

Caldeira para Produção de Água Quente

Modelação e controlo.

29 de Novembro de 2013

Caldeira para Produção de Água Quente

Modelação e controlo.

No presente trabalho pretende-se modelar e controlar uma caldeira elétrica de resistência. Para tal determinou-se um modelo elétrico equivalente ao do sistema, a partir do qual se determinaram as equações diferenciais que regem o sistema. Essas equações foram convertidas em diagramas de blocos, com os quais foram efetuadas simulações num software comercial.

In this work, we intend to model and control an electric water heater. For this purpose an electric model was created, from which the differential equations that explain the workings of the system were determined. These equations were then converted into block diagrams, with which some simulations were made in a commercial software.

Autores e âmbito

Este relatório foi realizado pelos alunos da FEUP André Ferreira, António Coimbra, Tiago Simões, Francisco Lencastre e Vasco Branco, no âmbito da unidade curricular Sistemas de Controlo.

Índice

Introdução	1
Caldeira Elétrica Para Aquecimento de Água.....	2
Determinação da constante de tempo do elemento de aquecimento.....	6
Determinação da constante de tempo para a parede	7
Cálculo do caudal mássico máximo.....	9
Forma diferencial do modelo não linear da caldeira.....	12
Elemento resistivo	12
Determinação do modelo elétrico	12
Determinação da forma diferencial do modelo resistivo.....	14
Caldeira elétrica.....	15
Linearização do sistema	18
Representação do modelo linearizado por funções de transferência	21
Representação dos modelos em diagramas de blocos	25
Diagrama de blocos do modelo não linearizado	25
Diagrama de blocos do modelo linearizado.....	26
Implementação no <i>Matlab</i> [®]	29
Sem controlador.....	29
Modelo não linearizado.....	29
Modelo linearizado	31
Com controlador proporcional.....	33
Modelo não linearizado.....	33
Modelo linearizado	35
Com controlador proporcional e integral	40
Modelo não linearizado.....	40
Modelo linearizado	42
Conclusões.....	45
Bibliografia	46
Anexos	47
Anexo A	47
Anexo B.....	48
Blocos em série.....	48
Blocos em paralelo.....	48
Ramo de Feedback	49

Introdução

Em engenharia é importante saber como se comporta um sistema dinâmico. Dada a complexidade da grande maioria dos sistemas em que trabalhamos, é necessário ter conhecimentos que permitam determinar e controlar automaticamente o comportamento destes sistemas. É este o objetivo a que a cadeira de Sistemas de Controlo atende.

Por forma a por em prática alguns dos conhecimentos adquiridos será feita a modelação de um sistema térmico, mais propriamente o aquecimento de água numa caldeira elétrica. Para uma melhor compreensão deste sistema, será necessário seguir alguns passos, tais como:

- Fazer a descrição do funcionamento caldeira;
- Traduzir o sistema térmico para um sistema elétrico pela analogia reo-elétrica;
- Estabelecer as equações que regem o sistema;
- Analisar a necessidade de linearizar as equações em torno de um determinado ponto de funcionamento;
- Obter a(s) função(ões) transferência do sistema;
- Representar o sistema em diagramas de blocos;
- Fazer a implementação num programa de simulação;
- Testar o seu funcionamento para diferentes condições de trabalho;
- Estudar o efeito da introdução de controladores.

Seguir os passos anteriormente referidos ser os objetivos do presente trabalho.

Caldeira Elétrica Para Aquecimento de Água

As caldeiras são dispositivos cuja função é elevar a temperatura de um fluido utilizando um determinado elemento de aquecimento. No caso presente estuda-se uma caldeira elétrica resistência, com $75kW$ de potência máxima cujo reservatório tem as características descritas na tabela.

Tabela 1 - Propriedades da caldeira em estudo

Caraterísticas do reservatório da caldeira	
Volume	50 L
Diâmetro	350 mm
Altura	520 mm
Espessura das paredes	3 mm
Material	Aço inox 18Cr 8Ni

Para modelar o sistema, considerou-se que um certo caudal de água, w , entra unicamente por uma entrada, a uma temperatura média de entrada, T_{in} , e sai a uma determinada temperatura, T_{out} por uma saída. Esse caudal pode ser regulado por uma válvula reguladora de caudal. Dentro da caldeira existe uma resistência, ou elemento resistivo, responsável pelo aquecimento da água, devido à geração interna de calor por efeito Joule, aquando da passagem de corrente elétrica.

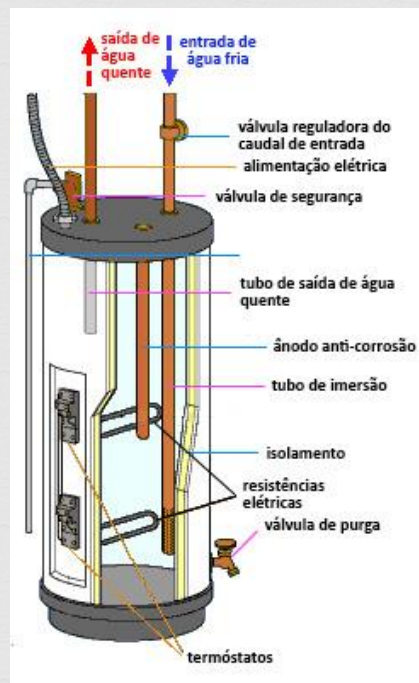


Figura 1 - Representação esquemática de uma caldeira elétrica de resistência.

Determinação das constantes de tempo

Determinação das constantes de tempo através dos resultados experimentais.

As propriedades do material de isolamento da caldeira são desconhecidos bem como as características térmicas do elemento de aquecimento. Essas propriedades serão necessárias para uma correta modelação do sistema. Portanto, com vista à determinação das mesmas realizou-se uma experiência para estudo da evolução da temperatura ao longo do tempo. Dessa experiência será possível determinar as constantes de tempo do elemento resistivo e da parede que, como se verá mais à frente, se relacionam com as suas propriedades térmicas.

A experiência foi realizada numa sala climatizada a 20°C onde a caldeira, fechada e cheia de água, fez um estágio para homogeneização da temperatura após o qual foi aquecida à potência de 75KW até aos 40°C, instante em que é desligada. A caldeira manteve-se fechada até que a temperatura da água retornasse à temperatura da sala.

A evolução da temperatura no interior da caldeira está representada nos gráficos que se seguem, gerados com o software Matlab, a partir dos dados experimentais recolhidos.

O primeiro gráfico, figura 2, representa os 4 minutos iniciais da experiência, amostrados com um período de 1s.

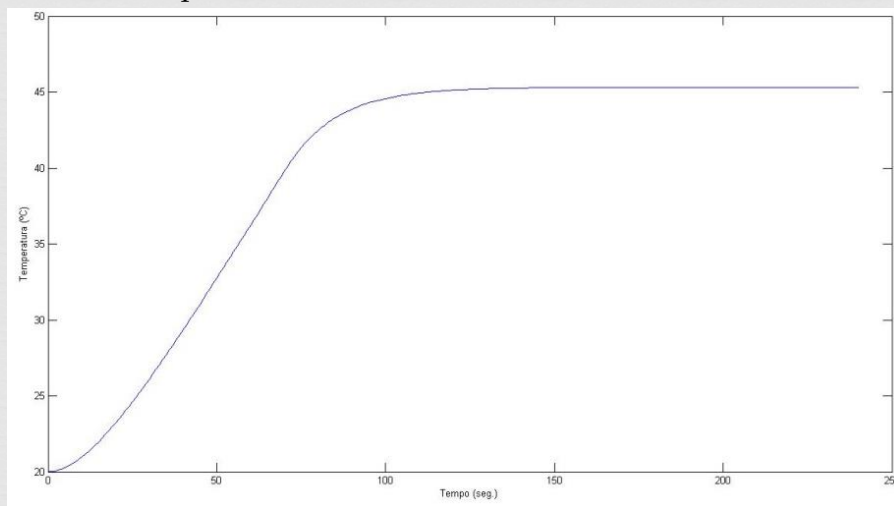


Figura 2 - Evolução da temperatura da água na caldeira, em aquecimento.

O segundo está representada toda a experiência que durou cerca de 6 dias, sendo feitas amostragens a cada 30 minutos.

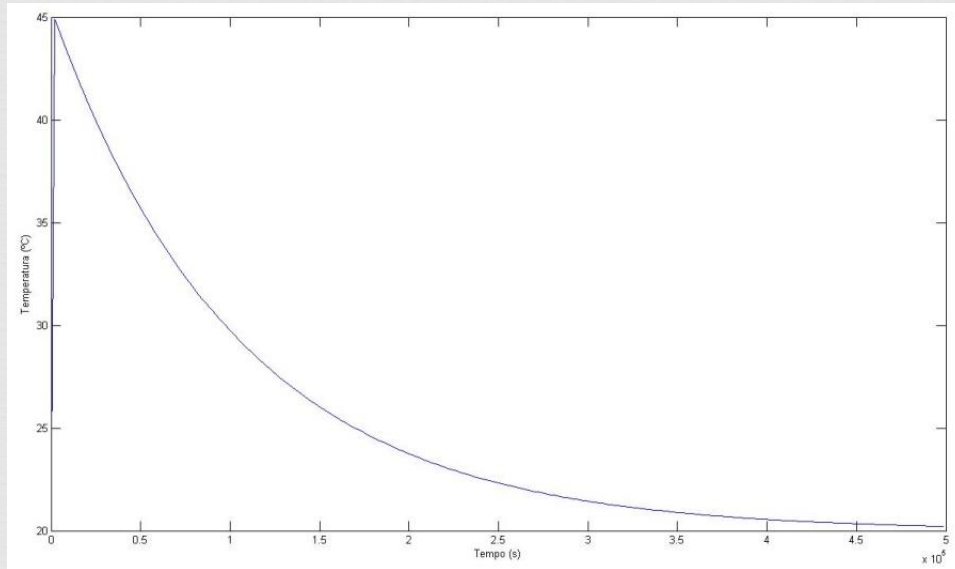


Figura 3 - Evolução da temperatura da água na caldeira, em arrefecimento.

