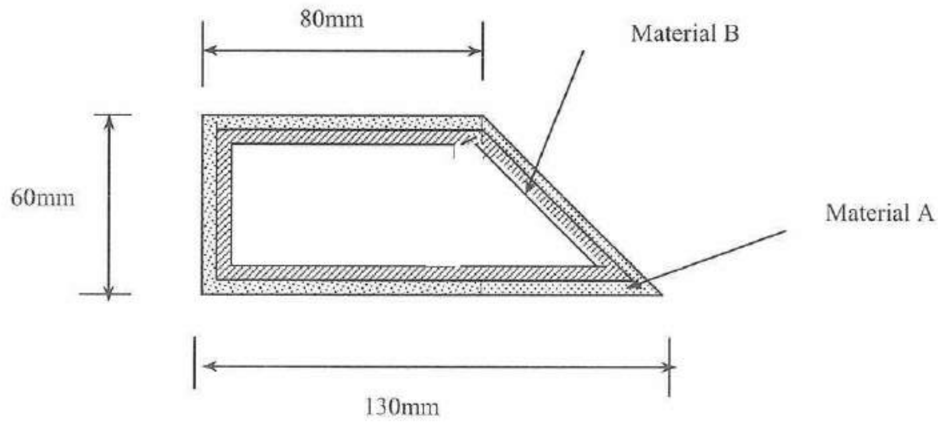
(1.0) **c)** Determine as Tensões de Corte máximas na viga.

(2.0) **d)**Determine o deslocamento transversal no ponto A.

O ***Módulo de Young*** do material da viga é **200Gpa**.

3. Peças sujeitas a momentos torsores.

(2.5) Considere um veio de secção composta cujas dimensões se representam na figura 2. A tensão máxima instalada é de **120MPa**. O material **A** tem um módulo de rigidez transversal G_A **=140GPa** e o material **B** tem um módulo de rigidez transversal G_B **=100GPa** . A espessura do material **A** é igual à espessura do material **B** e é de 5mm.Determine o momento torsor aplicado e o ângulo de rotação.



Universidade do Porto
FEUP Faculdade de Engenharia

Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

Licenciatura em Gestão e Engenharia Indudtrial

Duração: 45 minutos

2003-10-30

Teste de *Resistência dos Materiais - parte prática*

Nota: *É permitida a consulta dos apontamentos da disciplina.*

Responda Concisamente às questões propostas .

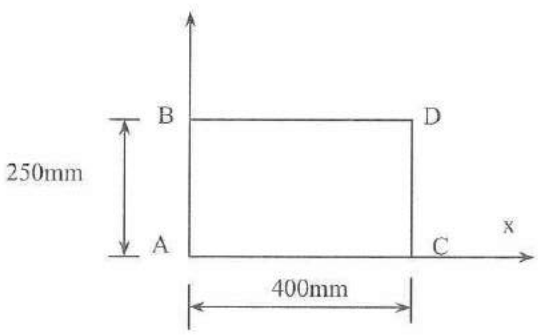
1. Considere o estado de tensão caracterizado pelo Tensor das Tensões seguinte:

$$\begin{bmatrix} 100 & a & b \\ c & 200 & 0 \\ d & 0 & e \end{bmatrix} \text{MPa}$$

(3.0 Val.) a) Determine os valores de a,b,c,d,e e determine as tensões e direcções principais de Tensão, sabendo que na faceta cuja normal é $\left\{-\sqrt{3}/3,\ \sqrt{3}/3,\ \sqrt{3}/3\right\}$ as tensões tangencial e normal são nulas.

(1.5 Val) b) Determine as Tensões Tangenciais Máximas e as correspondentes Tensões Normais e indique a orientação das facetas em que ocorrem. Ilustre com uma construção de Mohr os resultados obtidos.

2. Considere a placa de profundidade unitária representada na figura e admita que
- o comprimento de AB após deformação passou a ser de 252mm
- o ângulo BAC passou a ser de 89,783°
- a diagonal AD passou a ter o comprimento de 474mm.



(2.5 Val.) a) Determine o Tensor das Deformações

(1.5 Val.) b) Determine a mudança de área do elemento rectangular representado.

3. Considere um sólido com volume inicial de 900 cm^3, constituído por um material linear elástico, homogéneo e isotrópico. O Sólido foi colocado dentro duma câmara hidráulica e sujeito a um pressão uniforme de compressão de 9MPa e a redução de volume ocorrida foi de 9 cm^3. O referido sólido num ensaio separado do anterior foi sujeito a uma tensão tangencial pura de 3MPa em duas facetas ortogonais, o ângulo entre as referidas facetas passou a ser de 89.8371°.

(2.0 Val.) **a)** Determine o módulo de Young e o Coeficiente de Poisson do referido material.

(1.5 Val.) **b)** Admitindo que um sólido do referido material é sujeito num ponto ao estado de Tensão caracterizado pelo Tensor das Tensões seguinte:

$$\begin{bmatrix} 120 & 200 & 100 \\ 200 & 150 & 0 \\ 100 & 0 & -80 \end{bmatrix}$$

e determine o Tensor das Deformações no Ponto em questão.

(1.0 Val) **c)** Determine os Invariantes do Tensor das Deformações.

Licenciatura em Gestão e Engenharia Industrial

RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

Data : 26 de Outubro de 2000 *Duração : 45m* *Sala : B227*

Responda Concisamente às questões propostas .

1. Considere que as componentes do tensor das tensões num ponto são

$$\begin{bmatrix} 11 & x & 2 \\ y & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

(2.0) **a)** Duas das Tensões Principais são: 5.1010 e 14.8990 MPa. Determine a outra tensão principal e as componentes x e y do tensor das tensões.

(2.0) **b)** Determine a grandeza do vector tensão normal na faceta cuja normal tem um versor $\vec{\ell} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$.

(2.0) **c)** Determine o Tensor das Deformações correspondente admitindo que o material é Linear Elástico e que o Módulo de Compressibilidade Volumétrica é de 170GPa e o Módulo de Elasticidade Transversal é 90GPa .

(1.0) **d)** Determine as Extensões Principais, as direcções principais de Extensão e os Invariantes das Deformações.

2. O Campo de deslocamentos num sólido é definido do seguinte modo

$u = axy \quad v = bxy \quad w = 2c(x+y)z$

(2.0) **a)** Determine as constantes a, b e c tendo em conta que a deformação volumétrica é 0.0004, a extensão segundo x é 0.0001 e a distorção no plano xy é 0.0025 rad no ponto de coordenadas (1,2,1.5).

(1.0) **b)** Determine o tensor das Deformações.

3. Considere o Estado Plano de tensão e num ponto do sólido considere que o tensor das tensões é

$$\begin{bmatrix} -50 & 30 \\ 30 & 80 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

(2.0) **a)** Determine o tensor das tensões no ponto, num sistema de eixos que se obtém rodando de 30°, em torno do eixo dos zz no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, o sistema de eixos inicial.

(1.0) **b)** Determine as Tensões Principais e a tensão de corte máxima.

