

**U.** PORTO

**FEUP** FACULDADE DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE DO PORTO

# Dinâmica de Pneus

10-01-2015



**Trabalho realizado por:**  
Luís Linhares

**Docente:**  
Professor José Ferreira Duarte  
**Disciplina SPSA**

# Índice

<b>1- Introdução e objetivos.....</b>	<b>1</b>
<b>2- História.....</b>	<b>2</b>
<b>3- Nomenclatura do Pneu.....</b>	<b>3</b>
<b>4- Composição, construção e materiais dos pneus.....</b>	<b>7</b>
4.1- Composição.....	7
4.2- Construção – Pneus Radiais e BIAS <sup>[V2]</sup> .....	10
4.3- Materiais, a borracha.....	12
<b>5- Mecânica e dinâmica dos Pneus.....</b>	<b>16</b>
5.1- Forças e Momentos.....	16
5.2- Desenvolvimento de forças no pneu (Análise estática).....	18
5.3- Forças presentes quando aceleramos a fundo ou travamos a fundo em linha reta.....	21
5.3.1- Travagem.....	21
5.3.2- Aceleração ou situação de tração.....	24
5.4- <i>Slip VS Desgaste</i> .....	26
5.5- Modelos matemáticos para o cálculo das forças.....	27
5.5.1- <i>Tire Brush Model</i> .....	28
5.5.1.1- <i>Pure Side Slip</i> .....	28
5.5.1.2- <i>Pure Longitudinal Slip (em travagem)</i> .....	33
5.5.1.3- <i>Lateral and longitudinal Slip (Combined Slip)</i> .....	37
5.5.2- <i>Fórmula mágica (Magic Formula)</i> .....	41
5.5.2.1- <i>Introdução à Magic Formula</i> .....	41
5.5.2.2 – <i>Magic Formula</i> .....	44
<b>6- Conclusão.....</b>	<b>51</b>
<b>7- Trabalhos Futuros.....</b>	<b>52</b>
<b>8- Bibliografia e referências.....</b>	<b>53</b>
8.1- Bibliografia.....	53
8.2- Referência de Vídeos.....	53
8.3- Referência de Figuras.....	53

## Índice de Gráficos

<b>Gráfico 1-</b> Gráfico do índice de velocidade <sup>[G1]</sup> .....	4
<b>Gráfico 2-</b> Gráfico representativo da rigidez e perda de energia de um elastómero em função da frequência <sup>[V1]</sup> .....	13
<b>Gráfico 3-</b> Gráficos de representação da evolução da pressão (G1), Força longitudinal (G2), Slip (G3) e velocidade (G4), durante o comprimento da pegada de contacto numa situação de travagem <sup>[V1]</sup> .....	22
<b>Gráfico 4-</b> Gráficos de representação da evolução da pressão (G1), Força longitudinal (G2), Slip (G3) e velocidade (G4), no comprimento da pegada de contacto durante uma aceleração <sup>[V1]</sup> .....	25
<b>Gráfico 5-</b> Curvas da força longitudinal, momento vertical e Pneumatic Trail em função do Slip Angle <sup>[1]</sup> .....	31
<b>Gráfico 6-</b> Gráfico que representa a força de travagem em função do Slip Longitudinal <sup>[1]</sup> .....	36

## Índice de Tabelas

<b>Tabela 1-</b> Tabela de coeficientes para a fórmula com a influência da conicidade e Ply Steer <sup>[2]</sup> .....	47
<b>Tabela 2-</b> Coeficientes para a fórmula agora também com o fator carga vertical <sup>[2]</sup> .....	48
<b>Tabela 3-</b> Coeficientes para a fórmula mas agora com o camber incluído <sup>[2]</sup> .....	49

## Índice de Figuras

Figura 1- Diferentes tipos de pneus e pisos <sup>[F1]</sup> .....	1
Figura 2- Carroça com pneus metálicos <sup>[F2]</sup> .....	2
Figura 3- John Boyd Dunlop <sup>[F3]</sup> .....	2
Figura 4- Código DOT <sup>[F4]</sup> .....	3
Figura 5- Código DOT em pneu Pirelli <sup>[F5]</sup> .....	3
Figura 6- Marca de fabrico <sup>[F6]</sup> .....	4
Figura 7- Pneu com marca de medidas <sup>[F7]</sup> .....	4
Figura 8- Pneu com marcação de medidas, índice de carga e de velocidade <sup>[F8]</sup> .....	5
Figura 9- Pneu com marcação de classificação de performance <sup>[F9]</sup> .....	5
Figura 10- Pneu em corte <sup>[F10]</sup> .....	7
Figura 11- Pneu em corte <sup>[F11]</sup> .....	7
Figura 12- Estrutura BIAS e Radial de pneus em corte <sup>[V2]</sup> .....	10
Figura 13- Pegada sem o pneu carregado <sup>[V2]</sup> .....	10
Figura 14- Pegada com o pneu carregado <sup>[V2]</sup> .....	10
Figura 15- Distribuição de pressão na pegada um pneu BIAS e outro Radial <sup>[V2]</sup> .....	11
Figura 16- Molécula (forma original) .....	12
Figura 17- Molécula esticada .....	12
Figura 18- Cadeia de moléculas .....	13
Figura 19- Conjunto mola-amortecedor .....	13
Figura 20- Representação das forças presentes num pneu <sup>[F12]</sup> .....	16
Figura 21- Representação do Slip Angle <sup>[F13]</sup> .....	17
Figura 22- <sup>[8]</sup> 22A- Perfil deformado, <sup>[8]</sup> 22B- Zoom da parte inferior da figura 22 <sup>a</sup> <sup>[8]</sup> 22C- Gradiente de pressões <sup>[8]</sup> .....	18
Figura 23- Representação da pegada de contacto de um pneu de camião de estrutura radial, na figura vemos as variações de pressão <sup>[V1]</sup> .....	18
Figura 24- Representação da pegada de contacto de um pneu de camião de estrutura radial, na figura vemos as variações de pressão <sup>[V1]</sup> .....	19
Figura 25- Corte de um pneu na zona de contacto com o chão (piso do pneu) .....	20
Figura 26- Representação da evolução de um elemento do pneu (cerda) desde que entra em contacto com o chão até que sai .....	21
Figura 27- Representação da pressão de contacto (p) durante travagem <sup>[V1]</sup> .....	23
Figura 28- Representação da força longitudinal F <sub>x</sub> na travagem <sup>[V1]</sup> .....	23
Figura 29- Pressão de contacto (p) durante aceleração/ tração <sup>[V1]</sup> .....	26
Figura 30- Força longitudinal, F <sub>x</sub> , durante aceleração/tração <sup>[V1]</sup> .....	26
Figura 31- Energia devido à fricção durante uma aceleração e durante uma travagem <sup>[V1]</sup> .....	26
Figura 32- Vista de topo e lateral de um pneu em Pure Side Slip, na zona de contacto com o chão <sup>[1]</sup> .....	28
Figura 33- Fases de evolução da força lateral com o aumento do Slip Angle e gráfico correspondente <sup>[1]</sup> .....	32
Figura 34- Representação lateral de um pneu com Pure Longitudinal Slip <sup>[1]</sup> .....	33
Figura 35- Zonas da pegada de um pneu. À esquerda zona de escorregamento e à direita zona de tração .....	35
Figura 36- Representação da deformação das situações de travagem e aceleração para um dado Slip Angle <sup>[1]</sup> .....	37

Figura 37- Representação de forças presentes quando fazemos uma aceleração e curvamos ao mesmo tempo. Esta também representado o Pneumatic trail t. <sup>[1]</sup> .....	40
Figura 38- a - Deformações em lonas simples <sup>[3]</sup> Figura 38-b – Deformação em lonas múltiplas .....	41
Figura 39- Perfis de pneu sujeito a pressão com lonas centradas (esquerda) e lonas chegadas à direita (direita) .....	42
Figura 40- Pneu com lonas centradas .....	42
Figura 41- Pneu com lonas chegadas à direita .....	42
Figura 42- Representação de pneu sujeito a Ply Steer.....	43
Figura 43- Representação de um pneu com camber, (vista de frente em cima, vista de topo em baixo) e conseqente força camber.....	44

## 1- Introdução e objetivos

Este trabalho foi realizado no âmbito da UC “Sistemas de propulsão e suspensão automóvel” com o acompanhamento e orientação do professor José Ferreira Duarte.

O presente irá tratar sobre dinâmica de pneus e qualquer outro assunto que nos ajude a estudar os modelos matemáticos. Os pneus são uma parte integrante do automóvel que tem extrema importância na sua dinâmica, segurança e conforto.

Portanto iremos abordar diversos assuntos sobre os mesmos, bem como:

- História;
- Nomenclatura, para quando olharmos para um pneu sabermos escolhe-lo e sabermos “lê-lo”;
- Dinâmica;

Durante o trabalho vamos também ver como se comporta o material que constitui grande parte do pneu, ou seja, a borracha.

Quanto à dinâmica iremos ver

- Forças que se desenvolvem no pneu;
- Modelos matemáticos que nos permitem quantificar os efeitos dinâmicos que surgem na utilização de um pneu.

E vão ser introduzidos dois modelos matemáticos

- Modelo de escovas – *Tire Brush Model*
- Fórmula mágica – *Magic Fórmula*

O primeiro é um modelo mais simples teórico e o segundo um modelo empírico estudado com um grau de detalhe mais elevado, introduzindo alguns efeitos que o *Tire Brush Model* não inclui.



Figura 1- Diferentes tipos de pneus e pisos <sup>[F1]</sup>

## 2- História

Os primeiros pneus a serem produzidos eram bandas de pele, ferro ou aço em volta de rodas de madeira que por exemplo eram usadas em carroças.

Estes “pneus” eram forjados e encaixados nas rodas de madeira ainda quentes. Posteriormente, quando o metal arrefecia, contraíam e ficavam devidamente ajustados às rodas.



Figura 2- Carroça com pneus metálicos [F2]

O primeiro pneu com utilização mais habitual foi inventado por um Escocês de seu nome John Boyd Dunlop. John era veterinário em Belfast em 1887 quando inventou um pneu para a bicicleta do seu filho, que tinha como objetivo minimizar as dores de cabeça quando andava de bicicleta em terrenos mais acidentados.

John Dunlop tentou registrar a patente em 1893 mas esta foi considerada inválida visto a invenção já pertencer a Scot Robert William Thomson, contudo Dunlop foi reconhecido por perceber que a borracha podia suportar o desgaste mantendo a sua resiliência.

A vulcanização em borracha natural foi reconhecida a Charles Goodyear e Robert William Thomson.

A borracha sintética foi inventada pelos laboratórios *Bayer* em 1920.

Hoje em dia são produzidos mais de 1 bilhão de pneus em mais de 400 fábricas e utilizados nas mais diversas áreas de transportes.

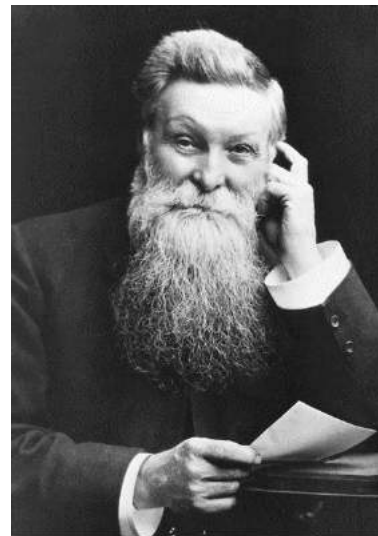


Figura 3- John Boyd Dunlop [F3]

### 3- Nomenclatura do Pneu

Para se distinguir um pneu e saber escolhe-lo em relação a vários parâmetros, os pneus estão marcados com uma nomenclatura própria. Imaginemos então que vamos a uma loja de pneus e nos deparamos com dezenas de pneus, então como o podemos escolher e “ler”?

#### Código DOT – (*Department of transportation*)



Figura 4- Código DOT [F4]

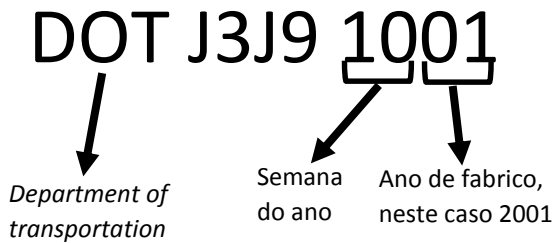


Figura 5- Código DOT em pneu Pirelli [F5]

O código DOT é uma marcação obrigatória em diversos países e que significa que os pneus respeitam ou excedem os padrões de segurança dos departamentos de transporte.

- 1- DOT;
- 2- Código do fabricante e da fábrica;
- 3- Código da medida do pneu;
- 4- Conjunto de símbolos opcionais que servem para identificar a marca ou outras características significativas do pneu;
- 5- Data de fabrico.

## Onde foi produzido?

Todos os pneus tem que trazer indicação do país onde foram produzidos, como na *figura 6* que podemos ver que o pneu foi fabricado no Japão.

Figura 6- Marca de fabrico [F6]



## Medidas do pneu e descrição de utilização



Figura 7- Pneu com marca de medidas [F7]

- 195 – Largura do pneu em milímetros;
- 65 – Rácio da altura pela largura da secção (%);
- R – Pneu de construção radial;
- 15 – Diâmetro da jante (polegadas);
- H – índice de velocidade. Consultando a tabela, neste caso, a velocidade máxima é de 210 km/h.



Gráfico 1- Gráfico do índice de velocidade [G1]

- 82 – Índice de carga (*Load Rating* na *Figura 8*), correspondente a 475kg de carga máxima que o pneu pode suportar.

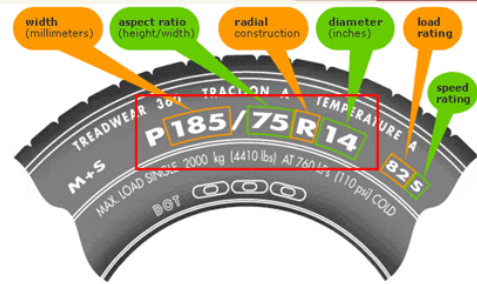


Figura 8- Pneu com marcação de medidas, índice de carga e de velocidade [F8]

Código	Kg	Código	Kg	Código	Kg	Código	Kg	Código	Kg	Código	Kg
60	250	71	345	82	475	93	650	104	900	115	1.215
61	257	72	355	83	487	94	670	105	925	116	1.250
62	265	73	365	84	500	95	690	106	950	117	1.285
63	272	74	375	85	515	96	710	107	975	118	1.320
64	280	75	387	86	530	97	730	108	1.000	119	1.360
65	290	76	400	87	545	98	750	109	1.030	120	1.400
66	300	77	412	88	560	99	775	110	1.060	121	1.450
67	307	78	425	89	580	100	800	111	1.090	122	1.500
68	315	79	437	90	600	101	825	112	1.120	123	1.550
69	325	80	450	91	615	102	850	113	1.150	124	1.600
70	335	81	462	92	630	103	875	114	1.180	125	1.650

Tabela 1 – Tabela de índices de carga [T1]

### Desgaste, tração e temperatura

Estas classificações de performance são definidas pelo DOT e são aplicáveis apenas a pneus com diâmetro igual ou superior a 13”, mas não a pneus de Inverno.



Figura 9- Pneu com marcação de classificação de performance [F9]

- *Treadwear* (TW) ou Desgaste do piso – Este número descreve como os fabricantes veem o desgaste de um pneu. Por exemplo, na *figura 9* temos 320, ou seja se tivéssemos 640 significava que o pneu durava duas vezes mais do que o que temos na imagem. Esta escala varia entre 60 e 700. Existe ainda uma relação entre o TW e o coeficiente de fricção:

$$\mu = \frac{2.25}{TW^{0.15}}$$

Ou seja, um baixo TW indica-nos um coeficiente de fricção maior e assim providencia-nos uma distância de travagem mais curta, mas em contrapartida também significa que o pneu se irá desgastar mais rapidamente.

- *Traction/* Tração – representa a capacidade de travagem em pavimento molhado. Podem ser classificados do maior para o menor como pneus AA, A, B e C. Portanto, um pneu com uma classificação AA irá ter melhor performance. Contudo, os testes que fazem para obter estas classificações não contam com situações a curvar, aquaplanagem ou aceleração.
- *Temperature/* Temperatura – Índice com graus A, B e C, sendo A o melhor e C o pior. Este índice representa a capacidade de o pneu dissipar e resistir ao calor.