A potência elétrica fornecida ao elemento de aquecimento da caldeira pode ser regulada através de um amplificador eletrónico de potência. Isto permite o ajuste contínuo da potência fornecida de forma a assegurar a permanência do sistema num determinado regime permanente de funcionamento.

Se a ação de controlo sobre o elemento de aquecimento num determinado instante resultar simplesmente numa transição instantânea ascendente de um estado de não fornecimento de potência para um de fornecimento da mesma, a ação pode ser vista graficamente como uma função de degrau unitário.

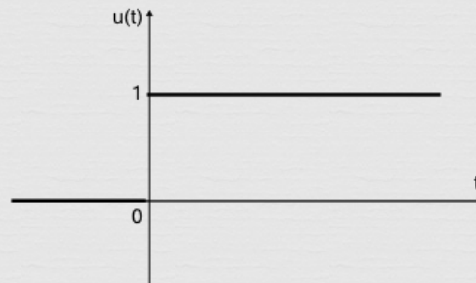


Figura 4 - Representação gráfica de uma função em degrau unitário.

Como se poderá verificar à frente, se não existir fornecimento de potência, o sistema em estudo é de primeira ordem, visto que assim o são as equações que regem o seu funcionamento. A resposta temporal de um sistema de primeira ordem a um degrau unitário está representada no gráfico que se segue.

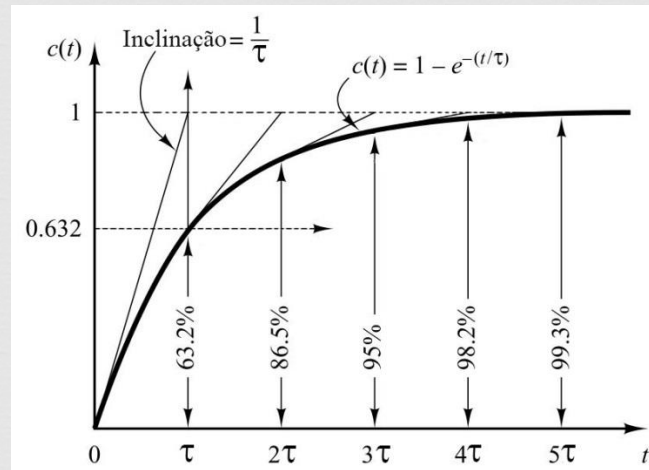


Figura 5 - Resposta a um degrau unitário por um sistema de primeira ordem^[2]

Note-se que a resposta é tanto mais próxima do regime permanente ou estado de equilíbrio, quanto maior for o tempo decorrido após o degrau. Se a resposta se traduzir por uma variação unitária de um estado de referência para o regime permanente verifica-se que, após 4 períodos de tempo é atingido 98.2% do regime permanente. Regra geral assume-se que sistema está em regime permanente após estes 4 períodos uma vez que o ganho em aproximação ao regime a partir deste instante não justifica o tempo despendido.

A constante de tempo é equivalente a um período de tempo ou seja, ao tempo decorrido até que se atingem $c(\tau) = 1 - e^{-1} = 0.632 \Rightarrow 63.2\%$ do regime permanente.

A curva de aquecimento anteriormente apresentada segue exatamente o comportamento típico de uma resposta a um degrau unitário. Esta analogia permite o cálculo da constante de tempo que se apresenta mais a frente.

A curva de arrefecimento por sua vez apresenta um comportamento típico da resposta a um impulso unitário. À primeira vista, se a ação de controlo foi do tipo degrau unitário este comportamento não era esperado porém, note-se que após um tempo o elemento de aquecimento é desligado. Ora, o tempo em que o elemento de aquecimento está ligado (aproximadamente 1 minuto) comparado com o necessário para que a temperatura retorne à temperatura ambiente (6 dias) faz com que o degrau passe a ser considerado como um impulso. No fundo o sistema responde a um pico de potência. Esta influência do aumento do domínio do tempo é explicada na figura que se segue.

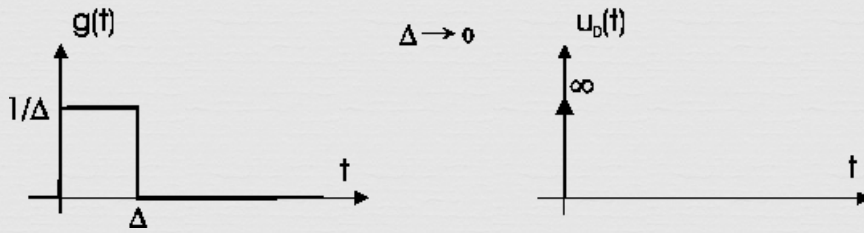


Figura 6 - Influência do domínio temporal na caracterização da resposta.

A resposta temporal de um sistema de primeira ordem a um impulso unitário está representada no gráfico que se segue.

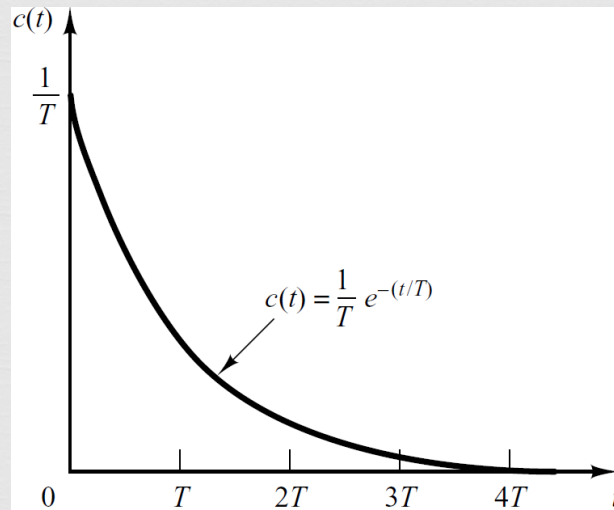


Figura 7 - Resposta a um impulso unitário^[2]

Mais uma vez, a constante de tempo é equivalente a um período de tempo ou seja, ao tempo decorrido até que se atinge $c(\tau) = e^{-1} = 0.368 \Rightarrow 36.8\%$ do valor de partida ou $(1-0.368=63.2\%)$ do regime permanente.

Determinação da constante de tempo do elemento de aquecimento

Sabendo que o elemento de aquecimento foi desligado quando a temperatura da água atingiu 40°C , é possível verificar o comportamento do mesmo a partir desse instante por análise dos dados experimentais recolhidos, ou seja, a resposta ao degrau pode caracterizar-se segundo a função do gráfico anterior para $t = 70.6\text{s}$, instante em que se atinge a temperatura de 40°C e se desliga a caldeira e que se apresenta seguidamente.

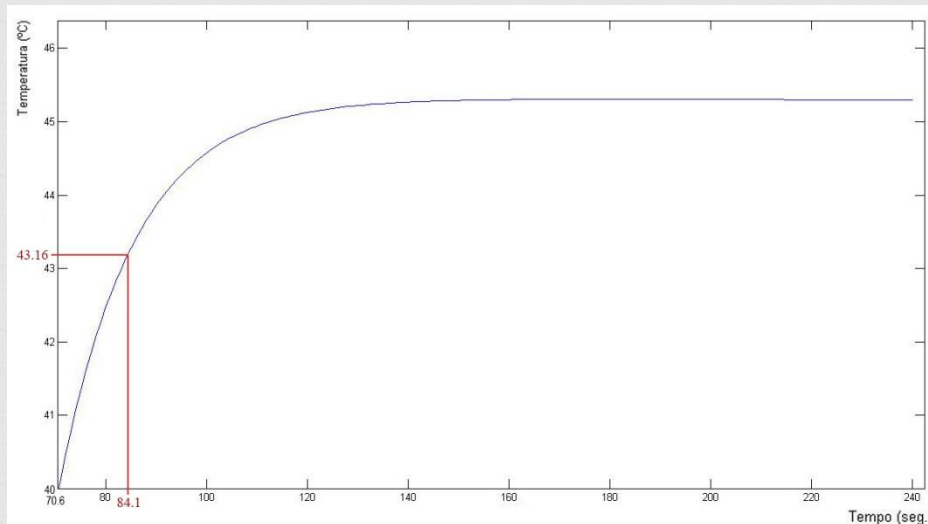


Figura 8 - Curva de aquecimento após corte de potência com a constante de tempo assinalada.