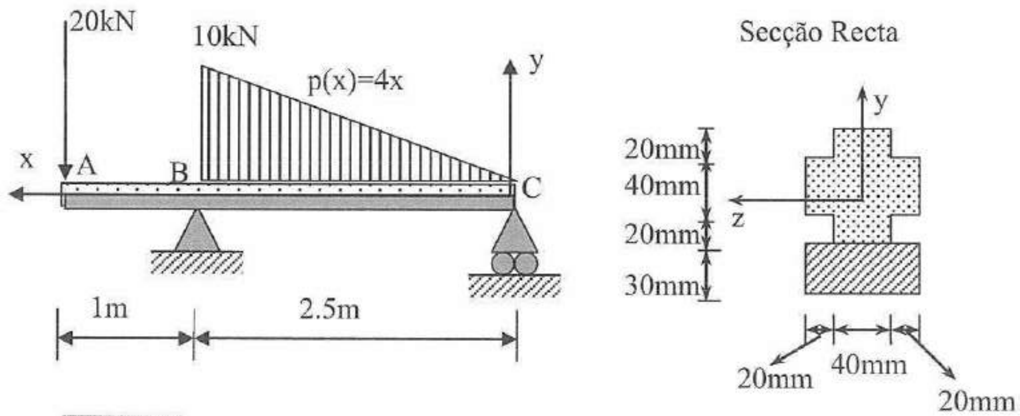
Utilize a Construção de Mohr

Universidade do Porto FEUP Faculdade de Engenharia	Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial **Licenciatura em Engenharia Industrial e Gestão**
Duração: 45minutos	2007-12-03

Mini-Teste de Mecânica dos Sólidos e Estruturas

Nota: *com consulta.*

1 Considere a **Viga Plana Isostática** representada na figura, cuja secção recta também se representa e despreze o peso da viga para efeitos dos cálculos subsequentes.



Material **A:** Módulo de Young 200GPa

Material B: Módulo de Young 150GPa

(0.7) **a)** Trace os Diagramas de Esforços Transversos e Momentos Flectores.
(0.5) **b)** Determine a posição do Centro de Gravidade da Secção.
(0.5) **c)** Determine as Tensões Axiais Máximas de tracção e compressão e indique a secção em que actuam e os pontos da secção em que ocorrem.
(0.5) **d)** Determine as Tensões de Corte na Secção A da Viga e num plano de corte coincidente com o eixo dos zz.
(0.8) e) Determine o deslocamento transversal no ponto A.

Licenciatura em Gestão e Engenharia Industrial

RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

***Data**: 7 de Janeiro de 2000* ***Duração**: 3 Horas* ***Sala**: 263*

Resolução do Teste.

1. Considere um prisma de dimensões $200\times250\times200\,\text{mm}^3$, constituído por um material linear elástico e isotrópico, de tal modo que:
- sujeito a um estado de pressão hidrostática p=100MPa o volume passe a ser de $10{,}015\times10^6\,\text{mm}^3$
- sujeito a uma tensão de corte τ=200MPa a distorção é γ=0.2250º como se representa na figura 1.

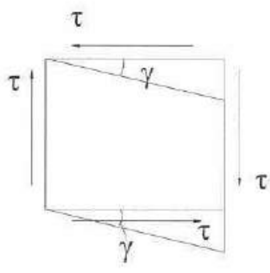


Figura 1

Sob a acção do estado de tensão caracterizado pelo tensor das tensões:

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}\times10^2\,\text{MPa}$$

Determine:

(2.0) **a)** o Tensor das Tensões, sabendo que:
- uma tensão principal é nula
- as outras duas tensões principais têm o mesmo valor absoluto, sendo uma positiva e a outra negativa
- não é um estado plano de tensão,

(2.0) **b)**o Tensor das deformações,
*(1.0)***c)**a variação de volume do prisma,
(1.0) **d)**as Extensões e as Direcções Principais de Extensão.

Resolução:

a) 1ª Forma de Solução

O tensor das tensões é:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \times 10^2\,\text{MPa}$$

Sendo:

- uma tensão principal é nula
- as outras duas tensões principais têm o mesmo valor absoluto, sendo uma positiva e a outra negativa
- não é um estado plano de tensão.

O tensor das tensões Principais toma a forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & -X \end{bmatrix} \times 10^2\,\text{MPa}$$

donde se infere que os invariantes do Tensor das Tensões são:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = X - X = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = a - 4 + b = 0$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \\ & \sigma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 & \\ & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_2 & \\ & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 = -X^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = -4a - 4 + ab - 4b$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -4ab - 4b = 0$$

Existem duas soluções possíveis:

b=0 e a=4

b=5 e a=-1

A primeira solução é inadequada por se saber que não é um estado plano de tensão e consequentemente só a 2ª solução é adequada:

O tensor das tensões é:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \times 10^2\,\text{MPa}$$

2ª Forma de Solução

O tensor das tensões é:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \times 10^2\,\text{MPa}$$

Consequentemente, as tensões principais são tais que:

$$\sigma = \begin{vmatrix} a-\sigma & 2 & 0 \\ 2 & -4-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & b-\sigma \end{vmatrix} \times 10^2\,\text{MPa} = 0$$

ou seja:

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$$

Para que as raizes desta equação sejam tais que:

- uma tensão principal é nula

-as outras duas tensões principais têm o mesmo valor absoluto, sendo uma positiva e a outra negativa

$I_3 = -4ab - 4b = 0$

$I_1 = a - 4 + b = 0$

ou seja:

b=0 e a=4

b=5 e a=-1

Destas duas soluções só uma é viável uma vez que não se trata de um estado plano de tensão e consequentemente o tensor das tensões é:

$$\sigma = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \times 10^2\,\text{MPa}$$

b)

Para calcular o tensor das deformações é necessário calcular o modulo de Young,E e o coeficiente de Poisson, ν, tendo em conta que se sabe:

um prisma de dimensões $200\times250\times200\,\text{mm}^3$, constituido por um material linear elástico e isotrópico, de tal modo que:

-sujeito a um estado de pressão hidrostática p=100MPa o volume passe a ser de $10{,}015\times10^6\,\text{mm}^3$

-sujeito a uma tensão de corte τ=200MPa a distorção é γ=0.2250º=0.00392699rad .

A variação de volume por unidade de volume é:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{10{,}015 - 10{,}000}{10{,}000} = 0.0015$$

Por outro lado sabe-se que:

$$p = K\frac{\Delta V}{V} = \frac{E}{3(1-2\nu)}\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{100}{0.0015}\,\text{MPa} = 66666.6(6)\text{MPa}$$

E=200000-400000ν

A tensão de corte relaciona-se com a distorção através da relação seguinte:

$$\tau = G\gamma = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma \Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{0.00392699} = 50929.58179\text{MPa}$$

E=101859.1636+101859.1636ν

Resolvendo o sistema de equações:

E=200000-400000ν

E=101859.1636+101859.1636ν

Obtém-se:
98140.83642=501859.1636ν ou seja ν=.1955
E=200000−400000ν ou seja E=121800MPa
A Lei de Hooke tem a forma:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right] = \frac{1}{121800}\left[-100 - 0.1955 \times 100\right] = -0.000981$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}\right] = \frac{1}{121800}\left[-400 - 0.1955 \times 400\right] = -0.003926$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right] = \frac{1}{121800}\left[500 + 0.1955 \times 500\right] = 0.004908$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{200}{50929.58179} = 0.003927$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} = 0$$

O Tensor das Deformações é:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -0.981 & 1.9635 & 0 \\ 1.9635 & -3.926 & 0 \\ 0 & 0 & 4.908 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

c) A variação de Volume do Prisma é:

$$\Delta V = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})V = 10 \times 10^{6}\,\mathrm{mm}^{4}$$

d)O tensor das Deformações é:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -0.981 & 1.9635 & 0 \\ 1.9635 & -3.926 & 0 \\ 0 & 0 & 4.908 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Consequentemente os valores próprios e os vectores próprios são:

$\varepsilon_1 = 0.0008; \varepsilon_2 = -4.9078; \varepsilon_3 = 4.908$

$v_1 = \{-0.8944, 0.4472, 0\}; v_2 = \{-0.4472, -0.8944, 0\}; v_3 = \{0,0,1\}$

2. Considere a **Viga Plana Isostática** representada na figura **2**, cuja secção recta também se representa e despreze o peso da viga para efeitos dos cálculos subsequentes.