## 4- Composição, construção e materiais dos pneus

Após a identificação de alguns conceitos relacionados com os pneus, vamos agora ver a composição do pneu e saber como se comporta o material que vemos diretamente quando olhamos para um pneu. Isto vai servir também para melhor entendermos a sua dinâmica.

### 4.1- Composição

O pneu à primeira vista é redondo e preto e praticamente toda a gente sabe que é de borracha, mas então e que mais podemos encontrar?

Podemos encontrar vários materiais, tais como a borracha, têxteis, aço...e podemos encontrar o seu estudo em diversas áreas tais como a engenharia mecânica ou a engenharia química entre outras.

Na *Figura 10* podemos nos aperceber de que o pneu é também constituído por vários elementos, que vão então ser descritos.



Figura 10- Pneu em corte [F10]

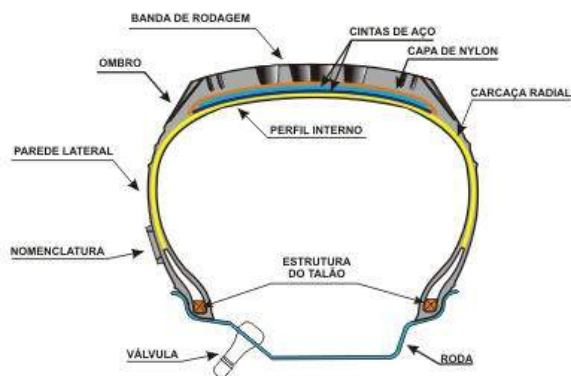


Figura 11- Pneu em corte [F11]

### 1 – Revestimento de borracha interior

Camada que se encontra no interior do pneu, esta camada é de borracha sintética e estanque ao ar, tem portanto a função de câmara-de-ar.

### 2 – Carçaça

A carçaça é uma estrutura flexível formada por filamentos têxteis ou de aço, esta estrutura forma arcos como se podem ver na imagem, estes arcos enrolam no aro do talão.

Sobre a carçaça são colocadas lonas e camadas de borracha que juntas irão formar o pneu.

A carcaça tem algumas funções bastante importantes:

- Suporta a carga e velocidade com a ajuda da pressão;
- Tem participação no conforto e estabilidade;
- Participa no rendimento e eficiência energética do pneu.

Curiosidade: Existem cerca de 1400 filamentos na carcaça do pneu de um automóvel, e cada um deles pode resistir a uma força de 15kg.

### **3 – Zona baixa**

Transmite o binário do motor em aceleração e travagem para a zona de contacto com o solo.

### **4 – Talão**

Parte onde se fixa e ajusta o pneu à jante. É formado por um filamento de aço inextensível e conforme a dimensão e tipo de pneu a sua forma e proporção podem variar.

Os talões são fabricados em aço entrançado, revestido a borracha, criando assim um vedante hermético entre o pneu e a jante.

Tem como funções:

- Fixar o pneu à jante;
- Realizar a estanquicidade do pneu;
- Transmitir o binário do motor nos esforços de aceleração e travagem.

Curiosidade: O aro de talão pode suportar, sem risco de rutura, até 1800kg.

### **5 – Flanco**

Zona que se situa entre a banda de rolamento e os talões do pneu e que confere ao pneu estabilidade lateral. Pode dizer-se então que esta é a altura do pneu.

Zona onde podemos encontrar a nomenclatura.

Tem como funções:

- Suportar a carga;
- Suportar constantes de flexões mecânicas;
- Resistência à fricção e agressões;
- Tem papel na estabilidade e conforto.

## 6 – Lonas

Aas lonas são constituídas por filamentos metálicos revestidos de borracha. Podemos encontrá-los sobre a carcaça formando uma cintura que garante a resistência mecânica do pneu à velocidade e à força centrífuga.

As lonas que formam a cintura cruzam-se obliquamente e colam-se umas em cima das outras. O cruzamento dos seus filamentos com os da carcaça forma triângulos indeformáveis, que garantem a rigidez do topo.

O papel destas camadas é muito complexo:

- No sentido circunferencial do pneu têm que ser bastante rígidas para não se estenderem sob o efeito da centrifugação quando o pneu está a rodar, e para controlar perfeitamente o diâmetro do pneu, independentemente das condições de utilização;
- Permitem que o pneu seja flexível mas não elástico.

## 7 – Banda de rodagem

É a parte que nós vemos diretamente quando olhamos para um pneu, a parte que contacta com a estrada. O piso é constituído por uma camada de borracha.

As suas funções são:

- Aderência em piso seco ou molhado;
- Durabilidade e resistência ao desgaste e agressões;
- Baixa resistência ao rolamento;
- Participar no conforto acústico;
- Participar na direção e manobrabilidade do veículo;
- Estética, os utilizadores dão-lhe importância.

## 4.2- Construção – Pneus Radiais e BIAS [V2]

No mercado existem dois tipos de pneus, os pneus radiais e os pneus BIAS. Hoje em dia nos automóveis o mais habitual é vermos pneus radiais visto trazerem bastantes vantagens em relação aos BIAS.

A sua diferença prende-se unicamente na estrutura do pneu. Nos pneus BIAS a estrutura é cruzada, enquanto nos pneus radiais, tal como o nome indica, a estrutura é radial.

Então quais são as diferenças?

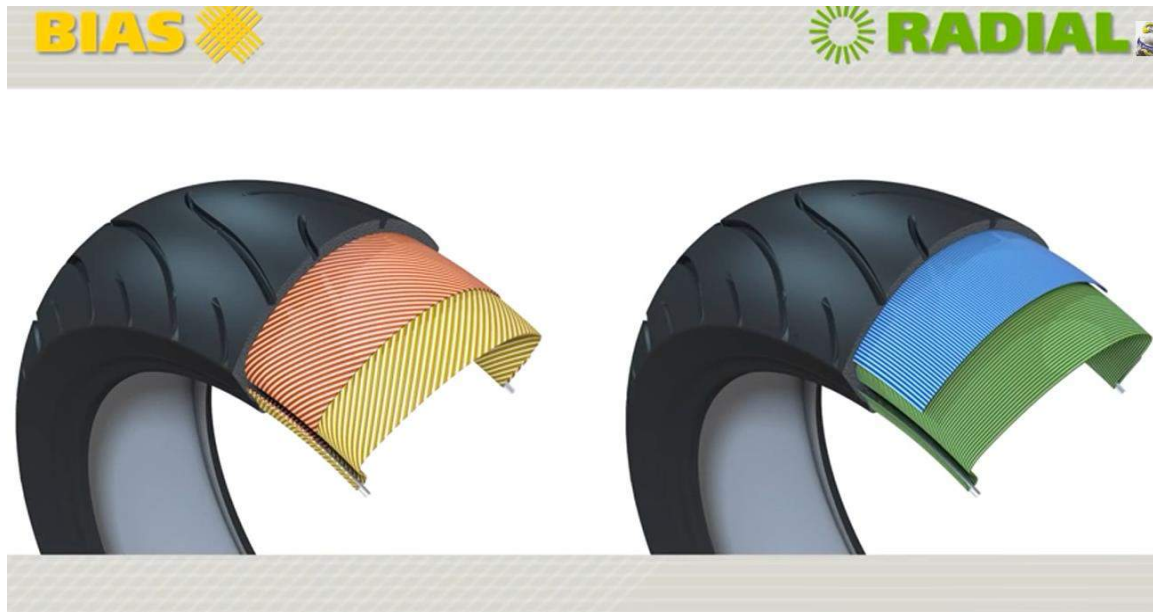


Figura 12- Estrutura BIAS e Radial de pneus em corte [V2]

Na Figura 12 (lado esquerdo), podemos ver que os pneus BIAS têm a carcaça como uma estrutura cruzada enquanto os pneus radiais têm a carcaça (a verde) como uma estrutura radial, onde por cima são aplicadas as cintas a 90°. Os pneus podem ter várias cintas que entre si fazem diversos ângulos.

Surge-nos agora outra pergunta. Como é que a estrutura afeta a performance do veículo?



Figura 13- Pegada sem o pneu carregado [V2]



Figura 14- Pegada com o pneu carregado [V2]

A Figura 13 representa o pneu sem a ação do peso do veículo enquanto a Figura 14 representa a pegada com o peso do veículo. O pneu BIAS tem uma pegada mais alta mas o radial tem a pegada mais larga o que lhe confere maior grip ou tração quando fazemos curvas.

Quanto à distribuição de pressão na pegada, na *figura 15* temos a sua representação. Podemos ver que no pneu radial a pressão é distribuída mais uniformemente o que conduz a um desgaste mais uniforme.

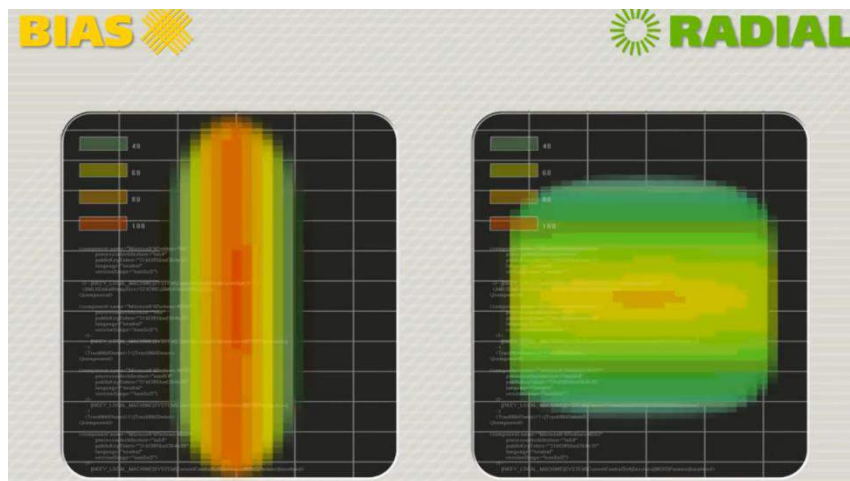


Figura 15- Distribuição de pressão na pegada um pneu BIAS e outro Radial [V2]

Se nos referirmos ao conforto, o pneu radial proporciona maior conforto a alta velocidade visto que as suas paredes laterais são mais flexíveis e amortecem melhor as irregularidades da estrada. O pneu BIAS tem a vantagem de conseguir suportar cargas mais pesadas visto as suas paredes laterais serem mais rígidas, o que é vantajoso para camiões.

O Pneu BIAS tem outra desvantagem já que o seu perfil se deforma a altas velocidades, afetando assim a manobrabilidade do veículo. Por sua vez o perfil do pneu radial mantém-se uniforme devido à lona perpendicular à orientação da carcaça.

### Concluindo

O pneus BIAS é recomendado para:

- Velocidades moderadas;
- Veículos com motores de tamanho pequeno ou médio e com um chassis relativamente flexível
- É também utilizável em veículos pesados ou que transportem cargas muito pesadas

O pneu Radial torna-se uma necessidade:

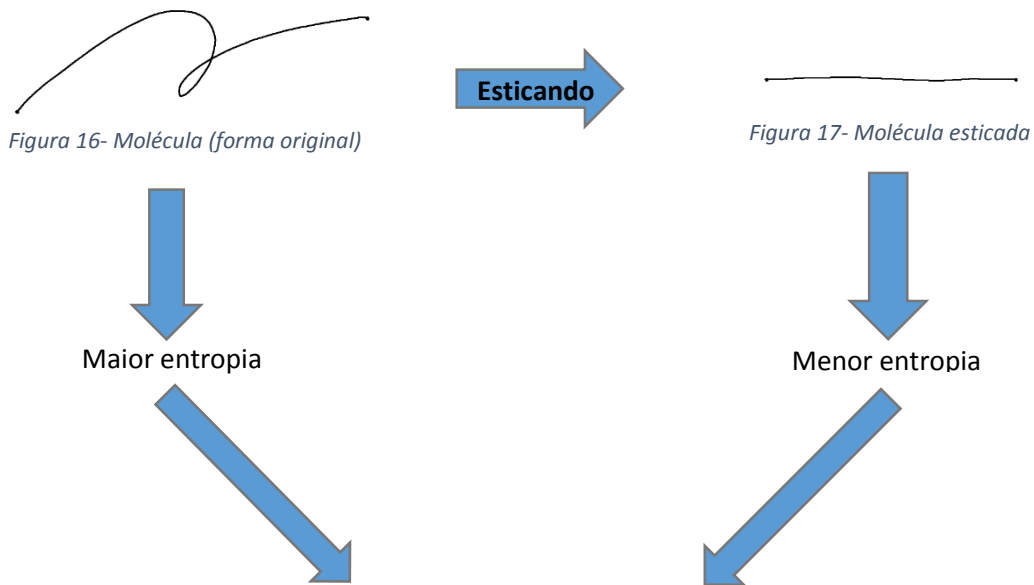
- Quando temos veículos mais potentes com chassis extremamente rígidos;
- Nas corridas de automóveis;
- A alta velocidade.

### 4.3- Materiais, a borracha

O material mais conhecido como constituinte do pneu é a borracha. A borracha é um elastómero que por sua vez pode ser um material viscoelástico para determinadas frequências de excitação.

Os elastómeros são longas cadeias de moléculas, que são vulcanizadas para se manterem juntas.

Imaginemos que uma molécula no seu estado original é representada da seguinte maneira (*Figura 16*):



Quando a molécula é esticada, a entropia é reduzida, mas por conseguinte existe uma força de reposição, que faz com que a molécula volte ao seu equilíbrio ou ao estado de não esticada. É então esta a razão pela qual a borracha volta ao seu estado original.

Podemos então afirmar que o fenómeno de deformação num elastómero é controlado pela entropia.

No pneu temos um número de moléculas que é praticamente impossível de contar, e portanto estas vão-se posicionar das mais variadas formas possíveis. Vamos admitir que a *figura 18* nos mostra um exemplo da sua disposição.

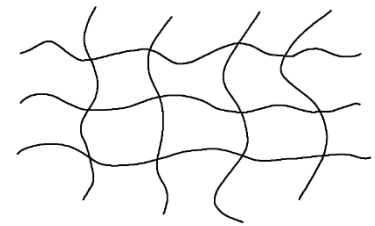


Figura 18- Cadeia de moléculas

Quando esticamos e soltamos estas moléculas, elas vão ter fricção entre si, o que causa um efeito de amortecedor. Podemos então assim representar a *figura 18* como um conjunto mola-amortecedor (*figura 19*).

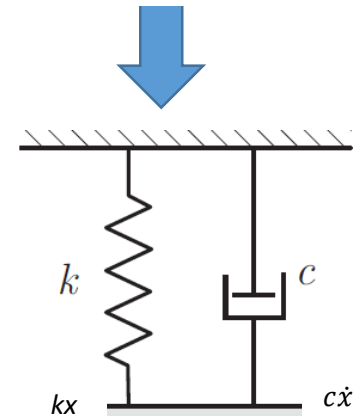


Figura 19- Conjunto mola-amortecedor

Neste conjunto e nos elastómeros, vão existir dois fenómenos muito importantes:

1. Temperatura;
2. Frequência, que nos dará o quão rápido podemos esticar e largar as moléculas.

Estes dois aspetos tem efeitos contrários como vamos poder ver a seguir.

Vamos então ver primeiro como a rigidez varia com a variação da frequência, ou seja, vamos excitar o material com uma determinada frequência e ver como ele se comporta quando é solicitado.

No **gráfico 2** é possível observar que quando aumentamos a frequência vamos também aumentar a rigidez, e que existem três zonas em que o material se vai comportar de maneiras diferentes.

Então que zona nos interessa estudar tendo em conta que vamos trabalhar com os pneus?

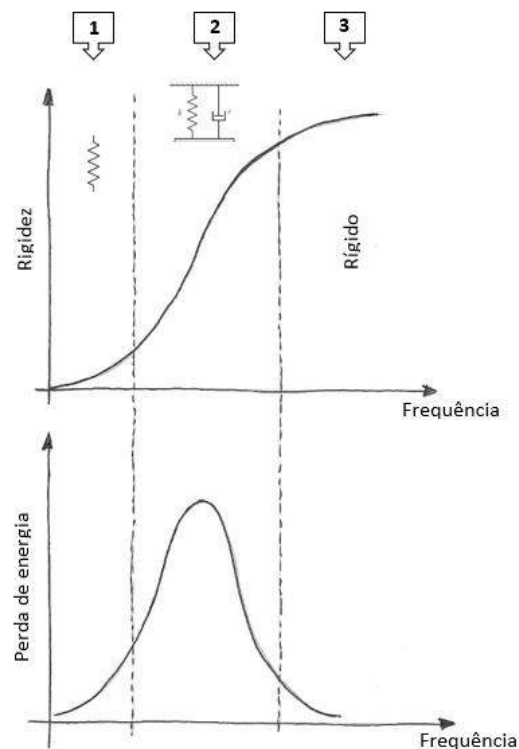


Gráfico 2- Gráfico representativo da rigidez e perda de energia de um elastómero em função da frequência <sup>[V1]</sup>

**Nota:** Temperatura constante!!!



Analisando o **gráfico 2** e admitindo que a temperatura não é variável:

**Zona 1** - Podemos nos aperceber que a baixas frequências as cadeias de moléculas vão atuar como uma mola, ou seja, o tempo é suficiente para as moléculas serem esticadas, voltarem ao normal e serem esticadas de novo. Podemos então admitir que a baixas frequências o elastómero se comporta como uma mola. Nesta zona podemos também observar que a perda de energia é menor.