Assim sendo, e de acordo com o exposto no ponto anterior, a constante de tempo para o elemento de aquecimento é o tempo necessário a atingir 63.2% da temperatura máxima após o corte de potência ou, por outras palavras, 63.2% da diferença de temperaturas entre o instante em que se deixa de fornecer potência ao elemento de aquecimento e se entra em regime permanente.

$$\Delta T = (T_{rp} - T_i) \cdot 0.632 = (45 - 40) \cdot 0.632 = 3.16 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Da leitura dos dados recolhidos no ensaio verifica-se que:

- Para $T = 40^\circ\text{C} \rightarrow t = 70.6\text{s}$
- Para $T = 40 + 3.16 = 43.16^\circ\text{C} \rightarrow t = 84.1 \text{ s}$

Um período corresponde assim a:

$$\tau_{aq} = \Delta t = 84.1 - 70.6 = 13.5 \text{ s.}$$

Esta é a constante de tempo do elemento de aquecimento.

Determinação da constante de tempo para a parede

A determinação da constante de tempo da parede seguiu uma metodologia idêntica ou seja, foi calculado o tempo necessário a atingir 36.8% da diferença de temperaturas entre o instante em que se atinge a temperatura máxima de 45° e se entra em regime permanente que é igual à temperatura ambiente de 20°C .

$$\Delta T = (T_i - T_{rp}) \cdot 0.368 = (45 - 20) \cdot 0.368 = 9.2^\circ\text{C}$$

Da leitura dos dados recolhidos no ensaio verifica-se que:

- Para $T = 45^\circ\text{C} \rightarrow t = 112.6 \text{ s}$

- Para $T = 20 + (9.2) = 29.2^{\circ}\text{C} \rightarrow t = 105890 \text{ s}$

Um período corresponde assim a:

$$\tau_{arr} = \Delta t = 105890 - 112.6 = 105776 \text{ s.}$$

Sendo esta a constante de tempo da parede.

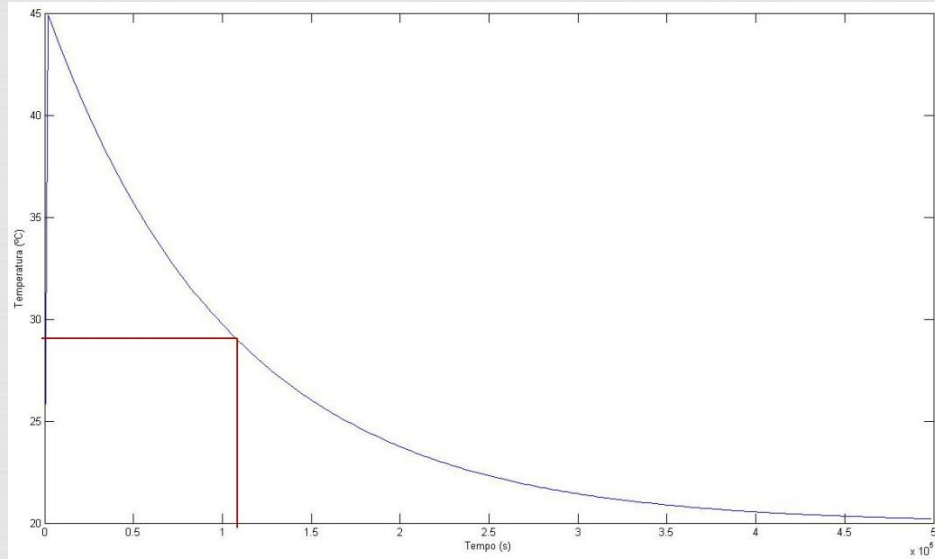


Figura 9 - Curva de arrefecimento com ponto a constante de tempo assinalada.

Cálculo do caudal mássico máximo

A potência da caldeira encontra-se limitada a 75kW. Além disso, estabeleceu-se que a temperatura da água à saída deve ser 60°C, e uma determinada extensão da variação da temperatura de entrada da água e do ambiente onde se insere a caldeira.

Por isso é útil determinar o caudal máximo que a caldeira consegue aquecer satisfazendo essas condições. Para tal faz-se uma análise termodinâmica ao sistema.

Para saber o caudal máximo que a caldeira pode aquecer, aplica-se a 1ª lei da termodinâmica a um volume de controlo que a rodeie.

$$\dot{W} + \dot{Q} = w(\Delta u + e_p + e_c + e_q + \dots)$$

Desprezando as variações locais de energia cinética, química, potencial e de pressão tem-se

$$\dot{Q} = w\Delta u$$

O fluxo de calor pode ser decomposto nas partes que entram e saem e, relativamente à energia interna, sabe-se que $\Delta u = c_p\Delta T$. Assim,

$$\dot{Q}_e - \dot{Q}_s = wc_p\Delta T$$

O fluxo de calor que entra vem da potência da fornecida à resistência, o fluxo de calor que sai pode ser determinado aplicando a analogia reo-elétrica

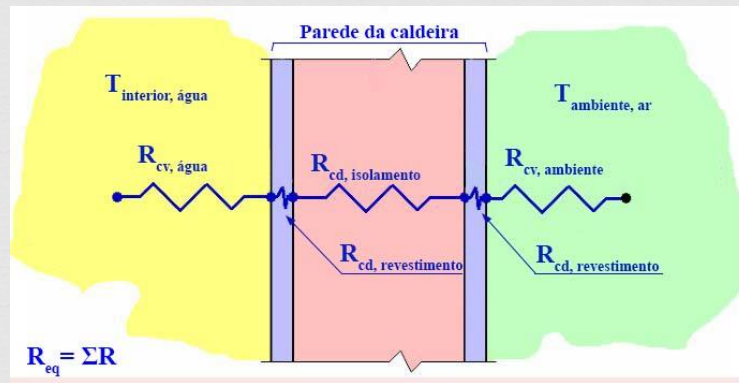


Figura 10 - Aplicação da analogia reo-elétrica à parede da caldeira e obtenção da resistência equivalente.

$$P - \frac{T_{interior} - T_{amb}}{R_{eq}} = wc_p(T_{out} - T_{in}) \quad (1)$$

O caudal máximo ocorre quando T_{in} é máxima, isto é, 12+5°C, visto que quanto mais próximo dos 60°C entrar a água, menos tempo tem de passar na caldeira e portanto maior o caudal que pode passar. Também quanto menores forem as perdas caloríficas para o exterior mais parte da potência pode ir diretamente para a água, e pela mesma lógica, maior o caudal que pode. As perdas para o exterior são menores

quanto mais perto dos 60°C estiver a $T_{ambiente}$, (T_{amb}). Assim, para o caudal máximo $T_{amb} = 25^{\circ}\text{C}$.

Visto que T_{dentro} irá variar entre 17 e 60°C optámos, por simplificação, por usar o valor médio e assumindo que varia aproximadamente linearmente. Será também para esse valor que se irá buscar as propriedades da água às tabelas necessárias.

Para determinar a R_{eq} torna-se necessário conhecer a sua relação com a constante de tempo.

Para o caso em estudo,

$$R_{eq} = \frac{\tau_{arr}}{m_{H_2O} \cdot c_p} \quad (2)$$

Visto que a constante de tempo foi obtida para o ensaio realizado (arrefecimento), será para as condições em que o mesmo foi realizado que se fará este cálculo. Então, para

$$\bar{T} = \frac{T_{arr, inicial, H_2O} + T_{arr, final, H_2O}}{2} = \frac{45 + 20}{2} = 32.5^{\circ}\text{C}$$

Vendo no anexo A, e interpolando entre os dois valores de temperatura tabelados obtém-se

$$c_p(H_2O; \bar{T}) = 4179 \text{ J/kgK}$$

E a massa de água que se encontra dentro da caldeira durante do arrefecimento é obtida sabendo o volume da água e a densidade a 32.5°C

$$m_{H_2O} = V_{H_2O} \cdot \rho_{H_2O} = 0,05 \cdot 994,79 = 49,739 \text{ kg}$$

Tendo $\tau_{arr} = 105776 \text{ s}$, e substituindo os valores em (2) $R_{eq} = 0,50942 \text{ W/mK}$. Finalmente substituindo todos os valores em (1) obtém-se o caudal mássico

$P = 75000\text{W}$	$\bar{T}_{interior} = \frac{17 + 60}{2} = 38.5$	$T_{in} = 17^{\circ}\text{C}$	$T_{out} = 60^{\circ}\text{C}$
$T_{amb} = 25^{\circ}\text{C}$	$c_p(H_2O; 38.5^{\circ}\text{C}) = 4179 \text{ J/kgK}$	$R_{eq} = 0,50942$	

$$w = 0.41722 \text{ kg/s}$$

Caso se conseguisse melhorar o isolamento da caldeira, de maneira a anular a parcela fluxo de calor perdido para o ambiente - situação ideal - o caudal máximo que a caldeira conseguiria aquecer aumentaria. Assim a eq. (1) passaria a

$$P = w_{ideal} c_p (T_{out} - T_{in})$$

O que, substituindo os valores presentes na tabela acima, daria

$$w_{ideal} = 0.41737 \text{ kg/s}$$

Forma diferencial do modelo não linear da caldeira

Elemento resistivo

Determinação do modelo elétrico

Para simplificar a construção do modelo faz-se uma analogia elétrica para as variáveis reais. Para a construção dessa analogia facilita o uso de um modelo real térmico (fig. 8). Este modelo representa o elemento de resistência, R_T , a uma temperatura, T_R , o qual é atravessado por uma potência, p , e que por isso gera um fluxo de calor, por efeito Joule, q . O elemento resistivo encontra-se rodeado de água à T_{amb} .