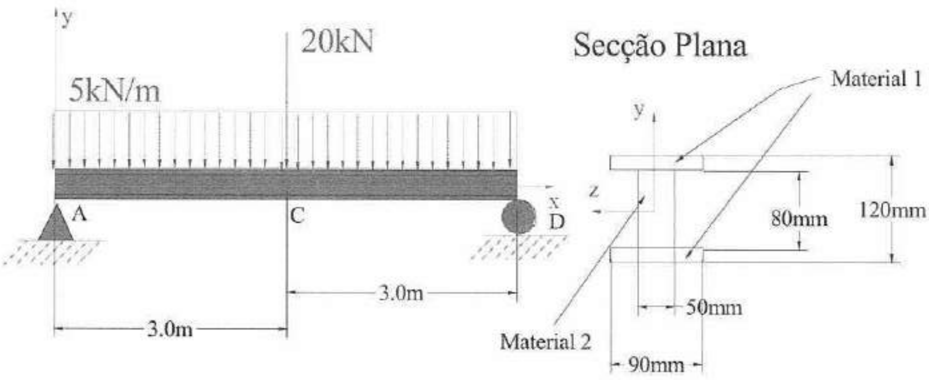


Figura 2 : Viga Simplesmente Apoiada

(1.0) **a)** Trace os Diagramas de Esforços Transversos e Momentos Flectores.
(2.0) **b)** Determine as Tensões Axiais Máximas e indique a secção ou secções em que actuam.
(2.0) **c)** Determine a Tensão de Corte a uma distância de **y=45mm** do eixo neutro.
(2.5) **d)** Determine o Deslocamento Transversal no ponto **C** da viga da figura **2**, recorrendo ao método de integração directa e ao método das diferenças finitas (considere 3 pontos na viga, excluindo os extremos), compare os resultados.

Considere que os materiais do sólido tem as propriedades elásticas seguintes:
Material 1-Módulo de Young **E=200GPa** ; Coeficiente de Poisson **ν = 0.3**
Material 2 -.Módulo de Young **E=120GPA**;Coeficiente de Poisson **ν=0.28**

Resolução:

a) As reacções de Apoio são:
$R_A = R_D = 25kN$
Os esforços Transversos são:
$T(x)=25-5x$ para $0 \leq x < 3$
$T(x)=-5x+20$ para $3 < x \leq 6$
O diagrama correspondente é o que se representa na figura 3.
Os momentos flectores são:

$$M(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 25x \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$M(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 5x + 60 \quad \text{para} \quad 3 \leq x \leq 6$$

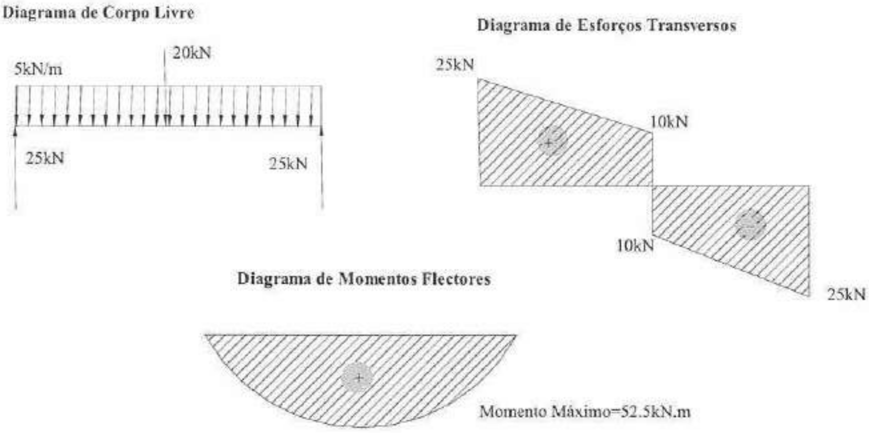
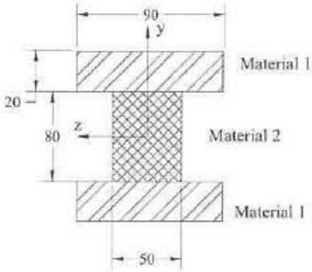


figura 3

b) 1ª Forma de Solução



$$I_1 = \frac{b\,h^3}{12} + b\,h\,d^2 = \frac{90\times 20^3}{12} + 20\times 90\times 50^2 = 60000 + 4500000 =$$
$$= 4560000\ \text{mm}^4 = 4.56\times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$I_2 = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{50\times 80^3}{12} = 2133333.3(3)\text{mm}^4 = 2.13(3)\times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$R = \frac{2\,E_1 I_1 + E_2 I_2}{M} = \frac{2\times 200000\times 4.56 + 120000\times 2.13(3)}{52500}$$
$$R = 39.619\text{m}$$

As tensões são:

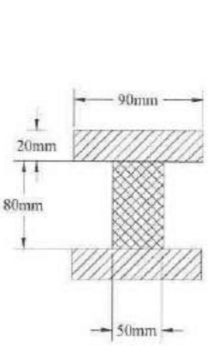
$$\sigma_{x1} = \frac{M}{2\,E_1 I_1 + E_2 I_2} E_1\, y_1 = \frac{200\times 10^9}{39.619} 60\times 10^{-3} = 302.88\text{MPa}$$

$$\sigma_{x2} = \frac{M}{2\,E_1 I_1 + E_2 I_2} E_2\, y_2 = \frac{120\times 10^9}{39.619} 40\times 10^{-3} = 121.15\text{MPa}$$

A tensão máxima ocorre nas fibras superiores e inferiores e na Secção Média.

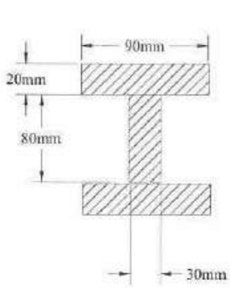
Outra forma de Solução

Considere-se a Secção equivalente constituda pelo material 1, como se representa na figura 5:



$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{120}{200} = 0.6$$

Secção Equivalente no Material 1



$$I_{eq} = \left[\frac{90\times 20^3}{12} + 20\times 90\times 50^2\right]\times 2 + \frac{30\times 80^3}{12} = 10.4\times 10^6\,\mathrm{mm}^4$$
$$= 10.4\times 10^{-6}\,\mathrm{m}^4$$

Figura 5

A tensão máxima é:

$$\sigma_1 = \frac{M}{I_{eq}} y_{max} = \frac{52500}{10.4\times 10^{-6}} 60\times 10^{-3} = 302.88\mathrm{MPa}$$

A tensão máxima ocorre nas fibras superiores e inferiores e na Secção Média.

c) *Uma forma de Solução*

$$\tau = \frac{T\,S_a}{t\,I_{eq}} = \frac{25000\times 90\times 15\times (60-7.5)\times 10^{-9}}{90\times 10.4\times 10^{-6}} = 1893.03\mathrm{Pa}$$

d)