**Zona 2** – É aqui que nós vamos querer trabalhar com o nosso elastómetro, esta é uma zona viscoelástica que apresenta características semelhantes às do conjunto mola-amortecedor, e que vê a perda de energia ser bastante aumentada com a evolução da frequência mas só até determinado ponto.

**Zona 3** - A altas frequências estas mesmas moléculas não vão ter tempo de fazer o ciclo “estica-encolhe-estica” e então vão-se tornar muito rígidas. Na zona 3 vemos também que a perda de energia vai diminuir.

A partir do **gráfico 3** podemos perceber melhor as zonas referidas. Este gráfico significa que quando largamos a borracha após ser esticada ela não vai retornar imediatamente, ou seja, vai demorar um pouco, tem uma *phase lag* ( $\delta$ ) entre o *stress* ( $\sigma$ ) e o *strain* ( $\epsilon$ ).

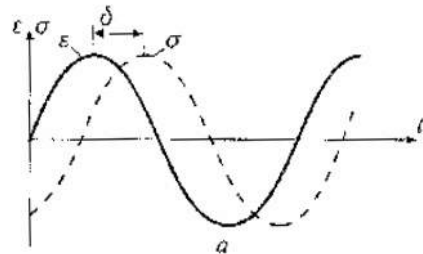


Gráfico 3 – Representação do atraso entre a excitação e deformação.

**Vistos os efeitos da frequência, então e se desta vez fixarmos a frequência e variarmos a temperatura, o comportamento será o mesmo?**

O comportamento de um elastômero com a variação da temperatura é exatamente o inverso do efeito da frequência. Vamos então analisar os gráficos.

**Zona 1** – Esta vai ser a zona de comportamento rígido do elastômero, onde as perdas de energia vão ser cada vez maiores à medida que aumentamos a temperatura.

**Zona 2** – Nesta zona é onde o material tem um comportamento viscoelástico, ou seja, comporta-se como um conjunto mola-amortecedor e a perda de energia vai aumentando até ao ponto máximo a que corresponde a *Glass Transition Temperature* ( $T_g$ ), que é a zona onde o material se torna muito macio. Portanto, o que nos interessa é trabalhar a partir da  $T_g$ .

**Zona 3** – Neste caso o material vai-se comportar como uma mola na zona de temperatura mais alta, mas tal como no caso da temperatura fixa, nesta zona vamos ter perdas de energia mais baixas que vão diminuindo quanto maior for a temperatura.

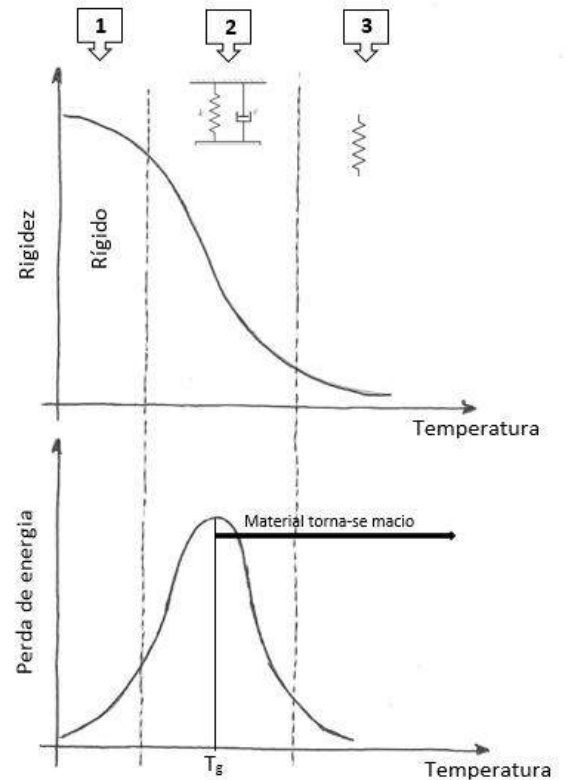


Gráfico 4- Gráfico representativo da rigidez e perda de energia de um elastômero em função da temperatura [V1]

### **Então e como funcionam os dois efeitos juntos?**

Pelo que vimos em cima podemos concluir que quando aumentamos a frequência a temperatura vai descer. Um aumento na frequência num fator de 10 leva a uma mudança de temperatura na ordem dos 7º a 8ºC. Esta mudança pode ser quantificada a partir das *Equações WLF* (William-Landel-Ferry). A equação *WLF* permite-nos que com informação acima da  $T_g$ , seja possível prever o comportamento dos materiais para temperaturas  $T > T_g$ , e para tempos/ frequências mais longas/ curtas.

## 5- Mecânica e dinâmica dos Pneus

### 5.1- Forças e Momentos

Nos automóveis uma das partes mais abusadas em termos mecânicos são os pneus, visto estes estarem sujeitos a variadas forças e momentos quando estão em contacto com o chão.

Como podemos ver na figura 20 temos três forças:

1. Força longitudinal ou força de tração –  $F_x$ , que resulta do *Longitudinal Slip*
2. Força lateral –  $F_y$ , que resulta do *Slip Angle*
3. Força normal –  $F_z$ , que resulta do peso do carro

E três momentos:

1.  $M_x$  – *Overtuning Moment*, momento de sobreviragem
2.  $M_y$  – Momento de resistência ao rolamento
3.  $M_z$  – *Restoring or aligning torque/ moment*, Momento de Auto alinhamento.

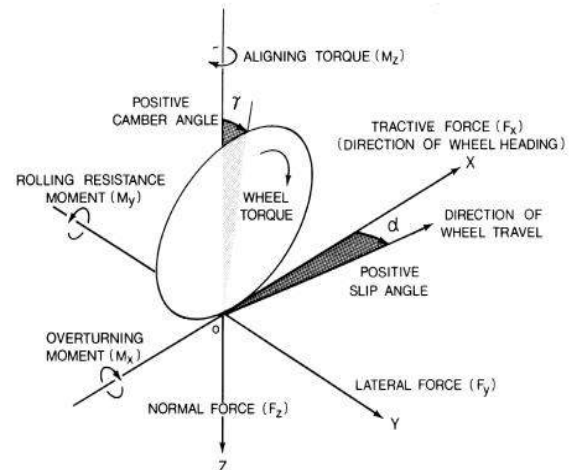


Figura 20- Representação das forças presentes num pneu [F12]

A primeira força que nos interessa realçar é a força longitudinal  $F_x$ . Tal como nos podemos aperceber na *figura 20*, esta força  $F_x$ , não aparece no sentido em que o veículo está a viajar mas sim no sentido para onde está a apontar a roda. A esta diferença chamamos de *Slip Angle* que na imagem está definido como  $\alpha$ .

O *Camber Angle* ou ângulo de camber está representado com a letra  $\gamma$ , e é o ângulo que o plano da roda faz com o plano XZ.

### Entender melhor o *Tire Slip Angle*

Como foi dito o *Slip Angle* é o ângulo entre a direção na qual o veículo viaja e a direção para onde aponta a roda. Na *figura 21* podemos ter uma percepção visual mais nítida deste conceito de *Slip Angle*.

Portanto se  $F_y=0$ , então o *Slip Angle* também é 0 e a roda neste caso irá então apontar no sentido da direção para onde a roda viaja. Podemos agora concluir que para existir *Slip Angle* temos que estar a curvar gerando-se desta forma uma força lateral  $F_y$ .

Em capítulos posteriores vamos também ver como a força lateral varia com o aumento do *Slip Angle*.

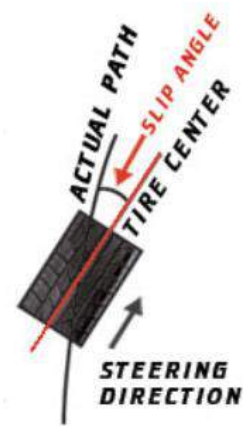


Figura 21- Representação do *Slip Angle* [F13]

## 5.2- Desenvolvimento de forças no pneu (Análise estática)

Quando o pneu contacta com a estrada este está sujeito a uma determinada pressão não só na zona de contacto com o solo mas também nas paredes/ flancos (ver figura 22 e 23).

A figura 22 representa o corte em perfil de um pneu

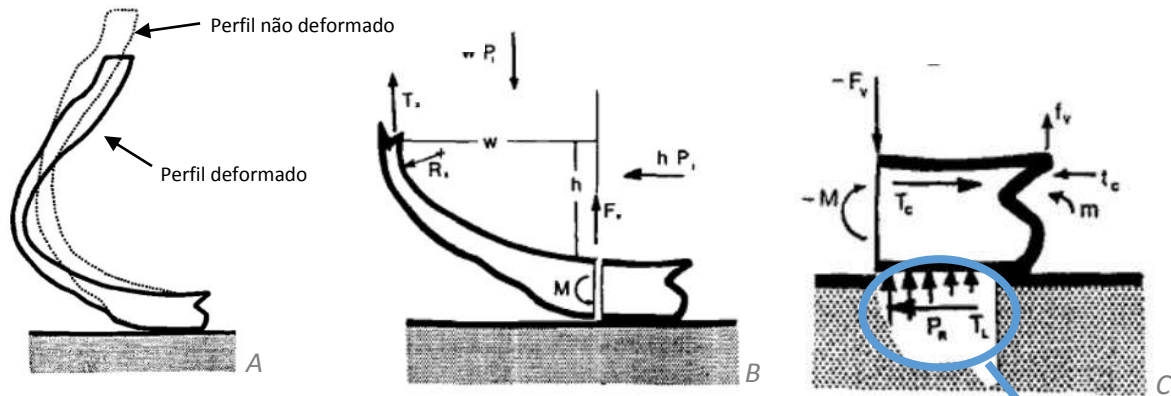


Figura 22- [8]

22A- Perfil deformado, [8]

22B- Zoom da parte inferior da figura 22A [8]

22C- Gradiente de pressões [8]

**Gradiente de pressão** - Pressão é maior na esquerda e vai diminuindo quanto mais andamos para a direita

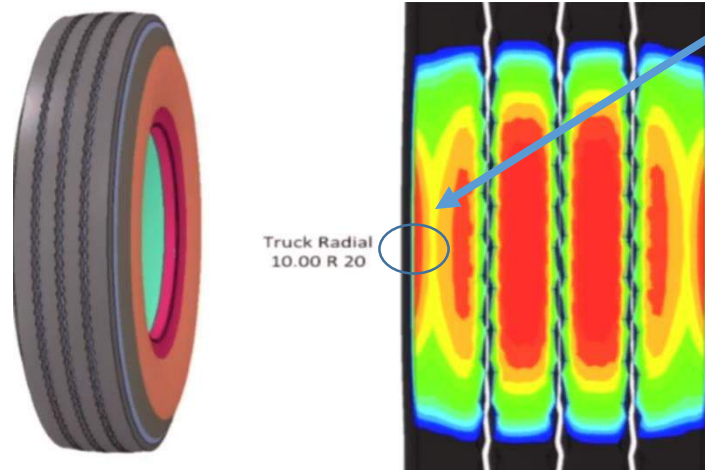


Figura 23- Representação da pegada de contacto de um pneu de camião de estrutura radial, na figura vemos as variações de pressão [V1]

A deformação que podemos observar na figura 22A é devida a uma carga como por exemplo o peso do veículo, que irá deformar a parede do pneu. Esta deformação contribui para o momento  $M$ , que podemos observar na figura 22B. Este momento é originado não só pelo peso do veículo mas também pela pressão interior ( $P_i$ ) que “empurra” as paredes do pneu para fora. Este momento vai então fazer com que a pegada do pneu, ou em inglês *Contact Patch*, não seja completamente uniforme em termos de pressão como podemos observar na figura 23.

Contudo não é só isto que contribui para uma pegada de pressão não uniforme, a pressão no interior do pneu também irá contribuir, tal como contribui para o momento.

Para além disso o facto de os pneus terem sulcos no piso, para por exemplo escoar a água, vai também contribuir para que a pegada não seja uniforme.

Através de algumas expressões podemos chegar a alguns valores, como por exemplo, do momento ( $M$ ) e da tensão radial ( $T_x$ ):

- Momento – O momento é afetado pela tensão radial que contribui com um momento negativo, e pelas componentes vertical e horizontal da pressão que criam momentos positivos. Temos portanto:

$$M = \frac{w^2}{2} P_i - w T_x + \frac{h^2}{2} P_i$$

- Para obtermos a tensão radial utilizamos a equação da membrana:

$$T_x = P_i R_x - \frac{T_y R_x}{R_y}$$

- Força vertical total de reação  $F_v$ :

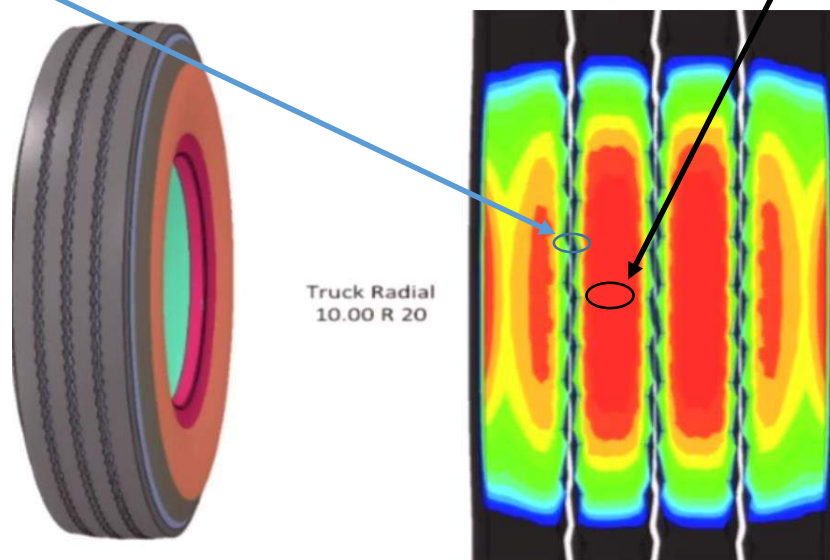
$$F_v = w P_i - T_x$$

**Legenda**

$T_x$  – Tensão na parede, sentido x  
 $T_y$  – Tensão na parede, sentido y (perpendicular ao desenho)  
 $P_i$  – Pressão interior de enchimento  
 $R_x$  – Raio da parede lateral, direção x  
 $R_y$  – Raio da parede lateral, direção y  
 $F_x$  – Força secção vertical, tread edge  
 $M$  – Momento, tread edge  
 $h, w$  – Dimensões  
 $T_c, t_c$  – Tensões na carcaça  
 $T_l$  – Mean lateral traction  
 $P_R$  – Gradiente de pressões  
 $m$  – Internal bending moment

**Então se isto acontece nos limites da pegada porque não acontece também nos limites dos sulcos?**

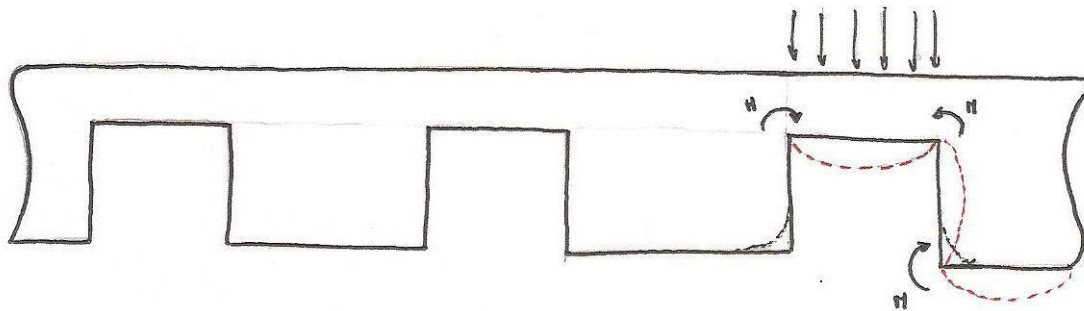
Nos limites dos sulcos o problema vai ser outro, isto porque a pressão interior vai fazer força na parede interior do sulco, ou seja, toda a área do sulco vai ficar “arqueada”, criando momentos nos limites dos sulcos. Esses momentos por sua vez criam outros momentos e fazem com que os cantos inferiores dos sulcos fiquem mais desencostados da estrada, fazendo com que essas zonas, numa análise de elementos finitos à pegada do pneu, fique menos solicitada. Na *Figura 24* podemos ver as zonas mais afetadas e menos afetadas pela pressão.