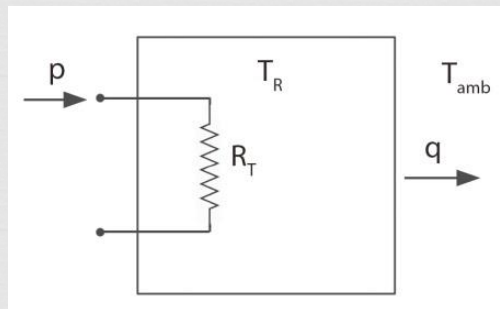
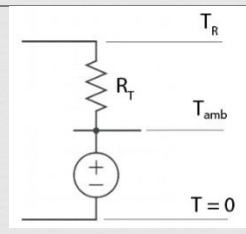
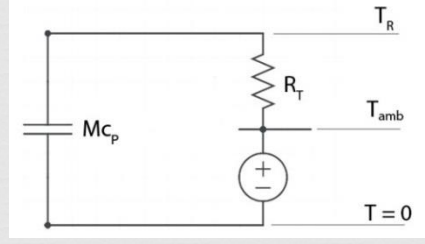
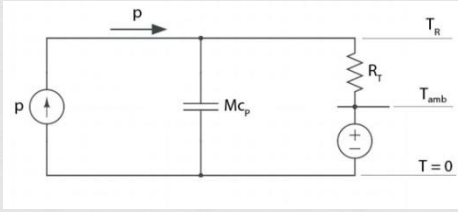


Figura 11 - Esquema simplificado do modelo real da resistência.

Seguem-se, então, os passos descritivos da construção do modelo elétrico baseado neste modelo térmico.

<p>As 2 temperaturas representam os 2 níveis de tensão. Existe ainda $T = 0$, uma temperatura de referência, que corresponde a um nível de potencial igualmente nulo.</p>	
<p>Como a variação da T^a ambiente ao longo do tempo pode ser desprezada, significa que o ambiente impõe essa T^a, e daí eletricamente será uma fonte de tensão a impor a tensão T_{amb}.</p>	

<p>O ambiente constitui também uma resistência térmica de convecção, a qual pode ser substituída por uma resistência elétrica.</p>	
<p>Visto que a própria resistência elétrica tem a capacidade de armazenar alguma energia térmica, algo que pode ser verificado pelo facto de mesmo depois de desligada a corrente, a água ainda aquecer um pouco, significa que, em termos elétricos, estamos na presença de um elemento capacitivo.</p>	
<p>Visto que a própria resistência elétrica tem a capacidade de armazenar alguma energia térmica, algo que pode ser verificado pelo facto de mesmo depois de desligada a corrente, o facto de a água ainda aquecer um pouco, significa que estamos na presença de um elemento capacitivo.</p>	

Uma parte dessa corrente será para aquecer a própria resistência ($q_{\text{Massa da resistência}} = q_M$), a outra irá para a água. Finalmente também se pode representar o elemento de tensão nula, ou ligação à terra, obtendo-se, assim, o modelo elétrico final que representa o modelo térmico.

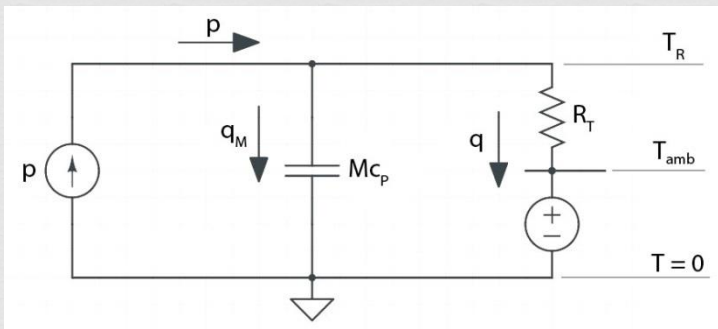


Figura 12 - Modelo elétrico representativo do elemento resistivo.

Tabela 2 - Resumo das variáveis do sistema e suas análogas elétricas

Tipo	Variável real	Variável elétrica	Nome
Potencial	Temperaturas	Níveis de tensão	$T_R, T_{amb}, T = 0$
Fluxo	Fluxos de calor	Correntes elétricas	Potência (p), q_M, q
Resistência, Capacitância	Resistências térmicas, Capacidades térmicas	Resistências elétricas, Els. Capacitivos	R_T, Mc_p

Determinação da forma diferencial do modelo resistivo

Tendo então o modelo elétrico, passa-se a tratar o sistema como se este fosse unicamente elétrico. Assim, para se poder determinar a equação diferencial que descreve o elemento de aquecimento, começa-se por aplicar a 1ª lei de Kirchoff ao nó de cima. Tem-se

$$p = q_M + q$$

Pela analogia entre sistema térmico e elétrico sabe-se que $q = C \frac{dT}{dt}$. A capacidade térmica pode ser substituída pela sua componente específica (c_p) e pela massa (m).

$$p = M_R c_{pR} \frac{dT_R}{dt} + \frac{T_R - T_{amb}}{R_T} \quad (3)$$

Como não sabemos T_R , nem a sua derivada em ordem ao tempo, aplica-se a lei de Ohm entre os terminais da resistência R_T

$$T_R - T_{amb} = R_T \cdot q$$

Explicitando em ordem a T_R

$$T_R = R_T \cdot q + T_{amb} \quad (4)$$

Derivando ambos os membros em ordem ao tempo

$$\begin{aligned} \frac{dT_R}{dt} &= \frac{d}{dt} (R_T \cdot q + T_{amb}) \\ \frac{dT_R}{dt} &= \frac{dR_T}{dt} \cdot q + \frac{dq}{dt} \cdot R_T + \frac{dT_{amb}}{dt} \end{aligned}$$

Como $\frac{dR_T}{dt}$ não varia com o tempo (a resistência tem um valor constante e definido) e $\frac{dT_{amb}}{dt} \approx 0$. Assim tem-se

$$\frac{dT_R}{dt} = \frac{dq}{dt} \cdot R_T \quad (5)$$

Entrando com as eq. (4) e (5) em (3) fica-se com

$$p = M_R c_{pR} \frac{dq}{dt} \cdot R_T + \frac{R_T \cdot q + T_{amb} - T_{amb}}{R_T}$$

Simplificando

$$p = M_R c_{pR} \frac{dq}{dt} \cdot R_T + q$$

Não se conhecem os valores das variáveis M_R , c_{pR} e R_T . É neste ponto que entra análise feita anteriormente sobre as constantes de tempo, uma vez que

$$M_R c_{pR} R_T = \tau_{aq}$$

Onde τ_{aq} foi o obtido da curva de aquecimento da água. Assim,

$$p = \tau_{aq} \frac{dq}{dt} + q \quad (6)$$

Que é a equação diferencial que modela o comportamento da resistência.

Caldeira elétrica

Modelo elétrico

Seguindo a mesma lógica que para o elemento resistivo, desenha-se o modelo térmico e o respetivo modelo elétrico.

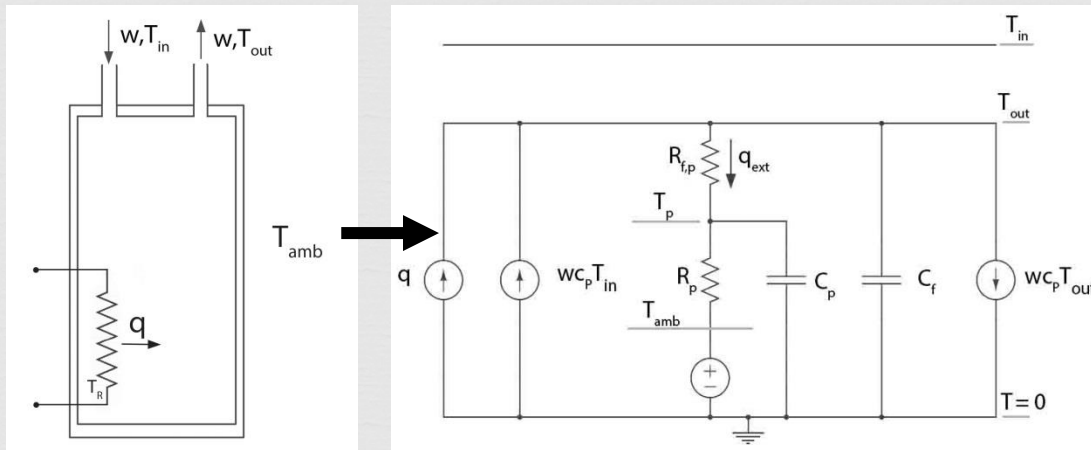


Figura 13 - Representação dos modelos térmico e elétrico para a caldeira.