Determinação do Deslocamento Transversal por integração Directa:
Para 0<x<3

$$EIw'' = -\frac{5}{2}x^2 + 25x$$

$$EIw' = -\frac{5}{6}x^3 + 25\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EIw = -\frac{5}{24}x^4 + 25\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

sendo para x=0 w=0, obtém-se $C_2 = 0$.
sendo para x=3 w′=0, obtém-se $C_1 = -90$
Para 3<x<6

$$EIw'' = -\frac{5}{2}x^2 + 5x + 60$$

$$EIw' = -\frac{5}{6}x^3 + 5\frac{x^2}{2} + 60x + D_1$$

$$EIw = -\frac{5}{24}x^4 + 5\frac{x^3}{6} + 30x^2 + D_1 x + D_2$$

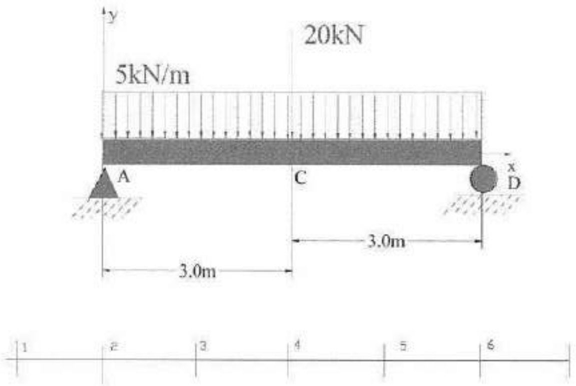
sendo para x=3 w′=0, obtém-se $D_1 = -180$

sendo para x=6 w=0,obtém-se $D_2 = 90$

Consequentemente para x=3 obtém-se o valor máximo de w que é:

$$w = \frac{1395}{8EI} = \frac{173.125}{EI}$$

Pelo método das diferenças finitas tem de considerar-se um conjunto discreto de pontos, como se representa na figura 6.



$w_2 = w_6 = 0$

$w_1 = -w_3$

$w_7 = -w_5$

$p_3 = 5$

$p_4 = 18.3(3)$

$p_5 = 5$

Figura 6

As equações a considerar pelo método das diferenças finitas são, depois de considerar as condições de fronteira representadas na figura:

$$\begin{cases} 5\,w_3 - 4\,w_4 + w_5 = \dfrac{25.3125}{EI} \\ -4\,w_3 + 6\,w_4 - 4\,w_5 = \dfrac{92.8125}{EI} \\ w_3 - 4\,w_4 + 5w_5 = \dfrac{25.3125}{EI} \end{cases}$$

donde se obtém:

$w_3 = w_5 = 130.78/EI$

$w_4 = 189.84/EI$

O erro cometido no cálculo por diferenças finitas é:

$$\boxed{e = \frac{189.84 - 173.125}{173.125} = 9.65\%}$$

3. Peças sujeitas a <u>momentos torsores</u>.

(2.0) **a)**Considere um veio de secção circular composta cujo diâmetro exterior é **150mm** e cujo diâmetro interior é **100 mm** . A tensão máxima instalada é de **180MPa**. O **material A** tem um módulo de rigidez transversal G_A**=120GPa** e o **material B** tem um módulo de rigidez transversal G_B**=180GPa**. Determine o <u>momento torsor</u> $\underline{M_T}$ a que a peça está sujeita.

(1.5) **b)**Deduza a **Equação de Poisson**.

Secção do veio da alinea a)

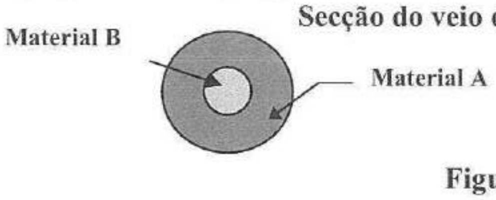


Figura 7

Resolução

As tensões são:

$$\tau_A = G_A r\theta$$

$$\tau_B = G_B r\theta$$

O momento torsor é:

$$M_t = G_A \theta \int_A r^2 dA + G_B \theta \int_B r^2 dB = [G_A J_A + G_B J_B]\theta$$

$$\theta = \frac{M_t}{G_A J_A + G_B J_B}$$

$$\tau_A = G_A \frac{M_t}{G_A J_A + G_B J_B} r$$

$$\tau_B = G_B \frac{M_t}{G_A J_A + G_B J_B} r$$

Cálculo dos momentos de Inércia Polares das áreas A e B:

$$J_A = \frac{\pi}{2}\left(r_A^4 - r_B^4\right) = \frac{\pi}{2}\left(0.075^4 - 0.05^4\right) = 39.9 \times 10^{-6}\,m^4$$

$$J_B = \frac{\pi}{2} r_B^4 = \frac{\pi \times 0.05^4}{2} = 9.82 \times 10^{-6}\,m^4$$

$$G_A J_A + G_B J_B = 180 \times 10^9 \times 9.82 \times 10^{-6} + 120 \times 10^9 \times 39.9 \times 10^{-6} = 6.556 \times 10^6$$

$$\tau_A = G_A \frac{M_t}{G_A J_A + G_B J_B} r \Rightarrow 180 \times 10^6 = 120 \times 10^9 \frac{M_t}{6.556 \times 10^6} 0.075 \Rightarrow M_t = 131{,}112 kN.m$$

$$\tau_B = G_B \frac{M_t}{G_A J_A + G_B J_B} r \Rightarrow 180 \times 10^6 = 180 \times 10^9 \frac{M_t}{6.556 \times 10^6} 0.05 \Rightarrow M_t = 131{,}112 kN.m$$

A tensão máxima ocorre simultâneamente no material A e no material B para um momento Torsor igual a 131.112kN.m.

b)Ver Teórica

Licenciatura em Gestão e Engenharia Industrial

RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

***Data**: 1 de Fevereiro de 2000* ***Duração**: 3 Horas* ***Sala**: 263*

1. O sólido do qual se extraiu o tetraedro da figura é construido por um material que pode ser considerado isotrópico e homogeneo e com comportamento linear. Durante o processo de deformação pura e homogenea a que está sujeito o tetraedro deforma-se de tal modo que:
- o volume do sólido não se altera
- o novo comprimento de $\overrightarrow{OB}$ é de 2.001 cm
- o ângulo BOC não se altera
- as novas coordenadas do ponto D são {1.0005,0.0005,1.0025) cm

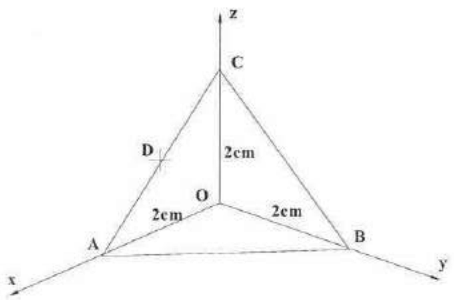


Figura 1

(2.0) **a)**Determine o Tensor das deformações,

(2.0) **b)** Determine o Tensor das Tensões, sabendo que:
- o Módulo de Young é **E**=200Gpa
- um cubo de lado 10 cm construido do material do tetraedro está sujeito a uma tensão de compressão segundo x de 10MPa e sofre um alongamento por unidade de comprimento segundo y e z de 2×10^{-5}.

(1.0) **c)** Determine o versor da normal á faceta que está sujeita à tensão resultante {82,478;82,478;206,362}MPa.

(1.0) **d)**Determine as Tensões e as Direcções Principais de Tensão.