*Figura 24- Representação da pegada de contacto de um pneu de camião de estrutura radial, na figura vemos as variações de pressão [V2]*

Podemos também perceber o mesmo através da *Figura 25* mas desta vez vendo o pneu de perfil e com os momentos e deformação no local.

Para analisar a imagem temos que ter em conta que esta não é a deformação real mas sim meramente exemplificativa, para percebermos quais as zonas que ficam menos solicitadas, já que cada superfície do sulco não funciona como uma viga com um dos extremos encastrados e outro simplesmente apoiado. Os extremos podem movimentar-se livremente em qualquer um dos eixos.



*Figura 25- Corte de um pneu na zona de contacto com o chão (piso do pneu)*

### 5.3- Forças presentes quando aceleramos a fundo ou travamos a fundo em linha reta

Quando travamos um carro ou uma mota ou até uma bicicleta a fundo sem qualquer ajuda eletrónica as nossas rodas vão bloquear e o pneu vai entrar em deslizamento. Durante o deslizamento a pegada de contacto do pneu com o chão vai ter um desenvolvimento de forças.

Vamos então ver como varia a pressão, a força longitudinal, o slip (ou deslizamento) e a velocidade do pneu ao longo da pegada.

As situações que vão ser descritas de seguida ocorrem visto a velocidade tangencial na roda ser diferente da velocidade da estrada. Como a velocidade da estrada é maior, quando o pneu ao rolar começa a contactar com a estrada, esta vai “puxar” o pneu e vão então ocorrer deformações que levam a que haja variações por exemplo de pressão ao longo da pegada. A este fenómeno damos o nome de **Longitudinal Slip**.

#### 5.3.1- Travagem

Numa situação em que estamos a travar a fundo, a velocidade angular das nossas rodas vai ser zero.

$$\omega = 0$$

Ou seja, estamos perante o pior cenário de travagem possível. Com isto podemos então calcular o *Slip* longitudinal.

$$\text{Longitudinal Slip} = -\left(\frac{v_x - \omega r_e}{v_x}\right)$$

Legenda

$v_x$  – Velocidade da estrada ou do veículo

$\omega$  – Velocidade angular

$r_e$  – Raio efetivo

Como temos a velocidade angular zero, então o *Slip* longitudinal será

$$\text{Longitudinal Slip} = -1$$

Este é então o valor de *Slip* mais baixo que podemos obter e que corresponde à situação de travagem mais crítica.

Para percebermos melhor esta questão a *Figura 26* representa um elemento do pneu em evolução ao longo da pegada de contacto. Podemos ver que até à linha a traço interrompido o elemento do pneu vai sendo puxado pela estrada, ou seja temos tração, mas daí para trás (lado direito da figura) esse mesmo elemento entra em deslizamento (*Slip*). Podemos então dizer que a partir daí começa a formar-se o *gráfico 3-G3*. Ou seja, nesta altura o material começa a voltar à sua forma inicial e o elemento vai de novo dar a volta à roda para entrar outra vez em contacto com o solo.

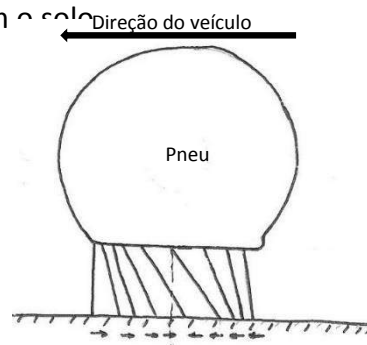
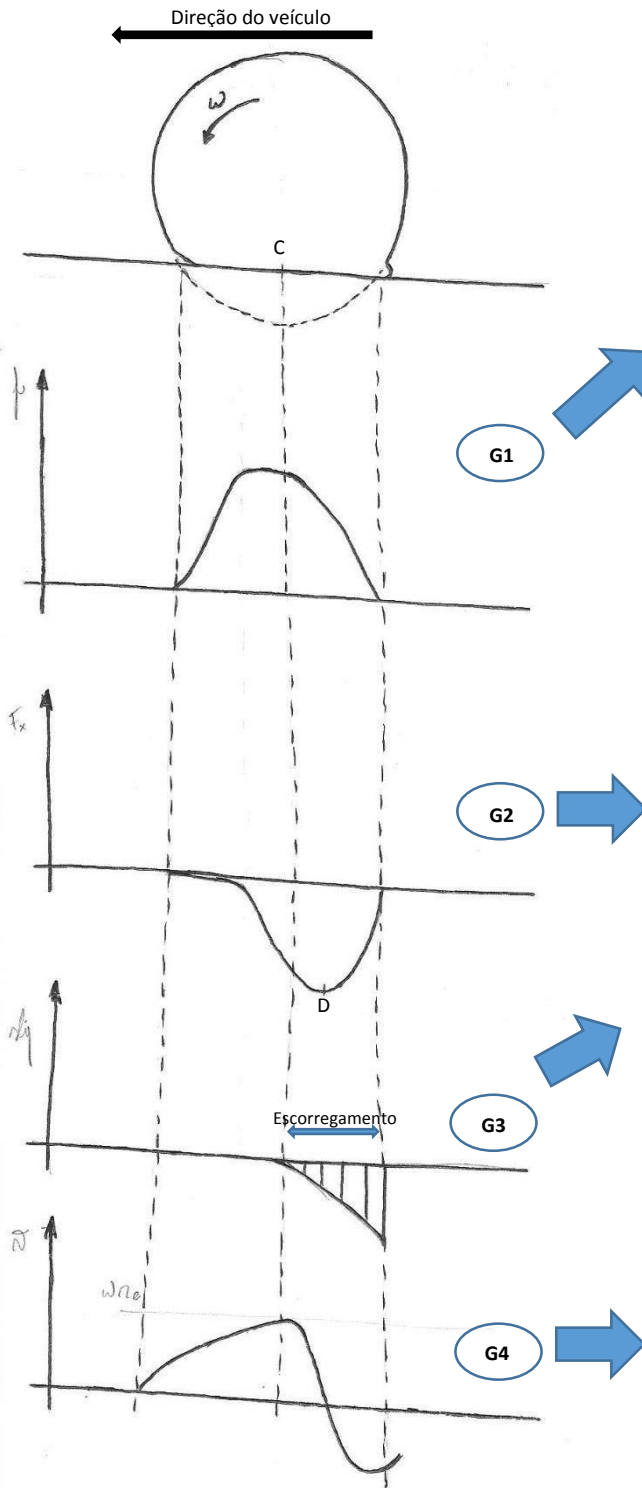


Figura 26- Representação da evolução de um elemento do pneu (cerda) desde que entra em contacto com o chão até que sai

Nos seguintes gráficos podemos ter a percepção do que acontece ao longo da pegada aquando de uma travagem. Notar que agora  $\omega \neq 0$ .



Quanto à pressão ( $p$ ), podemos concluir que esta aumenta ao longo da pegada mas só até certa altura visto que a pressão na travagem não é máxima mesmo no centro da pegada. Notar que quando travamos o veículo, por exemplo, nas rodas da frente a pressão vai ser maior um pouco a frente do ponto C

A força longitudinal ( $F_x$ ), vai diminuir até atingir um limite no ponto D. A partir do ponto D a força normal deixa de nos conseguir sustentar e o pneu entra em escorregamento, aumentando até chegar a zero, este aumento dá-se visto nessa altura o material estar a voltar à forma original.

No gráfico do Slip (3-G3), podemos ver isso, já que o escorregamento começa pouco antes do ponto D. A força longitudinal é gerada na travagem ou no caso de a velocidade da estrada ser diferente da velocidade tangencial do pneu, caso a velocidade da estrada seja igual à velocidade tangencial do pneu não se gera força longitudinal.

**Nota:** O Slip nos gráficos 3 e 4 é um Microslip que acontece quando o pneu está a “desacelerar”, a largar o contacto com a estrada, ou seja, quando o raio efetivo começa a aumentar de novo.

No gráfico 3-G4 temos a variação da velocidade ao longo da pegada. Esta variação tem como fundamento a variação do raio, visto que o pneu é comprimido e depois volta ao normal. Nesta altura de compressão-expansão o raio ou a distância do centro do pneu à superfície varia, o que leva então a uma variação da velocidade em cada ponto da pegada.

Gráfico 3- Gráficos de representação da evolução da pressão (G1), Força longitudinal (G2), Slip (G3) e velocidade (G4), durante o comprimento da pegada de contacto numa situação de travagem [V1]

Apresentados os gráficos, de seguida serão apresentadas figuras relativas a cada gráfico. Estas figuras representam uma análise de elementos finitos de cada uma das situações quando há uma travagem.

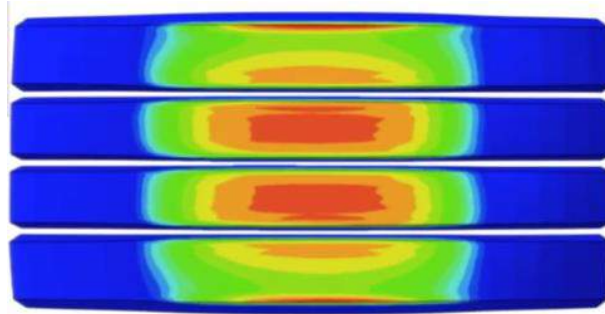


Figura 27- Representação da pressão de contacto ( $p$ ) durante travagem <sup>[V1]</sup>

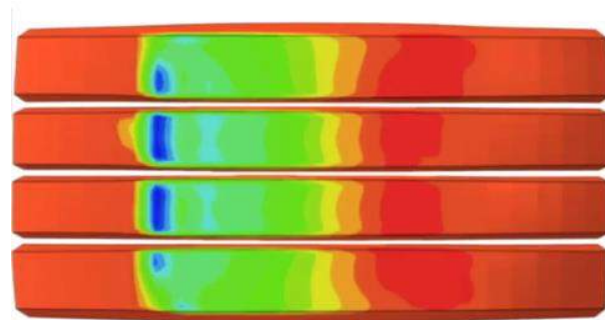


Figura 28- Representação da força longitudinal  $F_x$  na travagem <sup>[V1]</sup>

### 5.3.2- Aceleração ou situação de tração

Tal como foi feito para a travagem vamos então também ter a mesma abordagem para a aceleração e dessa maneira podemos comparar melhor as duas situações.

Comecemos então pelo caso de uma aceleração bastante forçada em que

$$\omega = \infty$$

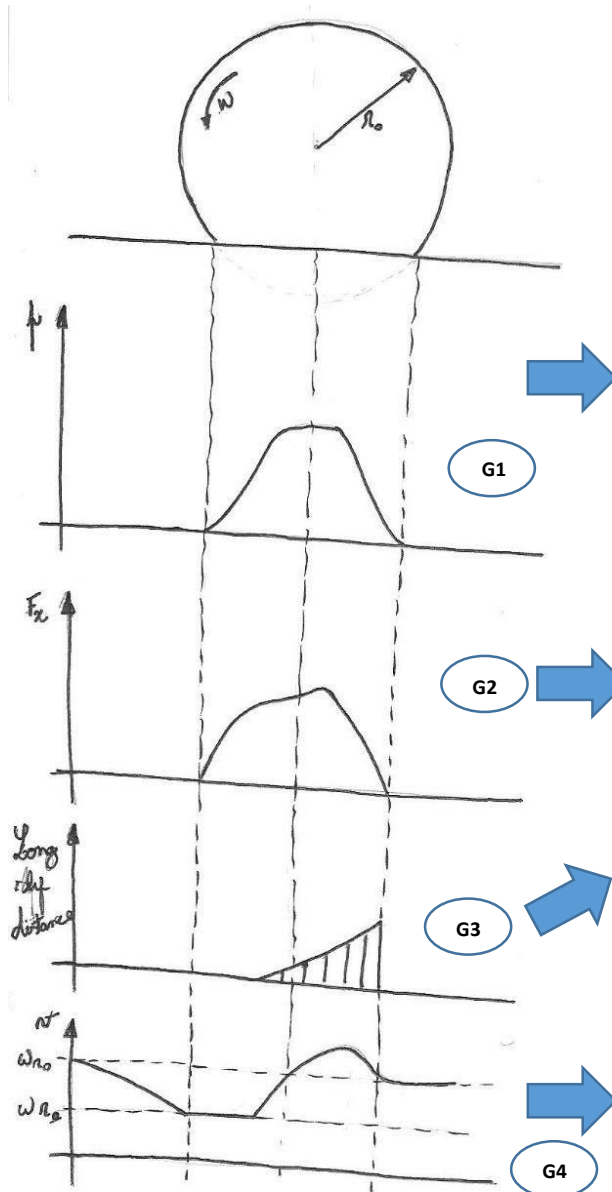
Ou seja, estamos perante o cenário de aceleração mais crítico, que é quando aceleramos a fundo e a roda fica a escorregar sem o carro sair do sítio. Desta maneira calculemos o *Slip* longitudinal.

$$\text{Longitudinal Slip} = -\left(\frac{v_x - \omega r_e}{v_x}\right)$$

$$\text{Longitudinal Slip} = \infty$$

Podemos então concluir que o pneu está em escorregamento sem sair do sítio.

Tal como fizemos para a travagem, vamos então entender por meio de gráficos o que acontece quando temos uma situação de aceleração com a velocidade angular dentro de valores que nos permitam avaliar e quantificar a situação.



O gráfico de pressão (4-G1) é muito semelhante à situação de travagem. Podemos observar que à medida que nos aproximamos do centro da pegada a pressão vai aumentando, e torna a diminuir novamente.

Quanto à força longitudinal ( $F_x$ ), podemos notar que desta vez criou-se uma força de tração. O que faz sentido visto que quando estamos a acelerar a estrada puxa o pneu para criar uma força de tração, que é o contrário do que fazia na travagem. Na travagem a estrada puxava o pneu para criar uma força de travagem. O Slip neste caso também é o inverso da situação de travagem.

O gráfico da velocidade (4-G4) tem exatamente a mesma interpretação do que o da travagem, mas uma forma diferente visto agora a estrada ter uma velocidade inferior à velocidade tangencial do pneu.

Gráfico 4- Gráficos de representação da evolução da pressão (G1), Força longitudinal (G2), Slip (G3) e velocidade (G4), no comprimento da pegada de contacto durante uma aceleração [V1]

Tal como na travagem apresenta-se a seguir as análises de elementos finitos correspondentes a cada um dos gráficos.

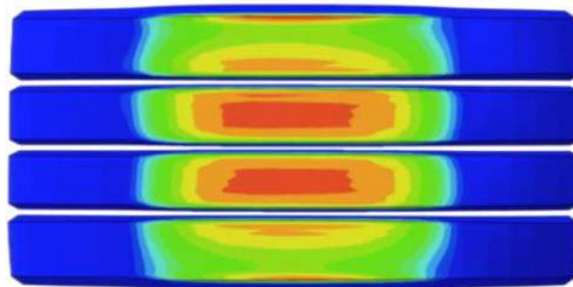


Figura 29- Pressão de contacto ( $p$ ) durante aceleração/tração [V1]

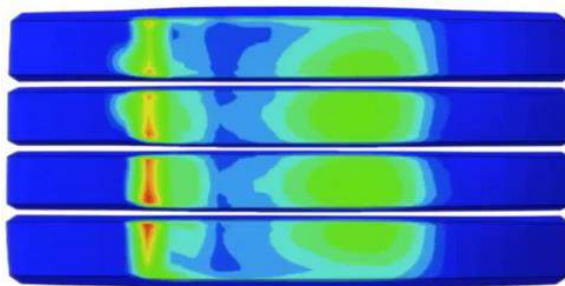


Figura 30- Força longitudinal,  $F_x$ , durante aceleração/tração [V1]

#### 5.4- Slip VS Desgaste

O *Slip* é bastante responsável pelo desgaste nos pneus, na *Figura 31* podemos observar que a energia devido à fricção situa-se nos extremos da pegada, que é a zona onde se dá o *Slip*. Se voltarmos um bocadinho atrás vemos que realmente se o *Slip* é um deslizamento então terá que levar a um desgaste.