Tabela 3 – Significado das variáveis do sistema presentes no modelo elétrico

Variável	Significado
q	Fluxo de calor gerado na resistência por efeito Joule transferido para a água
$wc_p T_{in}$	Fluxo de calor fornecido pelo caudal de entrada
$R_{f,p}$	Resistência térmica entre o fluido e a parede da caldeira
q_{ext}	Fluxo de calor perdido pelo isolamento da caldeira
T_p	Temperatura da parede da caldeira
R_p	Resistência térmica da parede (isolamento) da caldeira
T_{amb}	Temperatura do ambiente onde se encontra a caldeira
C_p	Capacidade térmica da parede
C_f	Capacidade térmica da água
T_{in}	Temperatura da água à entrada
T_{out}	Temperatura da água à saída
$wc_p T_{out}$	Fluxo de calor fornecido pelo caudal de saída
c_p	Calor específico a pressão constante da água

O ensaio elaborado do aquecimento da água, seguido de arrefecimento, permite conhecer a resistência térmica da água, das paredes e do ambiente, em conjunto, R_T . A constante de tempo do ensaio de arrefecimento permite conhecer também a energia total acumulada, $C_T = (M_{\text{água}}c_{p\text{água}} + M_{\text{parede}}c_{p\text{parede}})$. Tendo estes factos em conta, pode-se simplificar o modelo elétrico para o representado na figura em baixo.

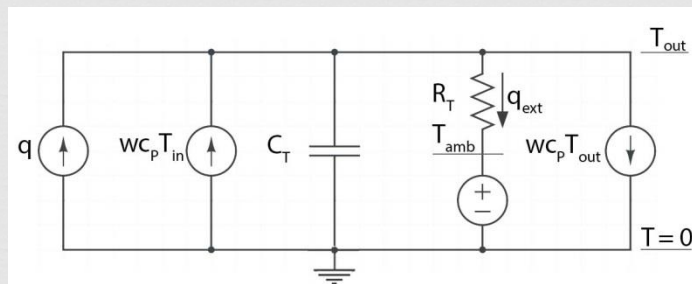


Figura 14 – Modelo elétrico da caldeira simplificado.

Determinação da forma diferencial da caldeira elétrica

Aplicando a 1ª lei de Kirchoff ao nó de cima

$$q + wc_p T_{in} = i_{C_T} + wc_p T_{out} + q_{ext}$$

Sabendo que $i_{C_T} = C_T \frac{dT_{out}}{dt}$ e $q_{ext} = \frac{T_{out} - T_{amb}}{R_T}$ tem-se

$$q + wc_P T_{in} = C_T \frac{dT_{out}}{dt} + wc_P T_{out} + \frac{T_{out} - T_{amb}}{R_T}$$

A resistência total é indiretamente dada no ensaio do arrefecimento, pela constante de tempo de arrefecimento τ_{arr} .

Para se obter o modelo da caldeira elétrica é ainda, necessário entrar com a equação respetiva ao elemento resistivo

$$p = \tau_{aq} \frac{dq}{dt} + q$$

Obtendo-se assim um sistema de equações

$$\begin{cases} q + wc_P T_{in} = C_T \frac{dT_{out}}{dt} + wc_P T_{out} + \frac{T_{out} - T_{amb}}{R_T} \\ p = \tau_{aq} \frac{dq}{dt} + q \end{cases}$$

Sabendo que $\tau_{arr} = C_T R_T$, reescreve-se a equação acima como

$$\begin{cases} \frac{dT_{out}}{dt} = \frac{wc_P}{C_T} (T_{in} - T_{out}) + \frac{T_{amb} - T_{out}}{\tau_{arr}} + \frac{q}{C_T} \\ \frac{dq}{dt} = \frac{p - q}{\tau_{aq}} \end{cases} \quad (7)$$

Que é o sistema de equações de descrevem o funcionamento do sistema. Como se pode verificar por substituição do termo comum, q , este sistema resultará numa única equação diferencial de 2ª ordem.

Linearização do sistema

No capítulo anterior obtiveram-se as duas equações diferenciais que modelam o funcionamento do sistema. No entanto, a primeira não é linear porque apresenta o produto de duas funções temporais, caudal e temperatura.

Os modelos não lineares de um sistema podem ser utilizados para a simulação numérica do seu comportamento mas não podem ser utilizados nos procedimentos do Controlo Clássico de síntese de controladores, que requerem modelos lineares. Este problema é contornado encontrando-se modelos lineares que constituem uma aproximação ao modelo original e que são válidos localmente, isto é, em torno de um ponto de funcionamento.

Para o caso em estudo, o modelo vai ser linearizado para o ponto de funcionamento dado, em regime permanente, para os dados contidos na tabela 3.

Tabela 4 - Características do ponto de funcionamento em torno do qual se linearizará o sistema.

Variável	Valor a tomar
T_{out_0}	60 °C
w_0	$\frac{w_{máx}}{2} = \frac{0.41722}{2} = 0.2086 \text{ kg/s}$
T_{in_0}	12°C
T_{amb_0}	20 °C

Os termos, do sistema de equações, que precisam de ser linearizados são

$$f_1(w, T_{in}) = w \frac{c_p}{C_T} T_{in} \quad (8)$$

$$f_2(w, T_{out}) = w \frac{c_p}{C_T} T_{out} \quad (9)$$

$$\frac{dT_{out}}{dt} = f_1 - f_2 + \frac{T_{amb} - T_{out}}{\tau_{arr}} + \frac{q}{C_T} \quad (10)$$

Para linearizar faz-se uma expansão em série de Taylor reduzida aos termos de 1ª ordem (único termo linear). A expansão em série de Taylor pode ser definida como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \quad , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Que reduzida aos termos de primeira ordem fica

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

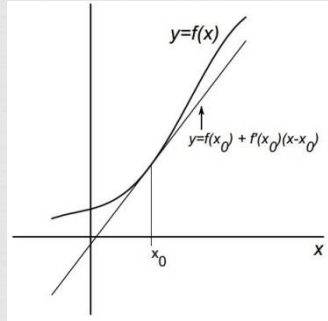


Figura 15 - Significado gráfico da linearização de uma função em torno de um ponto pela expansão em série de Taylor.

Aplicando ao caso em estudo e tendo em conta que ambas as funções f_1 e f_2 dependem de duas variáveis e portanto terão dois termos, um para cada derivada parcial, tem-se

$$f_1(w, T_{in}) \approx f_1(w_0, T_{in_0}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial w} \right|_{\substack{w=w_0 \\ T_{in}=T_{in_0}}} \cdot (w - w_0) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial T_{in}} \right|_{\substack{w=w_0 \\ T_{in}=T_{in_0}}} \cdot (T_{in} - T_{in_0})$$

$$f_2(w, T_{out}) \approx f_2(w_0, T_{out_0}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial w} \right|_{\substack{w=w_0 \\ T_{out}=T_{out_0}}} \cdot (w - w_0) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial T_{out}} \right|_{\substack{w=w_0 \\ T_{out}=T_{out_0}}} \cdot (T_{out} - T_{out_0})$$

Estas equações podem ser simplificadas e expressas segundo os termos que interessam para o sistema de equações. Observando a equação respetiva a f_1 , juntamente com a eq. (8)

$$f_1(w_0, T_{in_0}) = w_0 \frac{c_p}{C_T} T_{in_0}$$

Para resolver as derivadas parciais tem-se em vista a eq. (7) o que dá

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial w} \right|_{\substack{w=w_0 \\ T_{in}=T_{in_0}}} = \frac{c_p}{C_T} T_{in_0}$$

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial T_{in}} \right|_{\substack{w=w_0 \\ T_{in}=T_{in_0}}} = w_0 \frac{c_p}{C_T}$$

Assim, e sabendo que

$$w - w_0 = \delta w \tag{11}$$

$$T_{in} - T_{in_0} = \delta T_{in} \tag{12}$$

Substitui-se na equação respetiva a f_1

$$f_1 \approx f_{1_0} + \frac{c_p}{C_T} T_{in_0} \cdot \delta w + w_0 \frac{c_p}{C_T} \cdot \delta T_{in}$$

O mesmo raciocínio se pode aplicar a f_2 obtendo-se

$$f_2 \approx f_{2_0} + \frac{c_p}{C_T} T_{out_0} \cdot \delta w + w_0 \frac{c_p}{C_T} \cdot \delta T_{out}$$

Substituindo ambas as equações em (10)

$$\begin{aligned} \frac{dT_{out}}{dt} &= f_{1_0} + \frac{c_p}{C_T} T_{in_0} \cdot \delta w + w_0 \frac{c_p}{C_T} \cdot \delta T_{in} - f_{2_0} - \frac{c_p}{C_T} T_{out_0} \cdot \delta w - w_0 \frac{c_p}{C_T} \cdot \delta T_{out} \\ &+ \frac{T_{amb} - T_{out}}{\tau_{arr}} + \frac{q}{C_T} \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação anterior de modo a se ter pequenas variações de todas as variáveis

$$\begin{aligned} \frac{\delta T_{out}}{\delta t} &= f_{1_0} + \frac{c_p}{C_T} T_{in_0} \cdot \delta w + w_0 \frac{c_p}{C_T} \cdot \delta T_{in} - f_{2_0} - \frac{c_p}{C_T} T_{out_0} \cdot \delta w - w_0 \frac{c_p}{C_T} \cdot \delta T_{out} \\ &+ \frac{T_{amb_0} + \delta T_{amb_0} - T_{out_0} + \delta T_{out}}{\tau_{arr}} + \frac{q_0 + \delta q}{C_T} \end{aligned}$$