Resolução

1. a) Tendo em conta as condições em que se processa a deformação de acordo com a informação conclui-se que:

$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0$ *(a)*

$$\varepsilon_{yy} = \frac{0.001}{2} = 0.0005$$

$$\gamma_{yz} = 0.0$$

$$\overline{D} - D = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0005 \\ 0.0005 \\ 0.0025 \end{Bmatrix}$$

donde:

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xz} = 0.0005$$

$$\varepsilon_{xz} + \varepsilon_{zz} = 0.0025$$

Juntando a estas duas equações a equação (a)

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xz} = 0.0005$$

$$\varepsilon_{xz} + \varepsilon_{zz} = 0.0025$$

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz} = -0.0005$$

e resolvendo obtém-se:

$$\varepsilon_{xz} = 0.00175; \varepsilon_{xx} = -0.00125; \varepsilon_{zz} = 0.00075$$

O tensor das deformações tem a forma

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -0.00125 & 0.0005 & 0.00175 \\ 0.0005 & 0.0005 & 0 \\ 0.00175 & 0 & 0.00075 \end{bmatrix}$$

b) O coeficiente de Poisson é tal que:

$$\nu = \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}$$

Tendo em conta que:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{10 \times 10^6}{200 \times 10^9} = 0.5 \times 10^{-4} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{yy} = 2 \times 10^{-5}$$

obtém-se

$$\nu = \frac{0.5 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-5}} = 0.4$$

Por aplicação da lei de Hooke obtém-se:

$$\sigma_{xx} = -\frac{200 \times 10^9}{1.4} \times 0.00125 = -178.57143$$

$$\sigma_{yy} = \frac{200 \times 10^9}{1.4} \times 0.0005 = 71.4286$$

$$\sigma_{xx} = \frac{200 \times 10^9}{1.4} \times 0.00075 = 107.14286$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\sigma_{xy} = 2G\,\varepsilon_{xy} = 2\times\frac{200\times10^9}{2\times1.4}\times0.0005 = 71.4286$$

$$\sigma_{xz} = 2G\,\varepsilon_{xz} = 2\times\frac{200\times10^9}{2\times1.4}\times0.00175 = 250$$

$$\sigma_{yz} = 2G\,\varepsilon_{yz} = \frac{200\times10^9}{1.4}\times0.0 = 0$$

O tensor das tensões é portanto:

$$\sigma = \begin{bmatrix} -178.571 & 71.429 & 250 \\ 71.429 & 71.429 & 0 \\ 250 & 0 & 107.143 \end{bmatrix}\text{MPa}$$

c)Por resolução do sistema de equações seguinte :

$$\begin{bmatrix} -178.571 & 71.429 & 250 \\ 71.429 & 71.429 & 0 \\ 250 & 0 & 107.143 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 82.478 \\ 82.478 \\ 206.362 \end{Bmatrix}$$

os cossenos directores da normal à faceta, que são:

$$\begin{Bmatrix} 0.57735 \\ 0.57735 \\ 0.57735 \end{Bmatrix}$$

d)As tensões principais são:

$$\sigma_1 = 259.312, \sigma_2 = 73.826, \sigma_3 = -333.137\text{MPa}$$

As direcções principais de tensão são:

$$\{0.5101 \quad 0.1939 \quad 0.8380\}^T$$

$$\{-0.0325 \quad -0.9692 \quad 0.2441\}^T$$

$$\{-0.8595 \quad 0.1518 \quad 0.4881\}^T$$

2. Considere a **Viga Plana Isostática** representada na figura **2**, cuja secção recta também se representa e despreze o peso da viga para efeitos dos cálculos subsequentes.

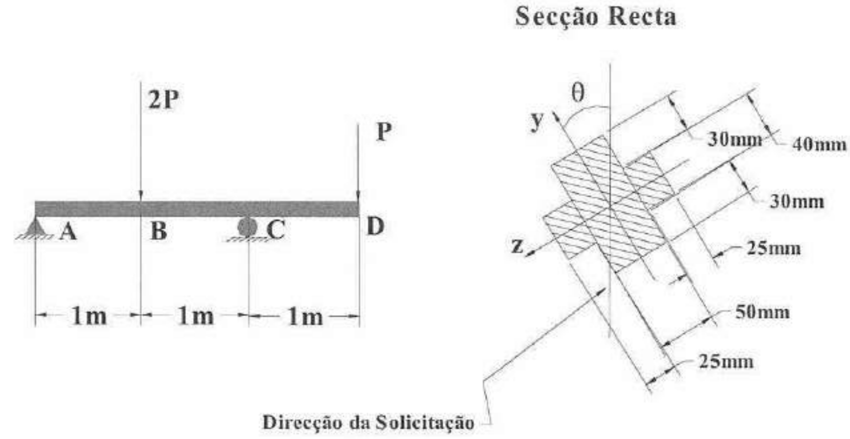


Figura 2 : Viga Simplesmente Apoiada

(1.0) **a)** Trace os Diagramas de Esforços Transversos e Momentos Flectores.

(2.5) **b)** Determine a carga P de tal modo que as tensões axiais máximas instaladas sejam de 180MPa no caso de θ ser 30º.

(1.5) **c)** Determine a Tensão de Corte a uma distância de **y=0mm** do eixo neutro no caso de **θ** ser 0º , na secção que em que o esforço transverso for máximo.

(2.5) **d)** Determine o Deslocamento Transversal no ponto **B e D** da viga da figura **2**, recorrendo ao Método da Viga Conjugada. Determine a rotação no ponto C.

Considere que os materiais do sólido tem as propriedades elásticas seguintes:
Material -Módulo de Young **E=200GPa** ; Coeficiente de Poisson **ν = 0.3**

Resolução

a) *Os Diagramas de Esforços Transversos e Momntos Flectores estão representados na figura 3 e foram obtidos a partir das expressões seguintes:*

Para $0<x<1$ $T = R_A = P/2$
Para $1<x<2$ $T=-3P/2$
Para $2<x<3$ $T=P$

Para $0<x<1$ $M=Px/2$
Para $1<x<2$ $M= -3Px/2+2P$
Para $2<x<3$ $M=Px-3P$

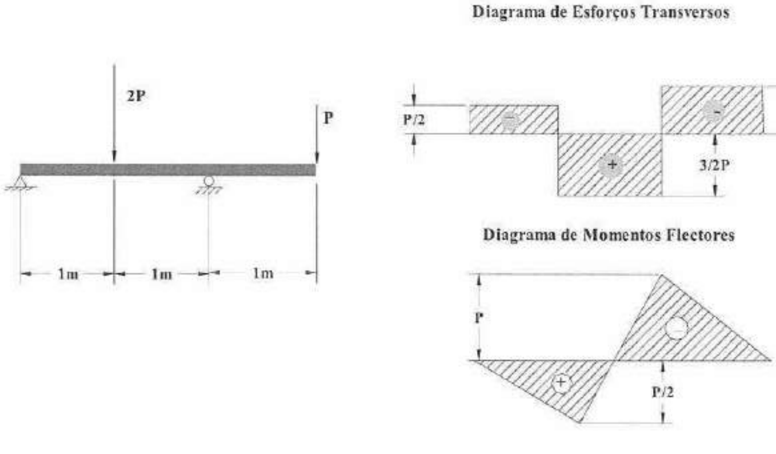


Figura 3: Diagramas de Esforços

b) *O momento que surge tem duas componentes uma segundo y e outra segundo zz,sendo M=-P, as componentes do momento são:*

$$M_z = -P\cos 30^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}P$$

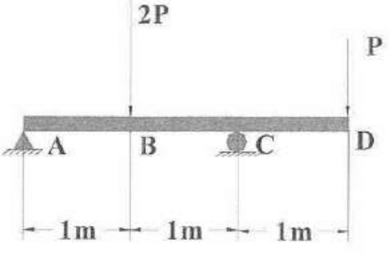
$$M_y = -P\text{sen}30^{\circ} = -0.5P$$