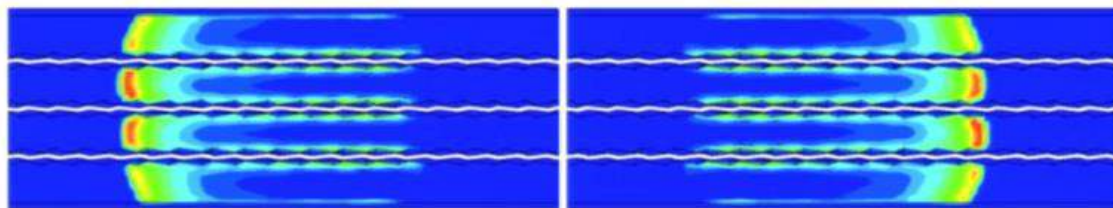


Figura 31- Energia devido à fricção durante uma aceleração e durante uma travagem [V1]

### 5.5- Modelos matemáticos para o cálculo das forças

Neste capítulo vamos abordar dois modelos matemáticos para conseguirmos obter alguns dos valores das forças que vimos no capítulo anterior.

Estes modelos hoje em dia não são tão utilizados, ou praticamente não são utilizados, visto a análise por elementos finitos dominar quase por completo a análise de forças e comportamento dos pneus, podendo-se simular situações muito próximas ou até iguais às situações reais.

Os capítulos anteriores e este capítulo são abordados visto que, para entendermos o que se passa na análise de elementos finitos temos primeiro de saber o que está por trás, ou seja, temos que entender a física associada aos pneus, como se desenvolvem as forças, a que forças estão sujeitos, etc.

E portanto, neste momento interessa-nos começar por um modelo mais simples, e um outro mais complicado que é o mais utilizado dentro dos modelos matemáticos empíricos.

Vão ser então apresentados dois modelos:

- *Tire Brush Model;*
- *Magical Formula.*

### 5.5.1- Tire Brush Model

Esta aproximação é feita através de um modelo físico simples, usando representações mecânicas.

Este modelo consiste numa série de cerdas (elementos) que tocam na estrada e conseguem desviar-se numa direção paralela à superfície da estrada. Podemos referir-nos às cerdas como elementos do piso do pneu. Estes elementos representam a elasticidade da combinação da carcaça com as lonas e com os elementos do piso de um pneu real. Enquanto o pneu rola, os primeiros elementos que entram na zona de contacto (pegada) são assumidas como perpendiculares à superfície da estrada. Quando o pneu rola livremente e sem *Slip* lateral, camber ou viragem, a roda move-se ao longo de uma linha reta paralela à estrada e na direção do plano da roda. Nessa situação os elementos do piso mantem-se verticais e movem-se sem desenvolver qualquer deflexão horizontal e consequentemente sem gerar qualquer tipo de força. A presença de resistência ao rolamento não é considerada.

Quando a velocidade da estrada é diferente da velocidade tangencial do pneu as cerdas vão ter deflexão.

Vamos então começar por analisar o deslizamento longitudinal puro ou *Pure Longitudinal Slip*, o deslizamento lateral puro/ *Pure Side Slip* e após isso vamos ver como conjugar os dois.

#### 5.5.1.1- Pure Side Slip

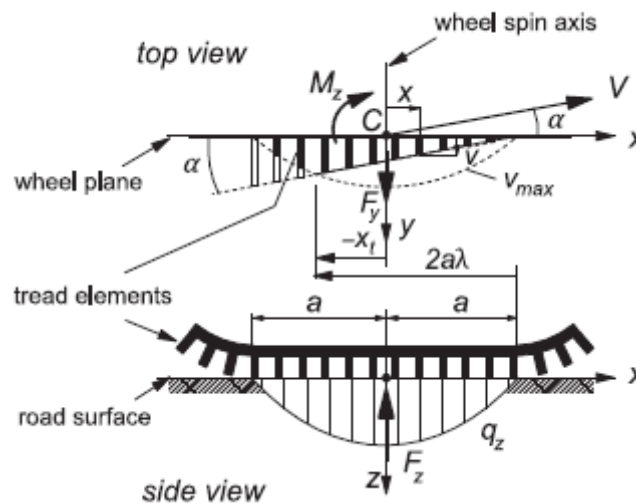


Figura 32- Vista de topo e lateral de um pneu em *Pure Side Slip*, na zona de contacto com o chão [1]

A Figura 32 mostra-nos o pneu a mover-se com um ângulo de deslizamento (*Slip Angle* -  $\alpha$ ) constante. Temos então uma linha reta e paralela ao vetor velocidade  $V$  na região de tração e curva na zona de escorregamento (*Sliding Region*) onde a força de fricção disponível se torna mais baixa do que a força que será necessária para que as pontas da cerdas seguissem uma linha reta, ou seja sem escorregar.

Para este modelo a deformação lateral na zona de tração é:

$$v = (a - x)\sigma_y = (a - x) \tan \alpha \quad (1)$$

Onde  $a$  é metade do comprimento da zona de contacto com o chão. Portanto no caso de não existir zona de escorregamento (*Sliding*) então a expressão é válida para toda a região de contacto.

Com a rigidez lateral ( $c_{py}$ ), dos elementos do piso por unidade de comprimento da assumida área de contacto retangular, vamos conseguir com as seguintes expressões e integrais calcular:

$$\text{Força de curvatura (Cornering Force) - } F_y = c_{py} \int_{-a}^a v dx = 2c_{py}a^2\alpha$$

$$\text{Binário de alinhamento (Aligning Torque) - } M_z = c_{py} \int_{-a}^a v x dx = -\frac{2}{3}c_{py}a^3\alpha$$

Por consequência temos:

$$\text{Rigidez de curvatura (Cornering Stiffness) - } C_{F\alpha} = \left(\frac{dF_y}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 2c_{py}a^2$$

$$\text{Rigidez de alinhamento (Aligning Stiffness) - } C_{M\alpha} = \left(\frac{dM_z}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \frac{2}{3}c_{py}a^3$$

Agora vamos considerar o caso de termos coeficiente de atrito  $\mu$  **finito**, e uma distribuição de pressão que gradualmente chega a zero nos dois extremos. Assumimos também uma distribuição parabólica da carga vertical por unidade de comprimento e que exprimimos como:

$$q_z = \frac{3F_z}{4a} * \left\{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}, \quad F_z - \text{Força vertical}$$

A carga lateral máxima pode ser expressa pela seguinte expressão:

$$|q_{y,max}| = \mu q_z = \frac{3}{4}\mu F_z \frac{a^2 - x^2}{a^3} \quad (2)$$

Temos também na figura representada a deformação lateral máxima que podemos obter a partir da expressão:

$$v_{max} = \frac{q_{y,max}}{c_{py}}$$

Para simplificar vamos introduzir um parâmetro do composto do modelo do pneu:

$$\theta_y = \frac{2c_{py}a^2}{3\mu F_z} \quad (3)$$

A distância a partir do ponto inicial até ao ponto onde a transição da zona de tração para a zona de escorregamento (*Sliding*) ocorre, está escrita como  $2a\lambda$  e é determinada pelo fator  $\lambda$ .

Fazendo  $x=x_t$ , a deflexão na zona de tração fica igual à deflexão na zona de escorregamento (*Sliding*). Então usando as equações (1), (2) e (3) podemos chegar à seguinte igualdade:

$$|q_y| = c_{py}(a - x_t)|\tan \alpha| = |q_{y,max}| = \frac{c_{py}}{2a\theta_y}(a - x_t)(a + x_t)$$

E então para  $\lambda = \frac{a-x_t}{2a}$  vamos obter a relação entre o *Slip Angle* e o  $\lambda$ :

$$\lambda = 1 - \theta_y|\tan \alpha|$$

A partir desta equação, o angulo  $\alpha_{sl}$ , onde começa o escorregamento completo (*Total Sliding*), ou seja, para  $\lambda=0$ , pode ser calculado:

$$\tan \alpha_{sl} = \frac{1}{\theta_y}$$

Como a distribuição das deflexões dos elementos foi estabelecida, a força total  $F_y$  e o momento  $M_z$  podem ser obtidos através da integração entre os limites  $-a < x < x_t$  no caso do escorregamento e entre  $x_t < x < a$  para a situação da aderência.

Para obtermos então estas forças vamos então introduzir a notação para o *Slip*:

$$\sigma = \tan \alpha$$

A expressão resultante para a força fica então:

Se  $|\alpha| \leq \alpha_{sl}$ ,

$$F_y = 3\mu F_z \theta_y \sigma_y \left\{ 1 - |\theta_y \sigma_y| + \frac{1}{3}(\theta_y \sigma_y)^2 \right\}$$

Se  $|\alpha| \geq \alpha_{sl}$  mas  $< 0,5\pi$ ,

$$F_y = \mu F_z \operatorname{sgn}(\alpha)$$

Para o momento:

Se  $|\alpha| \leq \alpha_{sl}$ ,

$$M_z = -\mu F_z a \theta_y \sigma_y \left\{ 1 - 3|\theta_y \sigma_y| + 3(\theta_y \sigma_y)^2 - |\theta_y \sigma_y|^3 \right\}$$

Este momento tem um valor valor máximo:

$$M_{z,max} = \frac{27\mu F_z}{256} \text{ em } \sigma_y = \frac{1}{4\theta_y}$$

Se  $|\alpha| \leq \alpha_{sl}$  mas  $< 0,5\pi$ ,

$$M_z = 0$$

Podemos também quantificar a distância que vai do ponto de contacto central C até à parte traseira da pegada de contacto (*Pneumatic Trail*):

Se  $|\alpha| \leq \alpha_{sl}$ ,

$$t = -\frac{M_z}{F_y} = \frac{1}{3}a \frac{1 - 3|\theta_y \sigma_y| + 3(\theta_y \sigma_y)^2 - |\theta_y \sigma_y|^3}{1 - |\theta_y \sigma_y| + \frac{1}{3}(\theta_y \sigma_y)^2}$$

Se  $|\alpha| \geq \alpha_{sl}$  mas  $< 0,5\pi$ ,

$$t = 0$$

Se não existir *Slip Angle*,  $\alpha = 0$ ,

$$t = t_0 = -\left(\frac{M_z}{F_y}\right)_{\alpha \rightarrow 0} = \frac{1}{3}a$$

Este valor é mais pequeno do que o que se encontra normalmente na prática, visto que se introduzirmos uma carcaça elástica este valor irá aumentar e portanto ficará perto de  $t \approx 0,5a$ .

No gráfico 5 podemos observar a evolução de tudo o que foi feito até agora para este modelo, ou seja, temos a representação de:

- Força lateral -  $F_y$
- Binário de alinhamento (Aligning torque) -  $M_z$
- *Pneumatic Trail vs Slip Angle* –  $t$  vs  $\alpha$

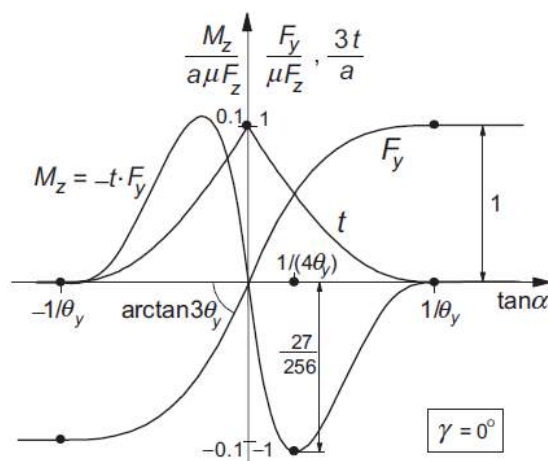


Gráfico 5- Curvas da força longitudinal, momento vertical e *Pneumatic Trail* em função do *Slip Angle* [1]

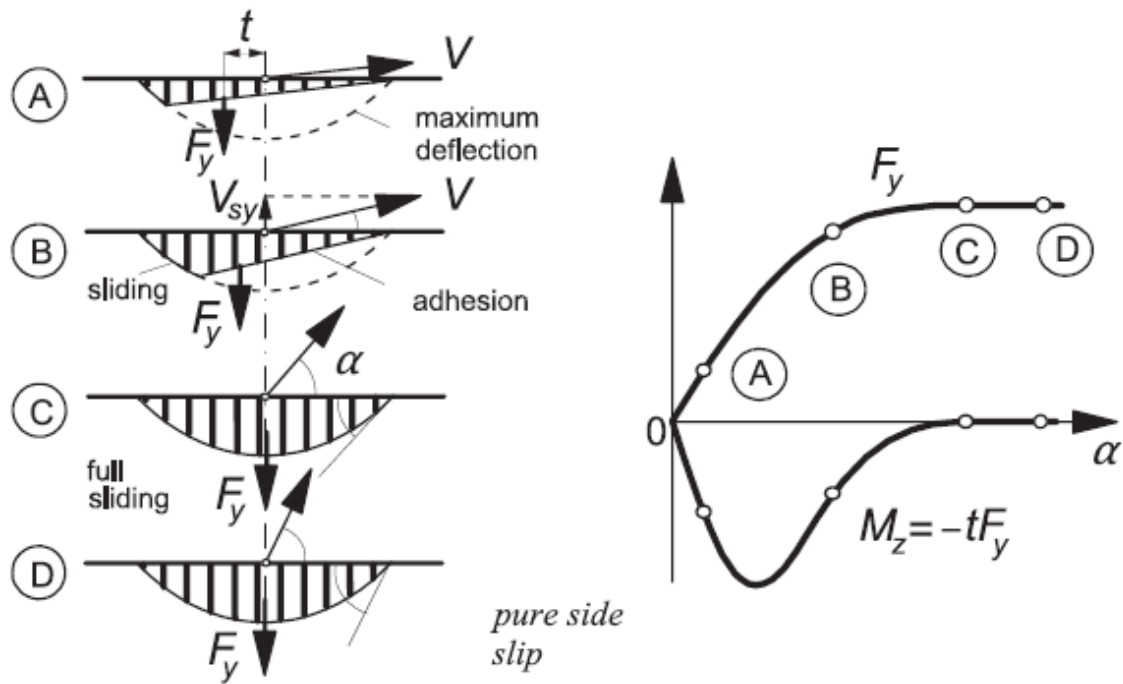


Figura 33- Fases de evolução da força lateral com o aumento do Slip Angle e gráfico correspondente <sup>[1]</sup>

Na Figura 33 podemos observar as várias fases de evolução da força lateral com o aumento do ângulo de deslizamento (*Slip Angle*), de A para D. É possível observar também a variação do momento  $M_z$ .

### 5.5.1.2- Pure Longitudinal Slip (em travagem)

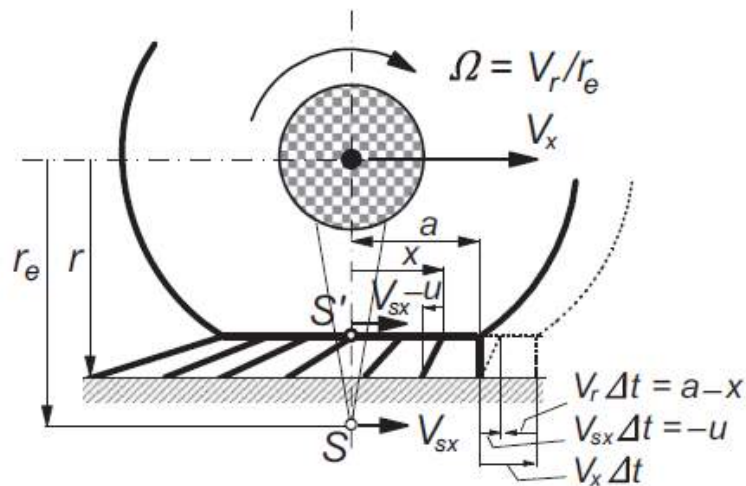


Figura 34- Representação lateral de um pneu com Pure Longitudinal Slip [1]

Para este caso das cerdas flexíveis na direção longitudinal, a teoria para a geração de força longitudinal é muito parecida com a que vimos no subcapítulo anterior para a geração das forças laterais.

Para simplificarmos o trabalho vamos nos ficar por valores não negativos da velocidade do centro da roda  $V_x$  e da velocidade angular  $\omega$ .

Na Figura 34 temos a representação da vista lateral do modelo de escovas (*Brush Model*).