Reorganizando

$$\begin{aligned} \frac{\delta T_{out}}{\delta t} &= -f_{2_0} - w_0 \frac{c_p}{C_T} \cdot \delta T_{out} + \frac{\delta T_{amb} - \delta T_{out}}{\tau_{arr}} + \frac{q_0 + \delta q}{C_T} + f_{1_0} + \frac{c_p}{C_T} (T_{in_0} - T_{out_0}) \cdot \delta w \\ &+ w_0 \frac{c_p}{C_T} \cdot \delta T_{in} \end{aligned}$$

Além disso, pode-se observar na equação (7) que, em regime permanente,

$$\begin{cases} 0 = \frac{w c_p}{C_T} (T_{in} - T_{out}) + \frac{T_{amb} - T_{out}}{\tau_{arr}} + \frac{q}{C_T} \\ 0 = \frac{p - q}{\tau_{aq}} \end{cases}$$

Donde, por manipulações algébricas, se conclui que os termos f_{1_0} e f_{2_0} são nulos e, portanto

$$\frac{\delta T_{out}}{\delta t} = \frac{c_p}{C_T} (T_{in_0} - T_{out_0}) \delta w + w_0 \frac{c_p}{C_T} \cdot (T_{in} - T_{out}) + \frac{\delta T_{amb} - \delta T_{out}}{\tau_{arr}} + \frac{\delta q}{C_T}$$

O sistema de equações linearizado em torno do ponto de funcionamento 0 que representa o funcionamento da caldeira, explicitando as dependências temporais fica então

$$\begin{cases} \frac{\delta T_{out}}{\delta t} = \frac{c_p}{C_T} (T_{in_0} - T_{out_0}) \delta w + w_0 \frac{c_p}{C_T} \cdot (T_{in} - T_{out}) + \frac{\delta T_{amb} - \delta T_{out}}{\tau_{arr}} + \frac{\delta q}{C_T} \\ p = \tau_{aq} \frac{dq}{dt} + q \end{cases}$$

Representação do modelo linearizado por funções de transferência

Para se poder obter as funções de transferência, torna-se necessário conhecer as transformadas de Laplace das funções de saída e entrada visto que

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{\text{função saída}\}}{\mathcal{L}\{\text{função entrada}\}} \Bigg|_{\substack{f_{saída}(0)=0 \\ f_{entrada}(0)=0}}$$

A aplicabilidade do conceito de função transferência limita-se a sistemas de equações diferenciais lineares invariáveis no tempo. A função de transferência de um sistema é um modelo matemático que expressa a equação diferencial no domínio de Laplace que relaciona a variável de saída com a variável de entrada.

Aplicando as transformadas de Laplace a cada membro

$$sT_{out}(s) = \frac{c_p}{C_T} (T_{in_0} - T_{out_0})W(s) + \dot{m}_0 \frac{c_p}{C_T} \cdot (T_{in}(s) - T_{out}(s)) + \frac{T_{amb}(s) - T_{out}(s)}{R_T} + \frac{Q(s)}{C_T}$$

Sabendo que

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0)$$

Como se tem um modelo variacional, i.e., que traduz as variações do sistema em torno de um ponto de funcionamento e portanto que no ponto de funcionamento são zero, o segundo termo anula-se. Assim, aplica-se em cima, e obtém-se

$$sT_{out}(s) = \frac{c_p}{C_T} (T_{in_0} - T_{out_0})W(s) + w_0 \frac{c_p}{C_T} \cdot (T_{in}(s) - T_{out}(s)) + \frac{T_{amb}(s) - T_{out}(s)}{\tau_{arr}} + \frac{Q(s)}{C_T}$$

$$T_{out}(s) = \frac{c_p}{s \cdot C_T} (T_{in_0} - T_{out_0})W(s) + w_0 \frac{c_p}{s \cdot C_T} \cdot (T_{in}(s) - T_{out}(s)) + \frac{T_{amb}(s) - T_{out}(s)}{s \cdot \tau_{arr}} + \frac{Q(s)}{s \cdot C_T}$$

Introduzindo nesta equação a que diz respeito ao fluxo de calor do elemento resistivo depois de aplicada a transformada de Laplace

$$P(s) = \tau_{aq}s \cdot Q(s) + Q(s) \Rightarrow Q(s) = \frac{P(s)}{1 + \tau_{aq}s}$$

Passa-se a ter uma única equação

$$T_{out}(s) = \frac{c_p}{s \cdot C_T} (T_{in_0} - T_{out_0})W(s) + w_0 \frac{c_p}{s \cdot C_T} \cdot (T_{in}(s) - T_{out}(s)) + \frac{T_{amb}(s) - T_{out}(s)}{s \cdot \tau_{arr}} + \frac{P(s)}{\tau_{aq}s^2C_T + sC_T}$$

Manipulando algebricamente, e lembrando o objetivo de obter uma função de transferência para cada entrada, e que seja da forma da eq. 13 começa-se por remover os denominadores de todos os termos

$$T_{out}(s) = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2} \cdot W(s) + \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2} \cdot T_{in}(s) + \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2} \cdot T_{amb}(s) + \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2} \cdot P(s) \quad (13)$$

Sendo K o ganho estacionário, ω_N a frequência natural de oscilação do processo e ξ o fator de amortecimento.

Começa-se por passar T_{out} para o o outro lado da equação

$$T_{out}(s) = \frac{c_p}{s \cdot C_T} (T_{in_0} - T_{out_0})W(s) + w_0 \frac{c_p}{s \cdot C_T} \cdot T_{in}(s) - w_0 \frac{c_p}{s \cdot C_T} \cdot T_{out}(s) + \frac{T_{amb}(s)}{s \cdot \tau_{arr}} - \frac{T_{out}(s)}{s \cdot \tau_{arr}} + \frac{P(s)}{\tau_{aq}s^2C_T + sC_T}$$

$$T_{out}(s) + w_0 \frac{c_p}{s \cdot C_T} \cdot T_{out}(s) + \frac{T_{out}(s)}{s \cdot \tau_{arr}} = \frac{c_p}{s \cdot C_T} (T_{in_0} - T_{out_0})W(s) + w_0 \frac{c_p}{s \cdot C_T} \cdot T_{in}(s) + \frac{T_{amb}(s)}{s \cdot \tau_{arr}} + \frac{P(s)}{\tau_{aq}s^2C_T + sC_T}$$

Multiplicando por sC_T para se obter T_{out} sem qualquer denominador e pondo T_{out} em evidência

$$T_{out}(s) \left(sC_T + w_0 c_p + \frac{C_T}{\tau_{arr}} \right) = c_p (T_{in_0} - T_{out_0})W(s) + w_0 c_p \cdot T_{in}(s) + \frac{C_T T_{amb}(s)}{\tau_{arr}} + \frac{P(s)}{\tau_{aq}s + 1}$$

De seguida passam-se todos os denominadores do lado direito da equação para o lado esquerdo. Primeiro τ_{arr}

$$\begin{aligned}
T_{out}(s) & \left(\tau_{arr} s C_T + \tau_{arr} w_0 c_p + \frac{\tau_{arr} C_T}{\tau_{arr}} \right) \\
& = \tau_{arr} c_p (T_{in_0} - T_{out_0}) W(s) + \tau_{arr} w_0 c_p \cdot T_{in}(s) + C_T T_{amb}(s) + \frac{\tau_{arr} P(s)}{\tau_{aq} s + 1}
\end{aligned}$$

E depois $\tau_{aq} + 1$

$$\begin{aligned}
T_{out}(s) & (\tau_{aq} s + 1) \left(\tau_{arr} s C_T + \tau_{arr} w_0 c_p + \frac{\tau_{arr} C_T}{\tau_{arr}} \right) \\
& = (\tau_{aq} s + 1) \tau_{arr} c_p (T_{in_0} - T_{out_0}) W(s) + (\tau_{aq} s + 1) \tau_{arr} w_0 c_p \cdot T_{in}(s) \\
& + (\tau_{aq} s + 1) C_T T_{amb}(s) + \tau_{arr} P(s)
\end{aligned}$$

Depois aplica-se a propriedade distributiva entre os 2º e 3º membros do lado esquerdo da equação

$$\begin{aligned}
T_{out}(s) & (\tau_{aq} \tau_{arr} s^2 C_T + \tau_{arr} s C_T + \tau_{aq} s \tau_{arr} w_0 + \tau_{arr} w_0 c_p + C_T + \tau_{aq} s C_T) \\
& = (\tau_{aq} s + 1) \tau_{arr} c_p (T_{in_0} - T_{out_0}) W(s) + (\tau_{aq} s + 1) \tau_{arr} w_0 c_p \cdot T_{in}(s) \\
& + (\tau_{aq} s + 1) C_T T_{amb}(s) + \tau_{arr} P(s)
\end{aligned}$$

Observando a eq. (13), e sabendo que o termo a multiplicar por T_{out} irá passar a denominador do lado direito da eq., põe-se "s" em evidência

$$\begin{aligned}
T_{out}(s) & (\tau_{aq} \tau_{arr} s^2 C_T + s(\tau_{arr} C_T + \tau_{aq} C_T + \tau_{aq} \tau_{arr} w_0) + \tau_{arr} w_0 c_p + C_T) \\
& = (\tau_{aq} s + 1) \tau_{arr} c_p (T_{in_0} - T_{out_0}) W(s) + (\tau_{aq} s + 1) \tau_{arr} w_0 c_p \cdot T_{in}(s) \\
& + (\tau_{aq} s + 1) C_T T_{amb}(s) + \tau_{arr} P(s)
\end{aligned}$$