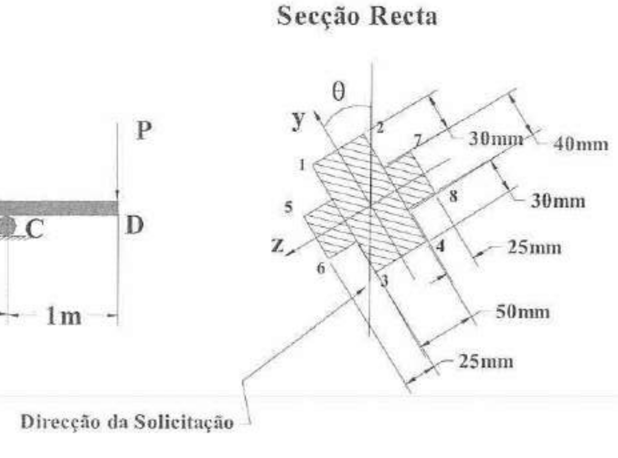
É necessário determinar os momentos de Inércia que são:

$$I_z = \frac{50\times100^3}{12} + 2\times\left(\frac{25\times40^3}{12}\right) = 4.433\times10^6\,\text{mm}^4$$

$$I_y = \frac{100\times50^3}{12} + 2\times\left(\frac{40\times25^3}{12} + 40\times25\times37.5^2\right) = 3.96\times10^6\,\text{mm}^4$$

Os pontos indicados na figura4 vão ser analizados na Secção





$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z = \frac{\sqrt{3}P}{2\times 4.43\times 10^{-6}}y - \frac{0.5P}{3.96\times 10^{-6}}z$$

Ponto 1, y=50;z=25:

$$\sigma_{xx} = \frac{\sqrt{3}P}{2\times 4.43\times 10^{-6}}50\times 10^{-3} - \frac{0.5P}{3.96\times 10^{-6}}25\times 10^{-3} = 6.62\times 10^{3}P$$

Ponto 2, y=50;z=-25:

$$\sigma_{xx} = \frac{\sqrt{3}P}{2\times 4.43\times 10^{-6}}50\times 10^{-3} + \frac{0.5P}{3.96\times 10^{-6}}25\times 10^{-3} = 12.93\times 10^{3}P$$

Ponto 3, y=-50;z=25

$$\sigma_{xx} = -\frac{\sqrt{3}P}{2\times 4.43\times 10^{-6}}50\times 10^{-3} - \frac{0.5P}{3.96\times 10^{-6}}25\times 10^{-3} = -12.93\times 10^{3}P$$

Ponto 4, y=-50;z=-25

$$\sigma_{xx} = -\frac{\sqrt{3}P}{2\times 4.43\times 10^{-6}}50\times 10^{-3} + \frac{0.5P}{3.96\times 10^{-6}}25\times 10^{-3} = -6.62\times 10^{3}P$$

Ponto 5, y=20;z=50

$$\sigma_{xx} = +\frac{\sqrt{3}P}{2\times 4.43\times 10^{-6}}20\times 10^{-3} - \frac{0.5P}{3.96\times 10^{-6}}50\times 10^{-3} = -2.40\times 10^{3}P$$

Ponto 6, y=-20;z=50

$$\sigma_{xx} = -\frac{\sqrt{3}P}{2\times 4.43\times 10^{-6}}20\times 10^{-3} - \frac{0.5P}{3.96\times 10^{-6}}50\times 10^{-3} = -10.22\times 10^{3}P$$

Ponto 7, y=20;z=-50

$$\sigma_{xx} = +\frac{\sqrt{3}P}{2\times 4.43\times 10^{-6}}20\times 10^{-3} + \frac{0.5P}{3.96\times 10^{-6}}50\times 10^{-3} = 10.22\times 10^{3}P$$

Ponto 8, y=-20;z=-50

$$\sigma_{xx} = -\frac{\sqrt{3}P}{2\times 4.43\times 10^{-6}}20\times 10^{-3} + \frac{0.5P}{3.96\times 10^{-6}}50\times 10^{-3} = 2.40\times 10^{3}P$$

$$\boxed{(\sigma_{xx})_{max} = 12.93\times 10^{3}P = 180\times 10^{6} \Rightarrow P = 13.92\text{kN}}$$

c)O esforço de corte máximo ocorre para 1<x<2 e é T=-1.5P

$$\tau_{xy} = \frac{T.S}{b\,I_z} = \frac{-1.5P\times S}{100\times 10^{-3}\times 4.43\times 10^{-6}}$$

O centro de gravidade da área tracejada da figura 4 fica a uma distância do centro de gravidade da Secção que é:

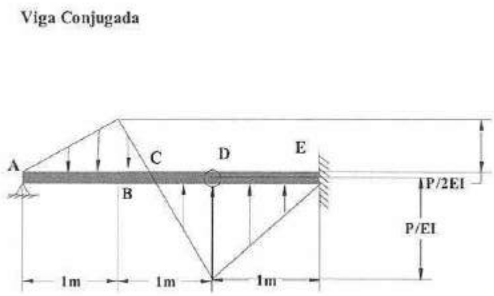
$$\bar{y} = \frac{50\times 30\times 35 + 20\times 100\times 10}{50\times 30 + 20\times 100} = 20.714\text{mm}$$

O momento estático S é:

$$S = (50\times 30 + 20\times 100)\times 20.962 = 72499\ \text{mm}^3$$

$$\tau_{xy} = \frac{T.S}{b\,I_z} = \frac{-1.5P \times 72.499\,10^{-6}}{100 \times 10^{-3} \times 4.43 \times 10^{-6}} = 245.482P$$

c) Cálculo da Deformada pelo método da viga conjugada



Para 0<x<l M=Px/2
Para 1<x<2 M= -3Px/2+2P
Para 2<x<3 M=Px-3P
M=0 para x=(4/3)P
As Reacções de Apoio são tais que:

$$R_A \times 2 = \frac{P}{4EI} \times \frac{4}{3} - \frac{P}{4EI} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{3} - \frac{P}{2EI} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{3} \Rightarrow R_A = \frac{P}{3EI}$$

$$R_E = -R_A + \frac{P}{4EI} + \frac{P}{4EI} \times \frac{1}{3} - \frac{P}{2EI} \times \frac{2}{3} - \frac{P}{2EI} \Rightarrow R_A = -\frac{2P}{3EI}$$

As equações a Resolver são:

$$\frac{d^2 M'}{d x^2} = \frac{M}{EI}$$

Para 0<x<l M=Px/2

$$\frac{dM'}{dx} = \frac{P x^2}{4EI} + C_1$$

$$M' = \frac{P x^3}{12EI} + C_1 x + C_2$$

Para 1<x<2 M= -3Px/2+2P

$$\frac{dM'}{dx} = -\frac{3P\,x^2}{4EI} + \frac{2Px}{EI} + C_3$$
$$M' = -\frac{P\,x^3}{4EI} + \frac{P\,x^2}{EI} + C_3 x + C_4$$

Para 2<x<3 M=Px-3P

$$\frac{dM'}{dx} = \frac{P\,x^2}{2EI} - \frac{3Px}{EI} + C_5$$
$$M' = \frac{P\,x^3}{6EI} - \frac{3P\,x^2}{2EI} C_5 x + C_6$$

As constantes calculam-se tendo em conta as condições de fronteira e de continuidade na viga conjugada.

Para x= 0 : M=0
Para x=2: $M_E = 0$
Para x=2: $M_D = 0$
Para x=1: $M_E = M_D; T_E = T_D$
Para x=2: $T_E = T_D$

Estas condições conduzem a seis equações que permitem o cálculo das 6 constantes de integração.