**Ponto S** – O ponto S presente na imagem X é um ponto imaginário e com uma distância ao centro da roda igual ao raio efetivo de rolamento  $r_e$ , situado por baixo do centro da roda. Em rolamento livre o ponto de deslizamento (*Slip Point*) tem velocidade zero, e portanto temos assim o centro instantâneo de rotação. No caso de estarmos a travar (imagem X) o ponto S move-se para a frente com a velocidade longitudinal de deslizamento  $V_{sx}$  e quando aceleramos vai-se mover para trás com uma velocidade longitudinal de deslizamento negativa.

**Ponto S'** – Este ponto está fixo no centro da base e a velocidade dele é igual à velocidade do ponto S, ou seja, o ponto S' move-se com a mesma velocidade de deslizamento  $V_{sx}$ .

No caso de termos rotação livre com uma velocidade de deslizamento  $V_{sx}=0$ , a orientação dos elementos irá ser igual à primeira do lado direito durante toda a pegada de contacto, ou seja, todas vão permanecer verticais e não se irá gerar qualquer força longitudinal.

Temos então que nessas condições a velocidade angular da roda é:

$$\omega = \omega_0 = \frac{V_x}{r_e}$$

Caso  $\omega$  seja diferente do seu valor em rolamento livre  $\omega_0$ , então a roda está a ser travada ou acelerada e a velocidade longitudinal de deslizamento  $V_{sx}$  fica:

$$V_{sx} = V_x - V_r$$

$$V_{sx} = V_x - \omega r_e$$

$V_x$  - velocidade do centro da roda.

$V_r$  - velocidade linear de rolamento

### 1. Distância de movimento de um elemento do piso do pneu (u)

É possível obter, a partir das expressões seguintes, o alongamento/ deformação de uma cerda num determinado momento se soubermos o tempo requerido para o movimento:

$$\Delta t = \frac{a - x}{V_r}$$

$$u = -(V_x - V_r) * \Delta t = -V_{sx} * \frac{a - x}{V_r}$$

Em que o sinal negativo significa que a deformação se vai dar no sentido negativo, ou seja, para a esquerda.

Vamos então definir duas quantidades:

- Deslizamento teórico (*Theoretical Longitudinal Slip*)

$$\sigma = -\frac{V_{sx}}{V_r}$$

E portanto a deformação

$$u = (a - x) * \sigma_x \quad (2)$$

- Deslizamento prático (*Practical Longitudinal Slip*) – Sendo este o deslizamento mais utilizado na indústria

$$\kappa = -\frac{V_{sx}}{V_x}$$

E portanto a deformação

$$u = (a - x) \frac{\kappa}{1 + \kappa}$$

Cálculo da força longitudinal e outros parâmetros interessantes para o estudo deste subcapítulo.

Assumindo uma distribuição parabólica para a força normal temos que:

$$q_z = \frac{3F_z}{4a} \left( 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right)$$

Se integrarmos esta expressão entre  $\underline{a}$  e  $\underline{-a}$  podemos representar o gráfico de distribuição da pressão de contacto, que será uma distribuição parabólica.

## 2. Quando começamos a ter escorregamento (*Sliding*)?

O escorregamento ocorre quando a força longitudinal  $F_x$  excede a força normal  $F_z$ , portanto para não haver escorregamento:

$$q_x \leq q_z$$

$$c_{px}(a-x)\sigma_x \leq \mu \frac{3F_z}{4a} \left( \frac{a^2 - x^2}{a^2} \right) \quad (3)$$

$c_{px}$  – Rigidez (*Stiffness*)

Caso  $F_x$  exceda  $F_z$  então teremos escorregamento.

Para nos facilitar os cálculos vamos introduzir o parâmetro de modelo isotrópico:

$$\theta_x = \frac{2 c_{px} \cdot a^2}{3 \mu F_z}$$

Vamos assumir que  $x_s$  é o ponto onde o escorregamento se inicia, e que segundo a *Figura 35* se representa por  $2a\lambda$ , ou seja, tendo a pegada de contacto comprimento  $2a$  temos que  $2a\lambda$  representa uma parcela dessa pegada. Resumindo:

$x_s$  – Ponto onde o escorregamento se inicia, contando a partir do centro da pegada ( $x=0$ )

$2a$  – Comprimento da pegada de contacto com o chão

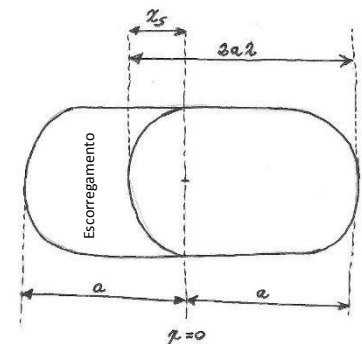
$2a\lambda$  – Parcela da pegada de contacto com o chão até chegar ao ponto de escorregamento.

Substituindo em (3):

$$\sigma_x = \frac{3 \mu F_x}{4 c_{px} a^2} \left( \frac{a + x_s}{a} \right)$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2\theta_x} \left( \frac{a + a - 2a\lambda}{a} \right) = \frac{1}{\theta_x} (1 - \lambda)$$

$$\lambda = 1 - \theta_x \sigma_x$$



*Figura 35- Zonas da pegada de um pneu. À esquerda zona de escorregamento e à direita zona de tração*

Desta expressão podemos concluir que:

- Se  $\lambda = 0$ , então  $\sigma_x = \pm \frac{1}{\theta_x}$  e portanto temos escorregamento completo (*Total Sliding*);

Se quisermos representar em termos de deslizamento prático (*Practical Longitudinal Slip*):

$$\kappa = \kappa_{sl} = \frac{-1}{1 \pm \theta_x}$$

### 3. Cálculo da força longitudinal $F_x$

A força longitudinal como vemos na *figura 35* está decomposta em duas zonas:

- $F_{Sticking}$  – Força longitudinal na zona em que o pneu está agarrado ao chão;
- $F_{Sliding}$  – Força longitudinal na zona em que o pneu está em escorregamento.

$$F_x = F_{Sticking} + F_{Sliding}$$

Para definirmos matematicamente cada uma das áreas vamos ter que integrar entre os seus limites

$$F_x = \int_a^{a-2a\lambda} \left[ c_p \frac{V_{sx}}{\omega r_e} (a - x_c) \right] dx + \int_{x_s}^{-a} (\mu q_z) dx_c$$

$$F_x = 2c_p a^2 \sigma_x - \frac{4 (c_{px} a^2 \sigma_x)^2}{3 \mu F_z} + \frac{8 (c_p a^2 \sigma_x)^3}{27 (\mu F_z)^2}$$

Em que  $x_s = a - \frac{\mu F_z \omega r_e}{V_{sx} c_{px}}$ .

Neste ponto encontramos uma maneira de relacionar a força de travagem e o *Slip*. As expressões incluem a rigidez da borracha  $c_p$ , o comprimento da pegada de contacto  $2a$ , a fricção entre a estrada e o pneu  $\mu$ , e a carga vertical  $F_z$ . A distribuição de pressão vertical  $q_z$  é outro dos fatores importantes.

O  $c_p$  é um parâmetro do material que depende da espessura da borracha, da temperatura, idade do pneu, etc. A pegada de contacto depende da pressão dentro do pneu e da carga vertical.

O coeficiente de fricção é o parâmetro mais incerto visto ser afetado por vários fatores como as condições da estrada, a velocidade de deslizamento (*Slip Velocity*) e a espessura do piso do pneu.

Após tudo isto podemos também representar um gráfico que nos relaciona a força de travagem  $F_x$  com o *Longitudinal Slip*, alterando valores de coeficiente de fricção  $\mu$  e de rigidez da borracha  $c_p$ :

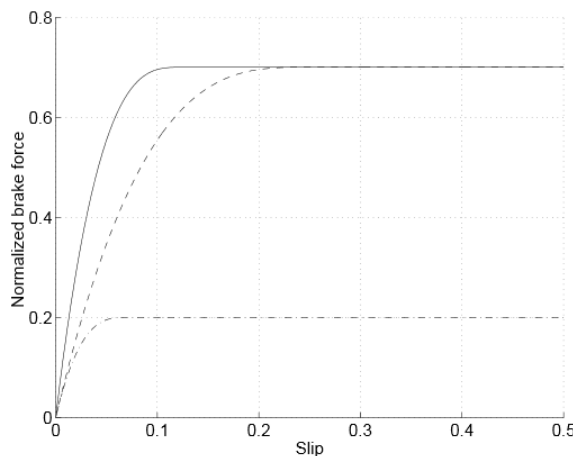


Gráfico 6- Gráfico que representa a força de travagem em função do Slip Longitudinal [1]

### 5.5.1.3- Lateral and longitudinal Slip (Combined Slip)

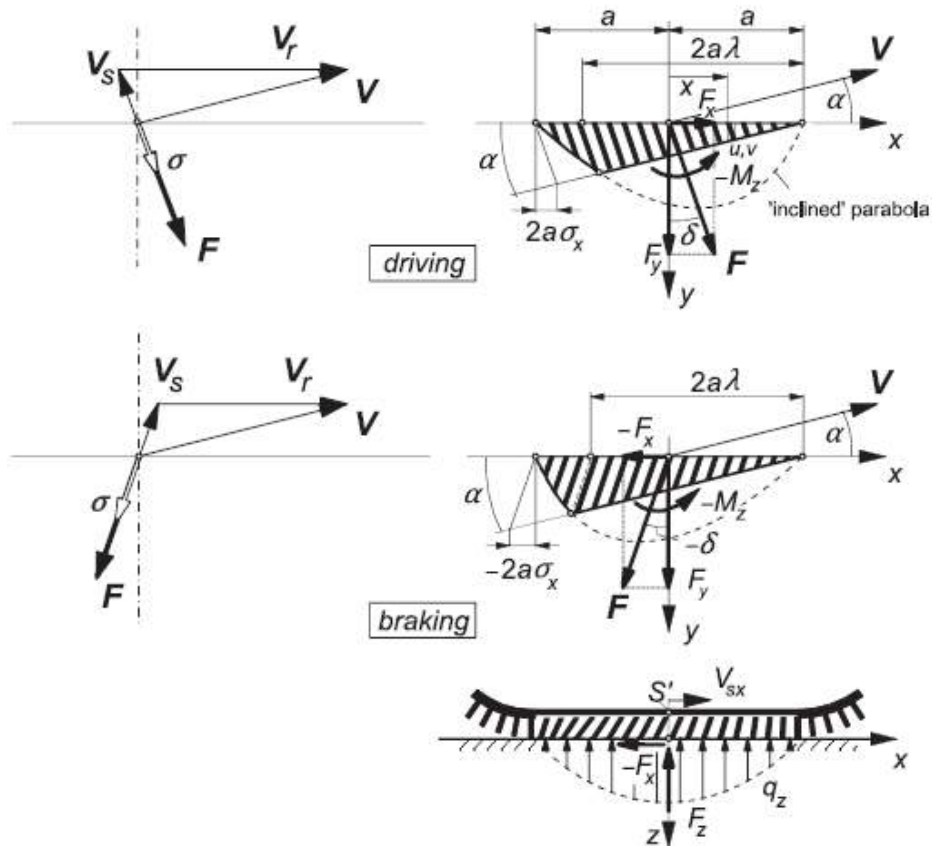


Figura 36- Representação da deformação das situações de travagem e aceleração para um dado Slip Angle [1]

Para a análise da influência da força longitudinal nas propriedades da força lateral e geração de momento, vamos considerar, para simplificar matematicamente, que a rigidez lateral e longitudinal dos elementos do piso são iguais.

$$c_p = c_{px} = c_{py}$$

E que os coeficientes de fricção são também iguais e constantes.

$$\mu = \mu_x = \mu_y$$

Consideramos também que a distribuição de pressões é novamente parabólica.

Na *figura 36* podemos observar as deformações que aparecem num pneu quando este está a travar ou acelerar com um dado Slip Angle,  $\alpha$ .

Devido a termos rigidez igual em todas as direções horizontais e propriedades de fricção isotrópicas, as deformações dão-se no sentido contrário ao vetor da velocidade de deslizamento  $V_s$ , mesmo na zona de escorregamento. Nesta região, as pontas dos elementos escorregam por cima da estrada com uma velocidade de escorregamento  $V_g$  dirigida no sentido oposto à força de fricção local  $q$  (por unidade de comprimento).

Toda a deformação de um elemento do piso do pneu é um processo unidimensional ao longo da direção de  $V_s$ .

### 1. Distância de movimento de um elemento do piso do pneu ( $e$ )

O tempo que passa desde o ponto de entrada até ao ponto de distância  $x$  é:

$$\Delta t = \frac{a - x}{V_r}$$

Nesta posição, a deflexão de um elemento que ainda está na zona de tração à estrada torna-se num elemento vetorial:

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{V}_s \Delta t = -\frac{\mathbf{V}_s}{V_r} (a - x) \quad (4)$$

Em termos de deslizamento teórico este vai também aparecer sobre a forma vetorial:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} = -\frac{\mathbf{V}_s}{V_r} = -\frac{1}{V_r} \begin{pmatrix} V_{sx} \\ V_{sy} \end{pmatrix}$$

Com a velocidade linear de rolamento

$$V_r = V_x - V_{sx}$$

Desenvolvendo (4) temos então

$$\mathbf{e} = (a - x)\boldsymbol{\sigma}$$

Força de contacto horizontal que atua na ponta dos elementos, por unidade de comprimento

$$\mathbf{q} = c_p (a - x)\boldsymbol{\sigma} \quad (\text{Região de tração})$$

$$\mathbf{q} = -\frac{\mathbf{V}_s}{V_s} \mu q_z = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma} \mu q_z \quad (\text{Região de escorregamento})$$

Onde

$$V_s = \sqrt{V_{sx}^2 + V_{sy}^2} \quad e \quad \sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

E portanto a deflexão de um elemento é

$$e = |\mathbf{e}| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

## 2. Quando começamos a ter escorregamento (*Sliding*)?

O ponto de transição da região de tração para a zona de escorregamento é obtido a partir da seguinte condição

$$c_p e = \mu q_z$$
$$c_p \sigma (a - x_t) = \mu \frac{3F_z}{4a} \left( \frac{a^2 - x_t^2}{a^2} \right)$$

Portanto, este caso é igual ao caso da força longitudinal, ou seja, se o membro da esquerda exceder o valor do da esquerda, vamos ter escorregamento.

Resolvendo em ordem a  $x_t$  para obtermos o ponto de transição

$$x_t = \frac{4 c_p a^3 \sigma}{3 \mu F_z} - a = a(2\theta\sigma - 1)$$

Ou podemos fazer como fizemos no subcapítulo do escorregamento longitudinal:

$$\lambda = 1 - \theta\sigma \quad (5)$$

Introduzindo também o parâmetro de modelo isotrópico

$$\theta = \theta_y = \theta_x = \frac{2 c_p a^2}{3 \mu F_z}$$

Portanto da equação 5 podemos calcular o *Slip*  $\sigma_{sl}$ , no qual o escorregamento total (*Total Sliding*) se inicia.

$$\sigma_{sl} = \frac{1}{\theta}$$

### 3. Cálculo da força e momento

Estamos agora em condições de obter a força total

Para  $\sigma \leq \sigma_{sl}$ :

$$F = \mu F_z (1 - \lambda^3) = \mu F_z \{3\theta\sigma - 3(\theta\sigma)^2 + (\theta\sigma)^3\}$$

Para  $\sigma \geq \sigma_{sl}$ :

$$F = \mu F_z$$

Para obtermos o momento temos que multiplicar a força  $F_y$  pelo *Pneumatic Trail*, que é a distância que vai do centro do pneu C, à força  $F_y$ .

$$M_z = -t(\sigma) * F_y$$

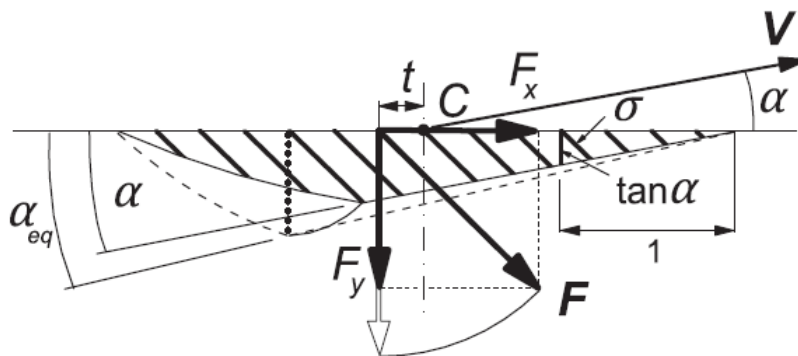


Figura 37- Representação de forças presentes quando fazemos uma aceleração e curvamos ao mesmo tempo. Esta também representado o Pneumatic trail t. [1]

Nas figuras X e Y podemos ver a representação das forças longitudinal e lateral, que ocorre como resultado da introdução simultânea de outros componentes de deslizamento tais como o *Longitudinal Slip* e o *Lateral Slip*.

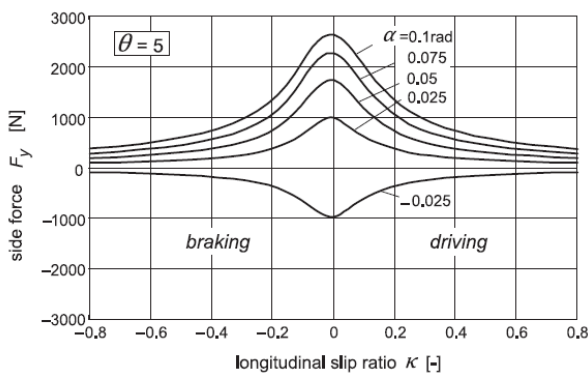


Gráfico 7- Força lateral em função do Slip Longitudinal para um dado Slip Angle [1]

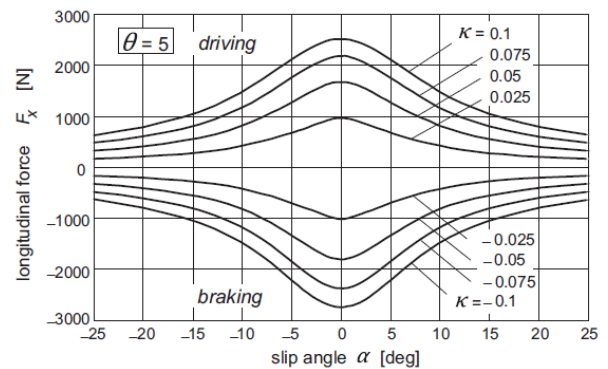


Gráfico 8- Força longitudinal em função do Slip Angle para um dado Slip longitudinal [1]

## 5.5.2- Fórmula mágica (*Magic Formula*)

### 5.5.2.1- Introdução à *Magic Formula*

Antes de começarmos a tratar da *Magic Formula* temos que entender alguns conceitos, isto porque o modelo introduzido no capítulo 5.5.1 é um modelo matemático que trata a dinâmica do pneu de uma forma mais simples.

Existem vários fatores que influenciam as forças que se desenvolvem no pneu para além das que vimos, nomeadamente:

- *Ply Steer*
- Conicidade
- *PRAT*
- Camber

Vamos então ver rapidamente o que é cada um deles.

#### 1- *Ply Steer* <sup>[3]</sup>

Este efeito é gerado devido a assimetrias na carcaça quando o pneu rola para frente ou para trás com *Slip Angle*,  $\alpha=0$ . Esta característica advém do posicionamento das lonas. Como elas são dispostas (sobrepostas), com um ângulo entre si então quando forem aplicadas forças de tração por exemplo, estas malhas vão ser deformadas e vão criar um efeito de rotação que se irá fazer sentir na direção do carro, ou seja, ele não seguirá em frente visto este efeito criar uma força lateral fora do centro da pegada que por sua vez vai criar um momento que irá fazer a roda rodar no eixo vertical.

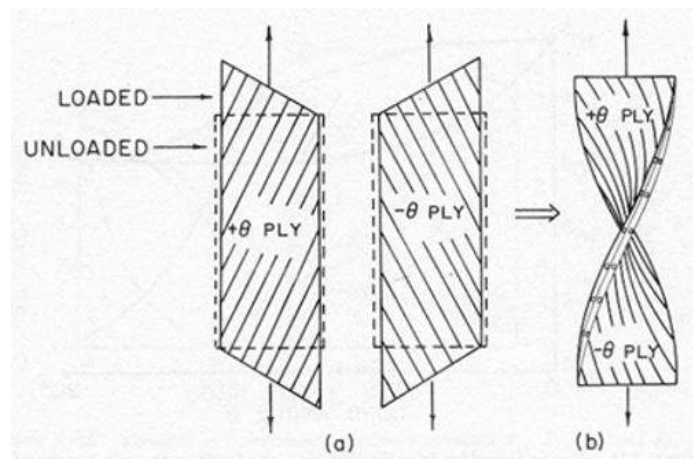


Figura 38- a - Deformações em lonas simples <sup>[3]</sup>

Figura 38-b - Deformação em lonas múltiplas

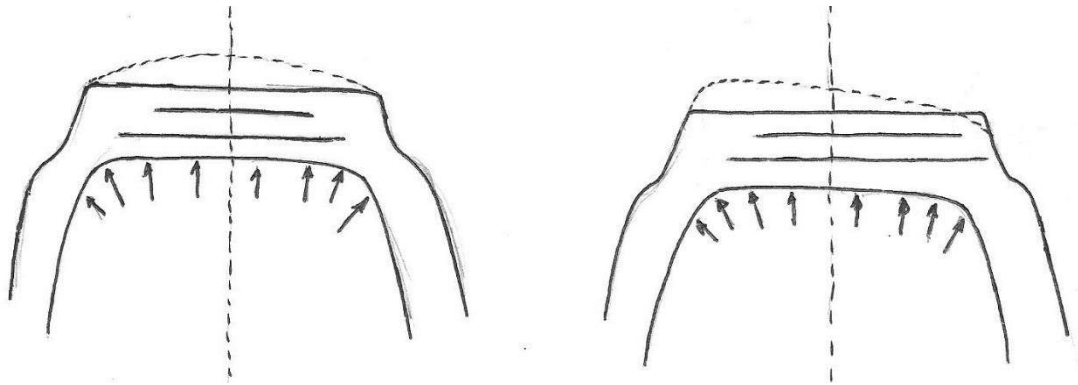
Na *Figura 38* podemos ver como se comportam as lonas quando é exercida uma força de tração. Podemos reparar na *Figura 38-a* que só uma ponta de cada lado, superior e inferior, se desloca quando olhamos para as lonas de uma forma singular. Este deslocamento dá-se devido à orientação da malha, podemos para isso reparar que a orientação das malhas na *Figura 38-a* tem sentidos diferentes, o que causará

deformação diferente quando tracionadas. Contudo, quando olhamos para as lonas como um conjunto de lonas sobrepostas (*Figura 38-b*), podemos observar que estas ao serem tracionadas vão rodar. Esta rotação é então a causadora do momento.

Nos capítulos anteriores tínhamos visto que era necessário haver *Slip Angle* para termos força lateral, mas aqui vimos que não é bem assim e que pode existir força lateral sem termos *Slip Angle*.

## 2- Conicidade

A conicidade é um efeito que se desenvolve aquando da produção do pneu. Como a borracha é um material elástico, na altura em que são inseridas as lonas e a estrutura metálica do pneu, estas podem não ficar exatamente centradas no pneu e portanto um dos lados pode ficar mais “frágil”, inchando mais quando se submete o pneu à pressão interior. Podemos ter uma melhor ideia deste fenómeno na seguinte figura



*Figura 39- Perfis de pneu sujeito a pressão com lonas centradas (esquerda) e lonas chegadas à direita (direita)*

Vemos então que na figura da esquerda quando sujeito a pressão interior o pneu incha e forma um arco simétrico, mas na figura da direita temos a noção de que o facto de as lonas estarem mais próximas do lado direito vai tornar esse lado mais rígido e consequentemente o lado esquerdo menos rígido, ou seja, se aplicarmos a mesma pressão no pneu da direita que aplicamos no da esquerda, este vai inchar mais no lado esquerdo, o que resulta numa forma cónica, como podemos comprovar pela *Figura 39 (direita)*.



*Figura 41- Pneu com lonas centradas*



*Figura 40- Pneu com lonas chegadas à direita*

### 3- PRAT – *Ply Steer Residual Aligning Torque*

Como vimos, a *Ply Steer* dá-se de um modo global no pneu devido aos materiais constituintes. Agora vamos ter o mesmo problema mas aplicado aos padrões do piso do pneu. Por exemplo, se o pneu estiver a rodar de forma livre, a área de contacto com o chão será plana e de um modo geral irão gerar-se tensões de corte  $\tau$ , nos blocos do piso. Estas tensões de corte aplicadas aos blocos do piso individualmente causam forças de reação, que depois irão resultar num momento de alinhamento. Portanto quando rolamos em linha reta vamos, uma vez mais ter um momento que fará rodar a roda no eixo vertical e fazer com que a trajetória não seja retilínea.

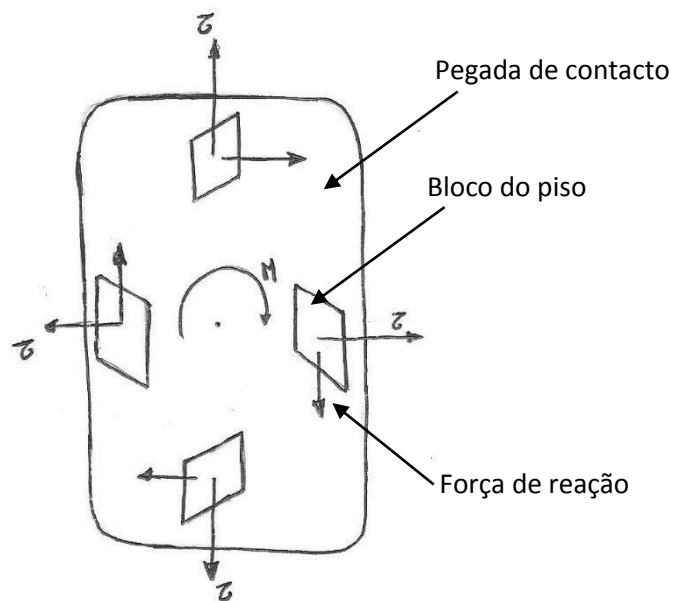


Figura 42- Representação de pneu sujeito a *Ply Steer*

Nota que na indústria o piso dos pneus é pensado para diminuir o PRAT a praticamente zero, daí o padrão complexo do piso dos pneus. Não é só devido a isso que o padrão é complexo mas sim também ao escoamento da água.

### 4- *Camber e Camber Thrust*

O *camber* é a inclinação que o plano da roda tem em relação ao eixo vertical.

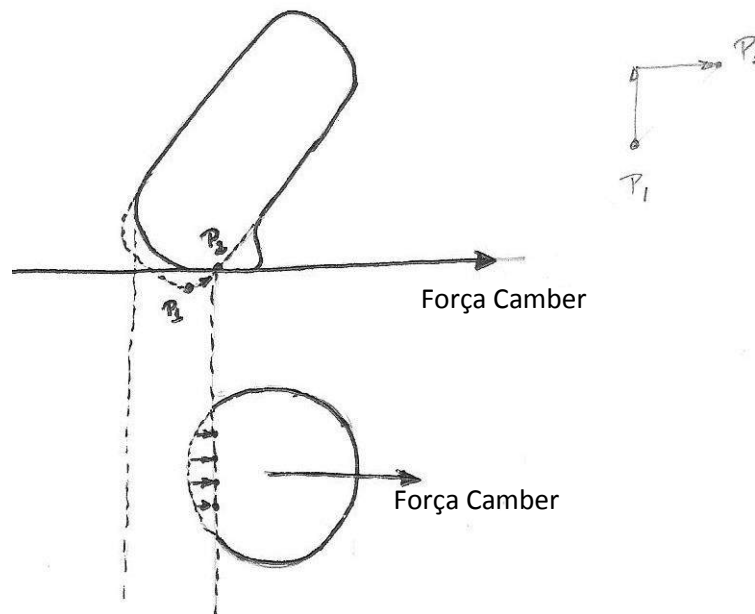
Existem três tipos de *camber*:

- *Camber* do veículo;
- *Camber* do pneu;
- *Camber* da estrada, inclinação da estrada.

O *camber* é vantajoso na medida em que permite diminuir o arrasto dependendo da sua configuração.

O *Camber Thrust* é o movimento perpendicular, de um pneu, à direção em que este está a rolar. A força devida ao camber atua na direção da parede lateral do pneu.

Para percebermos melhor vamos observar a *Figura 43*.



*Figura 43- Representação de um pneu com camber, (vista de frente em cima, vista de topo em baixo) e consequente força camber*

Pela imagem podemos então concluir que quando o pneu pousa no chão e está a rolar o ponto P1 vai deslocar-se para o ponto P2, ou seja, parte do pneu que deveria completar a pegada com uma forma elíptica vai ser “puxado” para dentro devido à fricção e vai assim gerar-se uma força. Tal como nos outros casos, caso esta força não esteja aplicada no centro da pegada, esta vai originar um momento e fazer com que a roda rode no eixo vertical.

### 5.5.2.2 – *Magic Formula*

Existem então vários modelos matemáticos para o estudo da dinâmica associada aos pneus. Como tal já vimos um dos mais simples e mais teóricos, o *Tire Brush Model*.

Vamos então tratar de um modelo empírico que hoje em dia é considerado pelos fabricantes de pneus um dos modelos matemáticos mais importantes nesta área.

Este modelo nem sempre teve o nome de *Magic Formula*, antes tinha o nome de “*Pacejka Tire Model*” (1987), visto Hans B. Pacejka ser o professor da universidade de tecnologia de Delft e um *expert* em dinâmica de veículos que se debruçou bastante sobre este tema da dinâmica de pneus nos últimos 20 anos.

O nome *Magic Formula* surgiu visto não existir nenhuma base física em particular para a estrutura das equações escolhidas, mas de qualquer maneira incluem-se nelas uma enorme variedade de construções e condições de operação dos pneus.

Em 1993 a Michellin adotou este modelo e foi aí que o seu nome mudou para *Magic Formula*. Hoje em dia existem várias versões da *Magic Formula* mas no presente trabalho vamos ver a original, visto que as outras são só modificações desta.

No *Tire Brush Model* tínhamos visto que podíamos obter três curvas:

- $F_x$  – Força longitudinal;
- $F_y$  – Força lateral;
- $M_z$  – Momento causado por  $F_y$ .

Neste caso vamos tentar obter o mesmo mas com uma só fórmula, sendo só necessário alterar alguns parâmetros.

No *gráfico 9* podemos ver as três curvas em função do *Slip* (longitudinal ou latera)

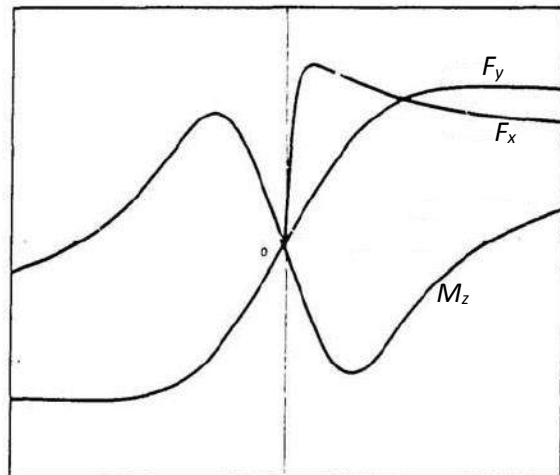


Gráfico 9- Representação da evolução das curvas da força lateral, força longitudinal e momento de alinhamento em função do Slip (lateral no caso de  $F_y$  e longitudinal no caso de  $F_x$ )<sup>[2]</sup>

À partida podemos logo notar que a curva  $F_x$  é a mais alongada,  $F_y$  é menos alongada que a de  $F_x$  e que a curva  $M_z$  é a menos alongada das três.

**Como vamos então representar estas curvas?**

1- Partimos da seguinte expressão

$$y = D \sin Bx$$

Em que  $y$  é o valor da força lateral ou da força longitudinal, e  $x$  pode tomar valor de *Slip Angle* ( $\alpha$ ) ou de *Longitudinal Slip* ( $\kappa$ ), respetivamente.

$D$  é o valor de pico.

2- A equação anterior não nos dá uma boa representação para valores grandes de  $x$  e portanto é necessário alongar a função em  $x$  através da expressão

$$y = D \sin(\arctan(Bx))$$

3- Para ajustarmos o alongamento introduzimos o fator de forma  $C$

$$y = D \sin(C \cdot \arctan Bx)$$

Em que para valores de  $x$  elevados temos

$$y = D \sin\left(\frac{\pi}{2} C\right)$$

4- Agora vamos escrever em função da curvatura e portanto podemos ajustar a curvatura visto que esta varia. Assim é então introduzido um fator de curvatura  $E$ .

$$y = D \sin(C \cdot \arctan(B\Phi))$$

$$\text{com } \Phi = (1 - E)x + \frac{E}{B} \arctan(Bx)$$

Podemos ver no gráfico 10 a influência do fator  $E$  na curva da força lateral.