As equações que se obtêm são:
Para x= 0 : M=0 $C_2 = 0$

Para x=2:M=0 $M' = -\frac{P\,2^3}{4EI} + \frac{P\,2^2}{EI} + 2C_3 + C_4 \Rightarrow 2C_3 + C_4 = -\frac{2P}{EI}$

Para x=2:M=0 $M' = \frac{P\,2^3}{6EI} - \frac{3P\,2^2}{2EI} + 2C_5 + C_6 \Rightarrow 3C_5 + C_6 = \frac{14P}{3EI}$

Para x=1: $M_E = M_D \Rightarrow \frac{P}{12EI} + C_1 = \frac{3P}{4EI} + C_3 + C_4$

Para x=1: $T_E = T_D \Rightarrow \frac{P}{4EI} + C_1 = \frac{5P}{4EI} + C_3$

Para x=2: $T_E = T_D \Rightarrow \frac{P}{EI} + C_3 = -\frac{4P}{EI} + C_5$

donde:

$$C_1 = -\frac{P}{6EI}; C_2 = 0; C_3 = -\frac{7P}{6EI}; C_4 = \frac{P}{3EI}; C_5 = \frac{23P}{6EI}; C_6 = -\frac{3P}{EI}$$

A deformada para x=1 é:

$$\boxed{w = \frac{-P}{12EI}}$$

e a inclinação para x=2 é:

$$\boxed{\frac{dw}{dx} = \frac{35P}{6EI}}$$

3. Peças sujeitas a momentos torsores.

Considere um veio de secção circular composta construído a partir de uma barra de aço com 70mm de diâmetro revestida por um tubo de latão perfeitamente acoplado à barra de aço.

Aço: $\mathbf{G_A = 80GPa}$ Latão: $\mathbf{G_L = 40GPa}$.

(1.5) **a)** Determine o diâmetro exterior do tubo de tal modo que ao aplicar um momento torsor ao veio composto, esse momento seja igualmente distribuído pelos dois materiais.

(2.0) **b)** Determine a tensão de corte máxima em cada um dos materiais para um momento torsor aplicado de 20kN.m.

Resolução

a) A igual distribuição do momento torsor pelo aço e pelo latão implica que seja:

$$G_A J_A = G_l J_l$$

donde : $80 \times R_A^4 = 80 \times 35^4 = 40 \times \left(R_l^4 - 35^4\right) \Rightarrow R_l = 46.06\text{mm}$

O diâmetro é: d=92.12mm

b)As tensões são:

$$\sigma_A = G_A R_A \theta$$
$$\sigma_l = G_l R_l \theta$$

sendo:

$$\theta = \frac{M_t}{G_A J_A + G_l J_l}$$

$$\sigma_A = G_A \frac{M_t}{G_A J_A + G_l J_l} R_A = \frac{80 \times 20 \times 35}{80 \times \frac{\pi}{2} \times 0.035^4 + 40 \times \frac{\pi}{2} \times \left(0.04606^4 - 0.035^4\right)} = 148.5\text{MPa}$$

$$\sigma_l = G_l \frac{M_t}{G_A J_A + G_l J_l} R_l = \frac{40 \times 20 \times 46.06}{80 \times \frac{\pi}{2} \times 0.035^4 + 40 \times \frac{\pi}{2} \times \left(0.04606^4 - 0.035^4\right)} = 97.72\text{MPa}$$

Universidade do Porto
FEUP Faculdade de Engenharia

Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

Licenciatura em Engenharia Indudtrial e Gestão

Duração: 1h 30 minutos 2008-01-24

Teste de *Mecânica dos Sólidos e das Estruturas - parte prática*

Nota: *É permitida a consulta dos apontamentos da disciplina.*

1. Considere o cubo de dimensões unitárias representado na figura 1 no qual se pode considerar válidas as funções deslocamento seguintes:

$u = \alpha(2x + 3y)$; $v = 2\beta(y + x)$; $w = 2\gamma z$ onde α, β e γ são constantes

(1.0) **a)** Determine as constantes α, β e γ tendo em conta que a deformação volumétrica é 0.0004, a extensão segundo x é 0.0001 e a distorção no plano xy é 0.0025 rad no ponto de coordenadas (1,1,1).

(1.0) **b)** Determine o tensor das Deformações.

(0.25) **b)**A variação do ângulo formado por AO e OG.

(1.0) **c)**A variação de comprimento do segmento OC durante o processo de deformação do sólido.

(0.5) **d)**O tensor das tensões, admitindo que o material é isotrópico e tem as seguintes propriedades materiais:

E=210GPa e ν=0.3.

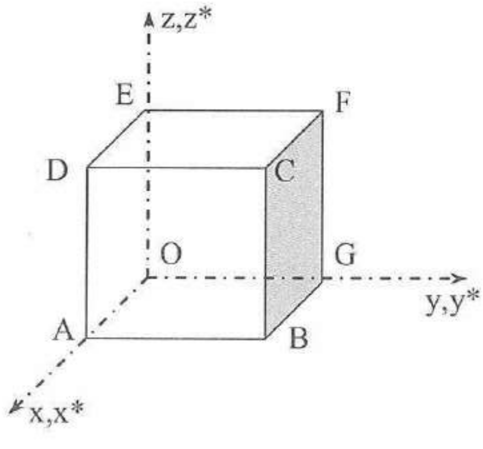


Figura 1

1. Considere a **Viga Plana Isostática**, representada na figura **1** e despreze a acção do peso nos cálculos subsequentes. A Secção recta tem a forma representada na figura.

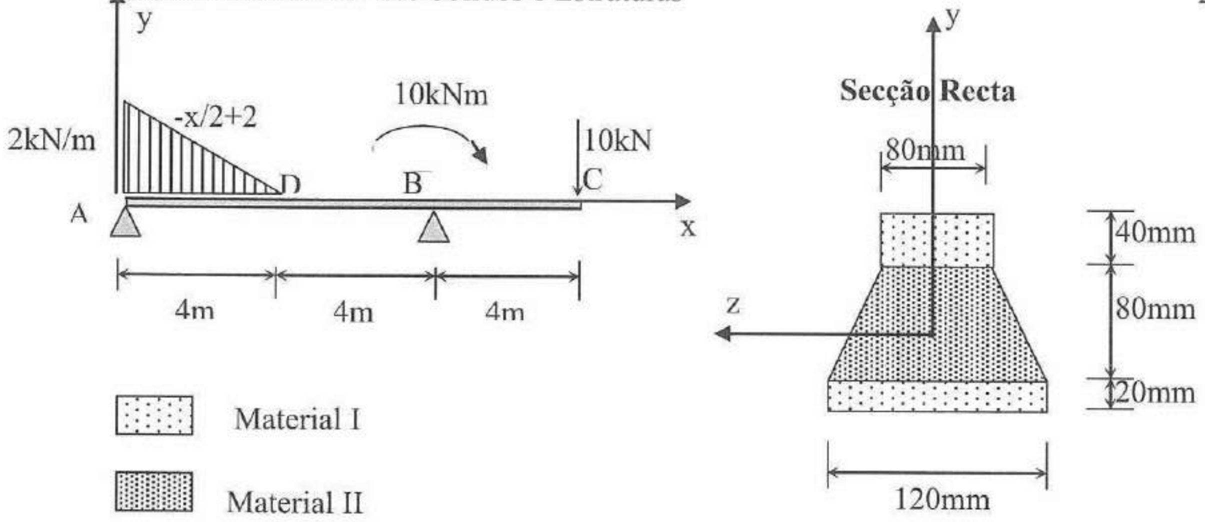


Figura 1: Viga Simplesmente Apoiada

(1.5) **a)** Trace os Diagramas de Esforços,
(0.25) **b)** Determine a Posição do Centro de Gravidade,
(1.0) **c)** Determine a Tensão Axial Máxima,
(0.5) **d)** Determine a Tensão de Corte na ligação entre os dois materiais,
(1.5) **e)** Determine a Expressão da Deformada no tramo **AB,**
(0.5) **f)** Determine a Deformação Axial máxima.