Os efeitos para a força longitudinal e para o momento serão similares.

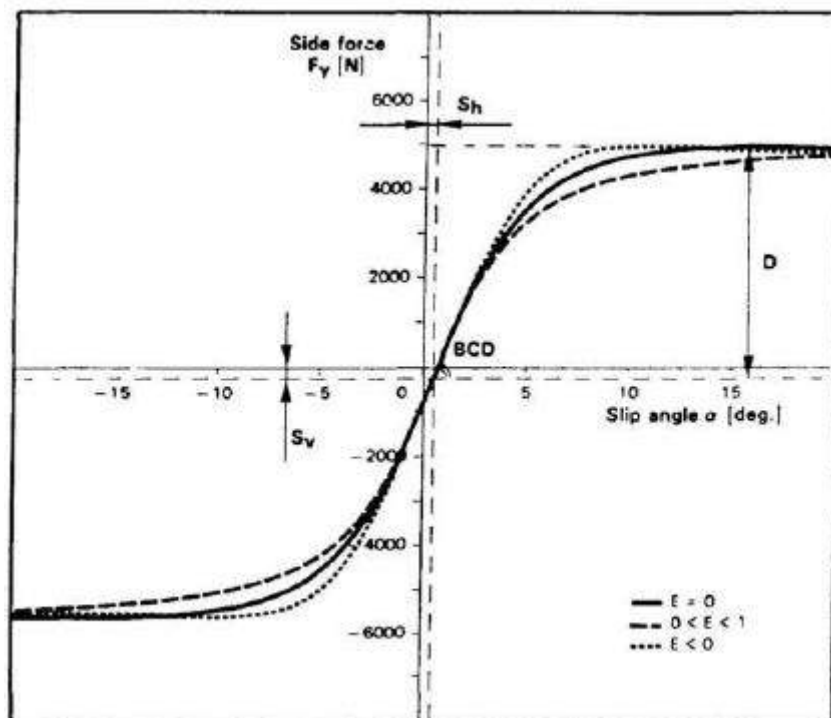


Gráfico 10- Influência do fator de curvatura na curva da força lateral [2]

O resultado foi então uma equação com quatro coeficientes

- $B$  – Fator de rigidez (*Stiffness Factor*);
- $C$  – Fator de forma (*Shape Factor*);
- $D$  – Fator de pico (*Peak Factor*);
- $E$  – Fator de curvatura (*Curvature Factor*).

Contudo as expressões das curvas a que chegamos vão passar todas pelo ponto de origem, e na realidade isso não irá acontecer sempre (ver *gráfico 10*), visto existirem fenómenos como a *Ply Steer*, conicidade e a resistência ao rolamento.

### Influência da Conicidade e *Ply Steer*

Vamos agora introduzir uma mudança horizontal e vertical. Isto vai ser feito para termos em conta a conicidade e a *Ply Steer*. Notar que neste caso ainda não vamos incluir o *camber*.

$$x = X + S_h$$

$$y = Y + S_v$$

Onde  $S_h$  é a mudança horizontal e  $S_v$  a mudança vertical.

E portanto

$$y = D \sin(C \cdot \arctan(B\Phi)) + S_v$$

$$\text{com } \Phi = (1 - E)(X + S_h) + \frac{E}{B} \arctan(B(X + S_h))$$

Para podermos obter os valores das forças, Pacejka levou a cabo algumas experiências em que fazia variar a carga vertical para assim obter os coeficientes que vimos ser introduzidos até agora. No final da experiência foram então tabelados os valores.

	LOAD (kN)	B	C	D	E	$S_h$	$S_v$	BCD
$F_y$	2	0.244	1.50	1936	-0.132	-0.280	-118	780.6
	4	0.239	1.19	3650	-0.678	-0.049	-156	1038
	6	0.164	1.27	5237	-1.61	-0.126	-181	1091
	8	0.112	1.36	6677	-2.16	0.125	-240	1017
$M_z$	2	0.247	2.56	-15.53	-3.92	-0.464	-12.5	-9.820
	4	0.234	2.68	-48.56	-0.46	-0.082	-11.7	-30.45
	6	0.164	2.46	-112.5	-2.04	-0.125	-6.00	-45.39
	8	0.127	2.41	-191.3	-3.21	0.009	-4.22	-58.55
$F_x$	2	0.178	1.55	2193	0.432	0.000	25.0	605.0
	4	0.171	1.69	4236	0.619	0.000	70.6	1224
	6	0.210	1.67	6090	0.686	0.000	80.1	2136
	8	0.214	1.78	7711	0.783	0.000	104	2937

Tabela 1- Tabela de coeficientes para a fórmula com a influência da conicidade e *Ply Steer* [2]

NOTA: A coluna BCD indica-nos o declive inicial da curva.

## Influência da carga vertical

Para reduzir o número de coeficientes presente na tabela anterior e para ser possível calcular as forças e binários com cargas verticais diferentes das que foram utilizadas nas experiências é necessário incluir na fórmula a influência dessas cargas.

Para isso os coeficientes tem que ser escritos em função da carga vertical  $F_z$ :

- Fator de pico  $D$  em função de  $F_z$

$$D = a_1 F_z^2 + a_2 F_z$$

- Para a rigidez da característica da força lateral (rigidez de curvatura ou *cornering stiffness*),  $BCD$

$$BCD = a_3 \sin(a_4 \arctan(a_5 F_z))$$

- Para a rigidez de travagem (*longitudinal slip stiffness*) e para o momento (*self aligning torque*),  $BCD$

$$BCD = \frac{a_3 F_z^2 + a_4 F_z}{e^{a_5 F_z}}$$

- Quanto ao fator de forma, este é praticamente independente de  $F_z$ , e vamos tomar os seguintes valores para as diferentes situações
  - $C=1,30$  no caso da força lateral;
  - $C=1,65$  no caso da força de travagem;
  - $C=2,40$  no caso do momento de auto alinhamento.
- Conseguimos o fator de rigidez (*Stiffness factor*), dividindo a rigidez pela multiplicação do fator de forma pelo fator de pico:

$$B = \frac{BCD}{CD}$$

- O fator de curvatura  $E$

$$E = a_6 F_z^2 + a_7 F_z + a_8$$

E portanto de seguida são apresentados os valores dos coeficientes para o mesmo pneu da tabela anterior mas desta vez com a influência da carga vertical.

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
$F_y$	-22.1	1011	1078	1.82	0.208	0.000	-0.354	0.707
$M_z$	-2.72	-2.28	-1.86	-2.73	0.110	-0.070	0.643	-4.04
$F_x$	-21.3	1144	49.6	226	0.069	-0.006	0.056	0.486

Tabela 2- Coeficientes para a fórmula agora também com o fator carga vertical [2]

## Influência do Camber

Até agora introduzimos influências como as da *Ply Steer*, da conicidade, da carga vertical e da resistência ao rolamento. Por fim vamos introduzir a influência do Camber.

Para isso temos reduzir ainda mais o número total de coeficientes aquando da introdução do Camber na fórmula.

A influência do Camber é incluída adicionando duas mudanças e uma possível mudança na rigidez.

As duas mudanças adicionais são então:

$$\Delta S_h = a_9 Y$$

$$\Delta S_v = (a_{10} F_z^2 + a_{11} F_z) Y$$

A mudança na rigidez:

$$\Delta B = B \cdot (1 - a_{12} |Y|) \Leftrightarrow$$

$$\Delta B = -a_{12} |Y| B$$

Os valores do momento de auto alinhamento quando temos altos valores de *Slip Angle* vão mudar devido a esta mudança na rigidez. Para compensar este efeito, o fator de curvatura  $E$ , para  $M_z$  deve ser dividido por  $(1 - a_{13} |Y|)$ .

Para a força lateral, esta compensação não é necessária visto que os valores para altos *Slip Angle* não são modificados de maneira significativa quando se altera a rigidez.

Tal como para os outros casos, para este temos também uma tabela que nos mostra os coeficientes após termos inserido o Camber:

	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$F_y$	0.028	0.000	14.8	0.022	0.000
$M_z$	0.015	-0.066	0.945	0.030	0.070

Tabela 3- Coeficientes para a fórmula mas agora com o camber incluído [2]

Nesta altura cerca de cinco mil pontos de medição, pelas experiências de Pacejka, foram reduzidos a três equações com um total de trinta e um coeficientes (os coeficiente com valor zero não estão incluídos).

É então possível calcular forças e momentos que nos podem levar a circunstâncias que não estão incluídas no programa de experiências e medições de Pacejka.

De seguida temos um formulário dessas equações.

Estas equações permitem-nos também obter outras informações como por exemplo calcular o *Pneumatic Trail* como função do *Slip Angle* ou da força lateral, simplesmente dividindo o momento de auto alinhamento (*Self Aligning Torque*) pela força lateral.

## Formulário [2]

### 1- Força Lateral (*Lateral Force*)

$$F_y = D \sin(C \arctan(B\phi)) + \Delta S_v$$

with

$$\phi = (1-E)(\alpha + \Delta S_h) + (E/B) \arctan(B(\alpha + \Delta S_h))$$

$$D = a_1 F_z^2 + a_2 F_z$$

$$C = 1.30$$

$$B = \left( \frac{a_3 \sin(a_4 \arctan(a_5 F_z))}{CD} \right) (1 - a_{12} |\gamma|)$$

$$E = a_6 F_z^2 + a_7 F_z + a_8$$

$$\Delta S_h = a_9 \gamma$$

$$\Delta S_v = (a_{10} F_z^2 + a_{11} F_z) \gamma$$

### 2- Momento de auto alinhamento (*Self Aligning Torque*)

$$M_z = D \sin(C \arctan(B\phi)) + \Delta S_v$$

with

$$\phi = (1-E)(\alpha + \Delta S_h) + (E/B) \arctan(B(\alpha + \Delta S_h))$$

$$D = a_1 F_z^2 + a_2 F_z$$

$$C = 2.40$$

$$B = \left( \frac{a_3 F_z^2 + a_4 F_z}{C D e^{a_5 F_z}} \right) (1 - a_{12} |\gamma|)$$

$$E = (a_6 F_z^2 + a_7 F_z + a_8) / (1 - a_{13} |\gamma|)$$

$$\Delta S_h = a_9 \gamma$$

$$\Delta S_v = (a_{10} F_z^2 + a_{11} F_z) \gamma$$

### 3- Força de travagem

$$F_x = D \sin(C \arctan(B\phi))$$

with

$$\phi = (1-E) \kappa + (E/B) \arctan(B\kappa)$$

$$D = a_1 F_z^2 + a_2 F_z$$

$$C = 1.65$$

$$B = \frac{a_3 F_z^2 + a_4 F_z}{C D e^{a_5 F_z}}$$

$$E = a_6 F_z^2 + a_7 F_z + a_8$$

## 6. Conclusão

Durante o trabalho tivemos oportunidade de começar por observar um pouco da história, que nos permite saber de onde surgiu a ideia e necessidade de utilizar os pneus.

Vimos também assuntos como a nomenclatura utilizada nos pneus para assim conseguirmos identificar que pneu estamos a testar.

Tocámos então no assunto de um material, que é um dos materiais que no pneu tem uma presença mais visual e significativa. Nesse capítulo foi explicado o comportamento mecânico da borracha com o objetivo de se entender o regime em que os pneus trabalham. Vimos então que o regime desejado é quando o material se comporta como um conjunto mola-amortecedor.

Por fim tocamos no assunto principal da dinâmica de pneus. Este é um tema bastante complexo visto termos que estudar antes, as várias influências que afetam a dinâmica, tal como fizemos, por exemplo, para o estudo dos materiais.

Nesse capítulo pudemos entender que existem vários modelos de cálculo matemático para conseguirmos obter as forças e momentos que surgem durante a utilização dos pneus. Desses modelos vimos dois, em que um deles, o *Tire Brush Model*, era um modelo mais simples que não entrava com certas influencias como o camber, a conicidade ou a *Ply Steer*. Era um modelo mais teórico.

Seguidamente foi abordado o melhor modelo empírico, a *Magic Fórmula*, que nos permite obter valores bastante próximos dos reais <sup>[1]</sup>. Esta fórmula permite-nos então introduzir vários parâmetros que são bastante influentes na dinâmica de pneus e consequentemente na dinâmica do veículo que os utiliza. Permite inclusive obter valores que não seria possível obter pelas medições tradicionais, como as que Pacejka realizou.

No final ficamos então em condições de poder observar as forças e momentos que se desenvolvem no pneu e de como elas se alteram. Desta forma podemos por exemplo escolher acertadamente pneus para utilizar na competição ou no dia-a-dia (neste caso utilizada pelos fabricantes).

Utilizando as equações finais da *Magic Fórmula* sabemos por exemplo que forças vão ser exercidas nos pneus numa determinada curva de um determinado circuito e se estes vão escorregar ou manter o tão desejado *Grip* durante todo o percurso.

## 7. Trabalhos Futuros

Após o estudo do modelo empírico, *Magic Fórmula*, seria interessante estudar o método mais avançado que se utiliza hoje em dia, o método de elementos finitos.

Estudando os pneus através desse método podíamos ter um método automático do estudo das forças e momentos no pneu, poderíamos simular situações reais rapidamente e ainda poderíamos, por imagens, ver o desenvolvimento dessas forças em tempo real. Para além disso teríamos acesso a fenómenos mais profundos da análise teórica.

## 8. Bibliografia e referências

### 8.1- Bibliografia

- [1] – Pacejka, H. B. (2012). Tire and Vehicle Dynamics 3<sup>rd</sup> edition
- [2] – SAE 870421 (1987). Tyre Modelling for use in vehicle Dynamics Studies
- [3] – (2006). The Pneumatic Tire HS-810-561, U.S. Department of Transportation
- [4] – Paul Mayni (2005). MAE 537: Mechanics os Composites
- [5] – Gurkan Erdogan (2009) Tire Modeling, Lateral and Longitudinal Tire Forces, PhD
- [6] – Jacob Svendenius, Björn Wittenmark. Brush tire model with increased flexibility
- [7] - T.Muthu Siva Sankar, P. Sankarganesh, S.K.P.Amarnath and Peter Becke. Prediction of tread geometry influence on Ply Steer Residual aligning torque (PRAT). Apollo Tyres Ltd., Vadodara, India
- [8] – Marion G Pottinger, Thomas J Yager (1986). The tire pavement interface: a symposium

### 8.2- Referência de Videos

- [V1] – NPTEL, National Programme on Technology Enhanced Learning, <https://www.youtube.com/user/nptelhrd>
- [V2] – Radial and Bias tyres by Michelin – Youtube, <https://www.youtube.com/watch?v=PLN7lv9DkI4>

### 8.3- Referência de Figuras

- [F1] - Toyotires.ca
- [F2] - <http://static.panoramio.com/photos/large/23755142.jpg>
- [F3]- [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6a/John\\_Boyd\\_Dunlop\\_418px.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6a/John_Boyd_Dunlop_418px.jpg)
- [F4]- <http://pt.wikipedia.org/wiki/Pneu>
- [F5]- [http://www.pirelli.com/tyre/pt/pt/car/genericPage/all\\_about\\_tyres.html](http://www.pirelli.com/tyre/pt/pt/car/genericPage/all_about_tyres.html)
- [F6]- pneusfacil.com.br
- [F7]- Understanding tire markings, [roadrunnertech.com.ng/understanding-tyre-markings/](http://roadrunnertech.com.ng/understanding-tyre-markings/)
- [F8]- Tire size calculator <http://www.tiresizecalculator.info/>

[F9]- Uncategorized archives – Mountain Valley Motors  
<http://www.mountain-valleymotors.com/category/uncategorized/>

[10]- O que compõe um pneu? | Tudo sobre o pneu | | Conselhos | Michellin Portugal,  
<http://www.michelin.pt/pneus-turismo/conselhos/tudo-sobre-o-pneu/o-que-compoe-um-pneu>

[11]- Tudo sobre pneus, renaulclube.com,  
<http://www.renaulclube.com/tudo-sobre-pneus/>

[12]- Fitting of tire's experimental data, Multibody.net  
<http://www.multibody.net/teaching/dissertations/2011-tomasi/>

[F13]- Oversteer Understeer – Slip Angle  
<http://www.driftingstreet.com/oversteer-understeer-slip-angle.html>