Material I - Módulo de Young 180 GPa
Material II- Módulo de Young 90 GPa

(2.25) **3.** Considere um veio prismático de secção tubular conforme representado na figura3.
O módulo de rigidez do material é G = 100 GPa e a tensão admissível é τ_{adm} = 80 Mpa.

Determine o momento torsor máximo que o veio é capaz de transmitir e o respectivo ângulo de torção por unidade de comprimento. A espessura é constante e igual a 5mm.

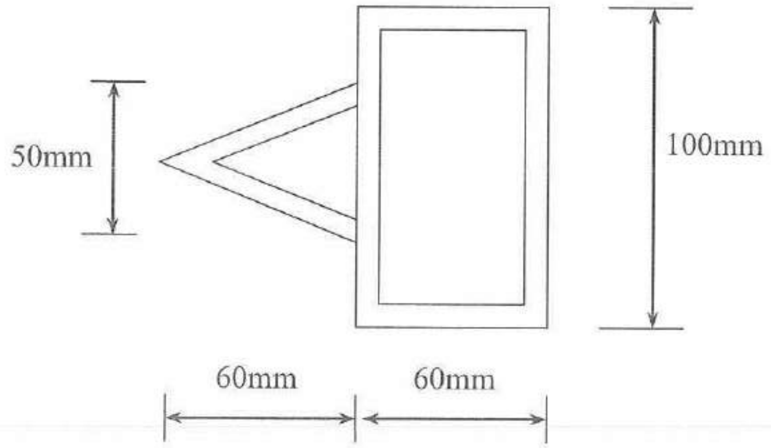


Figura 3

Universidade do Porto
FEUP Faculdade de Engenharia

Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

Licenciatura em Engenharia Indudtrial e Gestão

Duração: 1h 30 minutos 2007-02-13

Teste de *Mecânica dos Sólidos e das Estruturas - parte prática*

Nota: *É permitida a consulta dos apontamentos da disciplina.*

1. Considere o cubo de dimensões unitárias representado na figura 1 no qual se pode considerar válidas as funções deslocamento seguintes:

$u = \alpha(2x + 3y)$; $v = 2\beta y$; $w = 2\gamma z$ onde α, β e γ são constantes

e determine:

(1.0) **a)**O tensor das deformações admitindo que se trata de pequenas deformações.
(0.5) **b)**A variação do ângulo formado por AO e OG.
(1.0) **c)**A variação de comprimento do segmento OC durante o processo de deformação do sólido.
(0.5) **d)**O tensor das tensões, admitindo que o material é isotrópico e tem as seguintes propriedades materiais:
E=210GPa e ν=0.3.

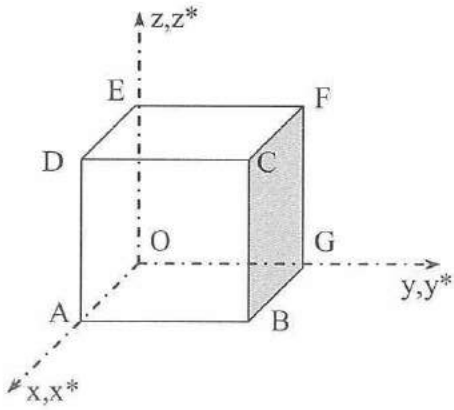
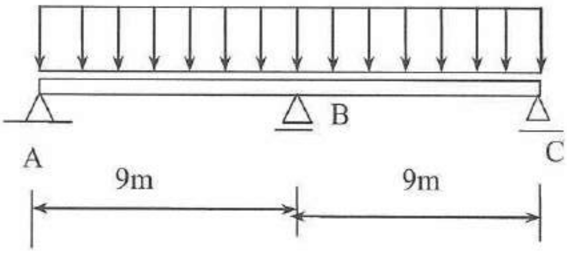


Figura 1

1. Considere a viga Hiperestática representada na figura 2. A secção da viga é um T duplo como se representa.



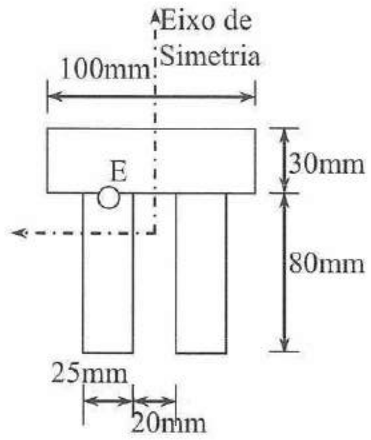


Figura 2

(2.5) **a)** Determine as Reacções de Apoio
(1.25) **a)** Trace os Diagramas de Esforços Transversos e Momentos Flectores.
(0.75) **b)** Determine as Tensões axiais máximas de Compressão e Tracção e indique onde ocorrem.
(0.75) **c)** Determine as Tensões de Corte máximas e indique onde ocorrem.
(0.5) **e)** Na secção a que corresponde o ponto B da viga determine as tensões principais no ponto E da Secção.

(2.5) **3.** Considere um veio prismático de secção tubular conforme representado na figura3.
O módulo de rigidez do material é G = 100 GPa e a tensão admissível é τ_{adm} = 80 Mpa.

Determine o momento torsor máximo que o veio é capaz de transmitir e o respectivo ângulo de torção por unidade de comprimento. A espessura é constante e igual a 5mm.

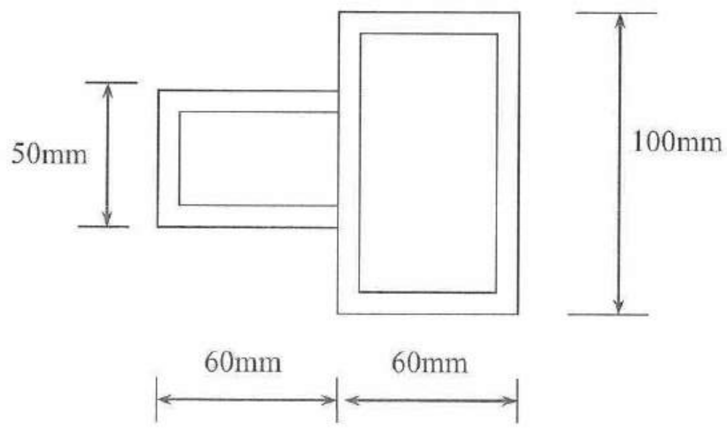


Figura 3

Universidade do Porto FEUP Faculdade de Engenharia	Departamento de Engenharia Mecânica Mestrado Integrado em Engenharia Industrial e Gestão
Duração: 2h	2010-01-26

Exame de *Mecânica dos Sólidos e das Estruturas*

Nota: *É permitida a consulta dum Livro e dos "Slides" da disciplina.*

1. Considere o cubo de dimensões unitárias representado na figura no qual se pode considerar válidas as funções deslocamento seguintes:

$u = \alpha(3x + 2y)$; $v = 2\beta(y + 2x)$; $w = 2\gamma z$ onde α, β e γ são constantes

(1.5) a) Determine as constantes α, β e γ tendo em conta que a deformação volumétrica é 0.0002, a extensão segundo x é 0.00005 e a distorção no plano xy é 0.00025 rad no ponto de coordenadas (1,1,1),

(1.0) b) Determine o Tensor das Deformações,

(0.5) c) A variação do ângulo formado por EO e OG,

(2.0) d) A variação de comprimento do segmento OC durante o processo de deformação do sólido,

(1.0) e) O tensor das tensões no ponto de coordenadas (1,1,1), admitindo que o material é isotrópico e tem as seguintes propriedades materiais:

E=210GPa e v=0.3.