Passa-se então esse termo para denominador, deixando apenas T_{out} do lado esquerdo

$$T_{out}(s) =$$

$$\frac{(\tau_{aq} s + 1) \tau_{arr} c_p (T_{in_0} - T_{out_0}) W(s) + (\tau_{aq} s + 1) \tau_{arr} w_0 c_p \cdot T_{in}(s) + (\tau_{aq} s + 1) C_T T_{amb}(s) + \tau_{arr} P(s)}{(\tau_{aq} \tau_{arr} C_T) \cdot s^2 + (\tau_{arr} C_T + \tau_{aq} C_T + \tau_{aq} \tau_{arr} w_0) \cdot s + \tau_{arr} w_0 c_p + C_T}$$

Para se poder obter o termo s^2 por si só, multiplica-se numerador e denominador

$$\text{por } \frac{1}{\tau_{aq} \tau_{arr} C_T}$$

$$T_{out}(s) =$$

$$\frac{[(\tau_{aq} s + 1) \tau_{arr} c_p (T_{in_0} - T_{out_0}) W(s) + (\tau_{aq} s + 1) \tau_{arr} w_0 c_p \cdot T_{in}(s) + (\tau_{aq} s + 1) C_T T_{amb}(s) + \tau_{arr} P(s)] \frac{1}{\tau_{aq} \tau_{arr} C_T}}{s^2 + \frac{\tau_{arr} C_T + \tau_{aq} C_T + \tau_{aq} \tau_{arr} w_0}{\tau_{aq} \tau_{arr} C_T} \cdot s + \frac{\tau_{arr} w_0 c_p + C_T}{\tau_{aq} \tau_{arr} C_T}}$$

Separando as funções de transferência para cada variável de entrada obtém-se finalmente

$$\begin{aligned}
T_{out}(s) = & \frac{(\tau_{aq}s + 1)c_p(T_{in_0} - T_{out_0})}{\tau_{aq}C_T} \\
& \frac{1}{s^2 + \frac{\tau_{arr}C_T + \tau_{aq}C_T + \tau_{aq}\tau_{arr}W_0}{\tau_{aq}\tau_{arr}C_T} \cdot s + \frac{\tau_{arr}W_0c_p + C_T}{\tau_{aq}\tau_{arr}C_T}} W(s) \\
& + \frac{(\tau_{aq}s + 1)W_0c_p}{\tau_{aq}C_T} \\
& \frac{1}{s^2 + \frac{\tau_{arr}C_T + \tau_{aq}C_T + \tau_{aq}\tau_{arr}W_0}{\tau_{aq}\tau_{arr}C_T} \cdot s + \frac{\tau_{arr}W_0c_p + C_T}{\tau_{aq}\tau_{arr}C_T}} T_{in}(s) \\
& + \frac{\tau_{aq}s + 1}{\tau_{aq}\tau_{arr}} \\
& \frac{1}{s^2 + \frac{\tau_{arr}C_T + \tau_{aq}C_T + \tau_{aq}\tau_{arr}W_0}{\tau_{aq}\tau_{arr}C_T} \cdot s + \frac{\tau_{arr}W_0c_p + C_T}{\tau_{aq}\tau_{arr}C_T}} T_{amb}(s) \\
& + \frac{1}{\tau_{aq}C_T} \\
& \frac{1}{s^2 + \frac{\tau_{arr}C_T + \tau_{aq}C_T + \tau_{aq}\tau_{arr}W_0}{\tau_{aq}\tau_{arr}C_T} \cdot s + \frac{\tau_{arr}W_0c_p + C_T}{\tau_{aq}\tau_{arr}C_T}} P(s)
\end{aligned}$$

Representação dos modelos em diagramas de blocos

Um sistema de controlo geralmente consiste em vários componentes com funções relacionadas com as equações que descrevem o sistema, o que o torna bastante difícil de ser analisado. Para facilitar a sua compreensão e explicitar mais claramente as funções desempenhadas pelos componentes e o fluxo de sinais, a engenharia de controlo utiliza um diagrama denominado “Diagrama de Blocos”.

Deste modo, os componentes de um sistema são representados por blocos e são integrados por meio de linhas que indicam os sentidos de fluxos de sinais entre os blocos. Estes diagramas são assim utilizados para representar as relações de dependência entre as variáveis que interessam à cadeia do controlo.

Diagrama de blocos do modelo não linearizado

O sistema de equações diferenciais **não linearizado** que descrevem o sistema da caldeira é

$$\begin{cases} \frac{dT_{out}}{dt} = \frac{wc_p}{C_T} (T_{in} - T_{out}) + \frac{T_{amb} - T_{out}}{\tau_{arr} C_T} + \frac{q}{C_T} \\ \frac{dq}{dt} = \frac{p - q}{\tau_{aq}} \end{cases}$$

A partir dele obteve-se o diagrama de blocos seguinte:

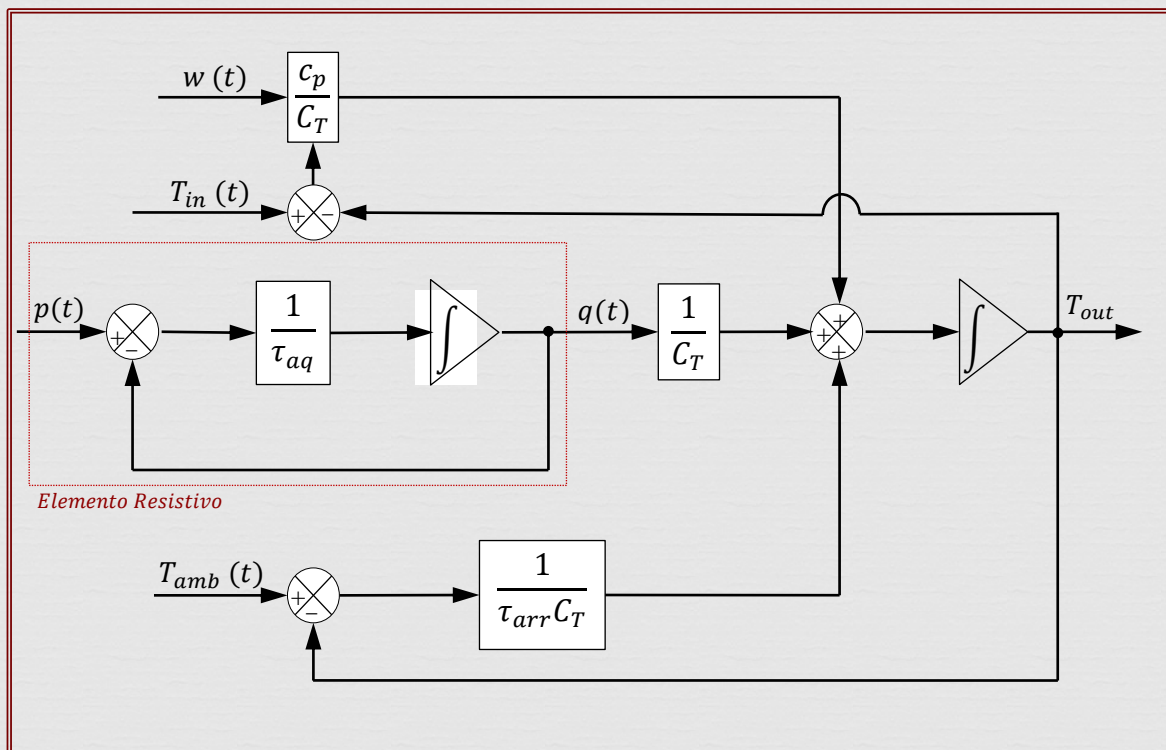
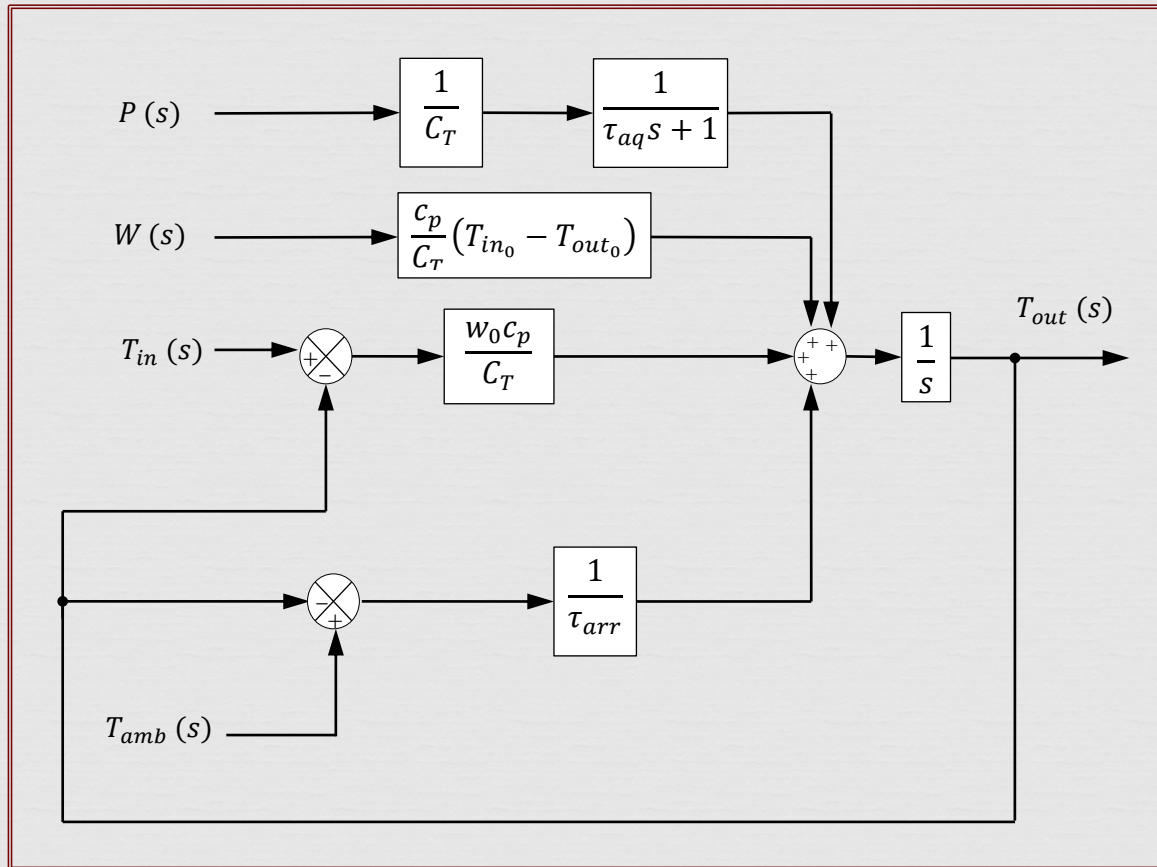
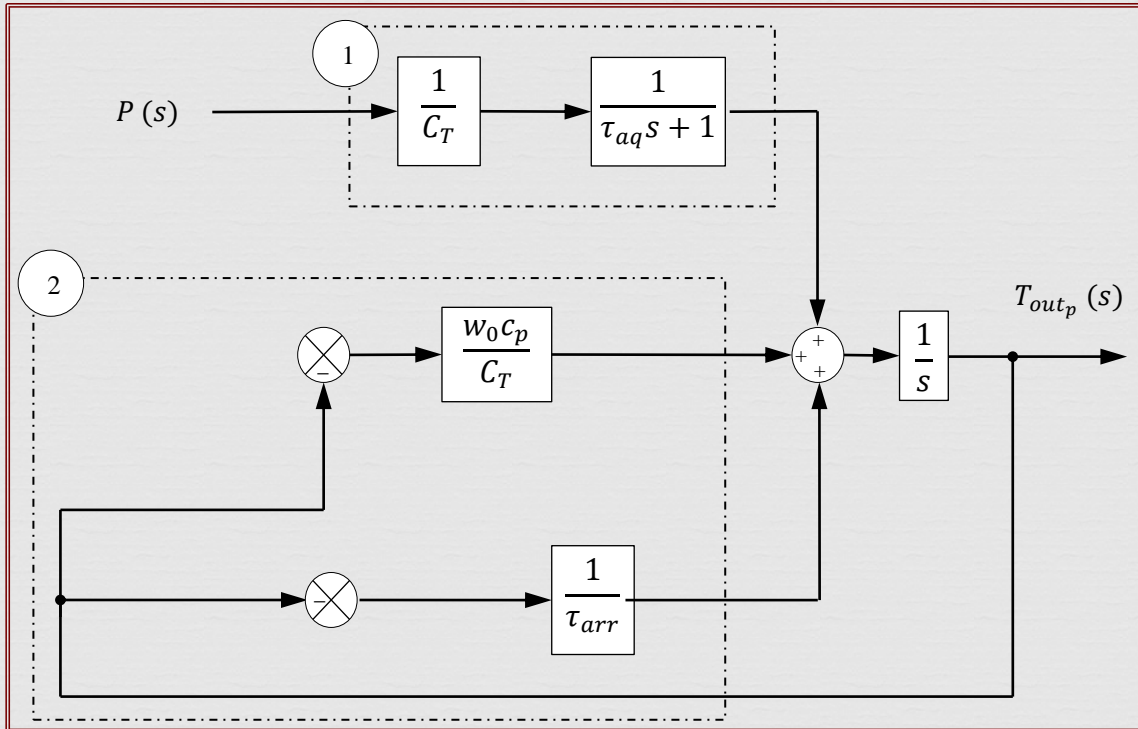
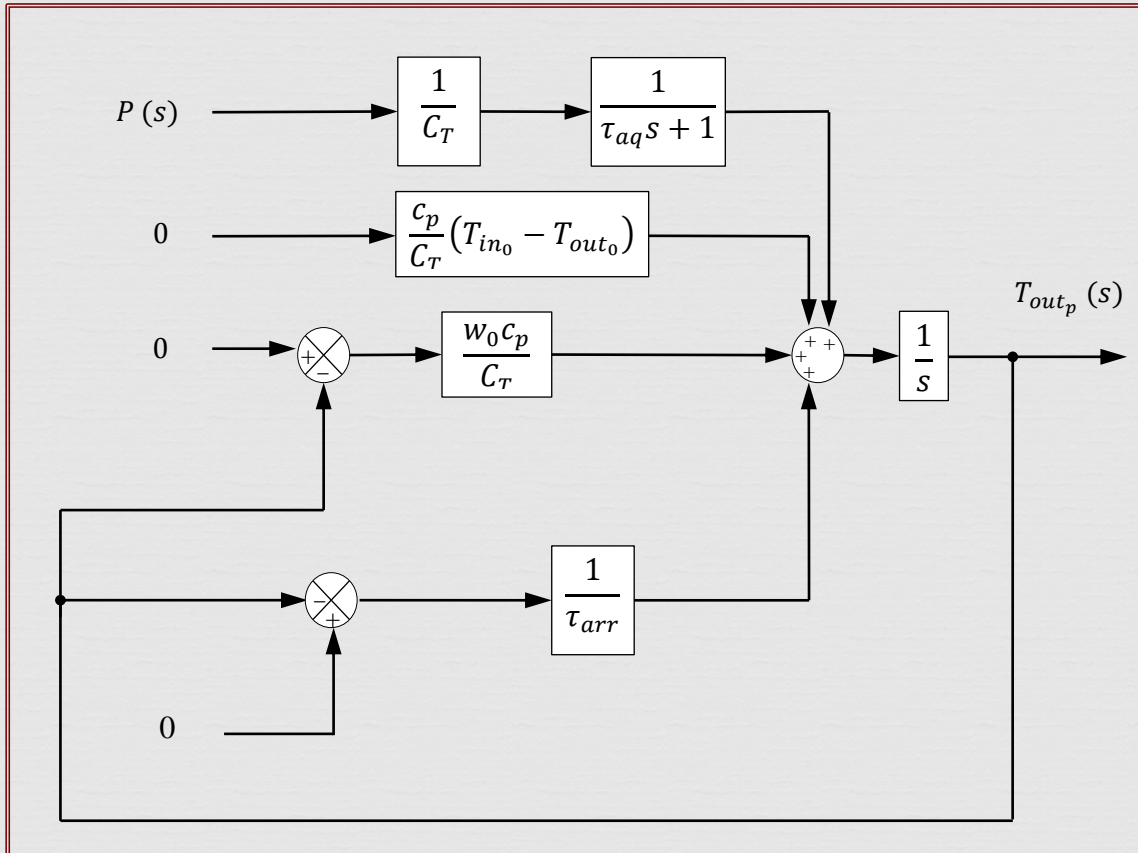


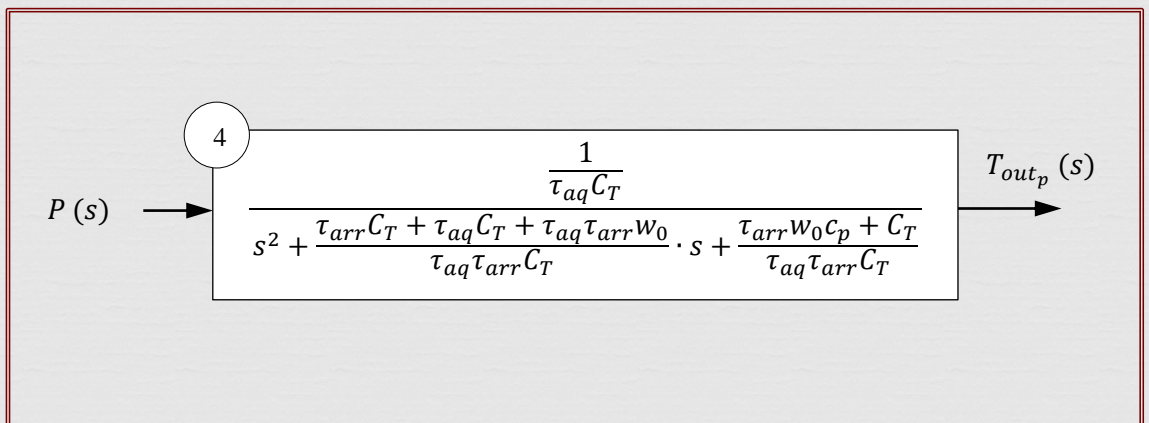
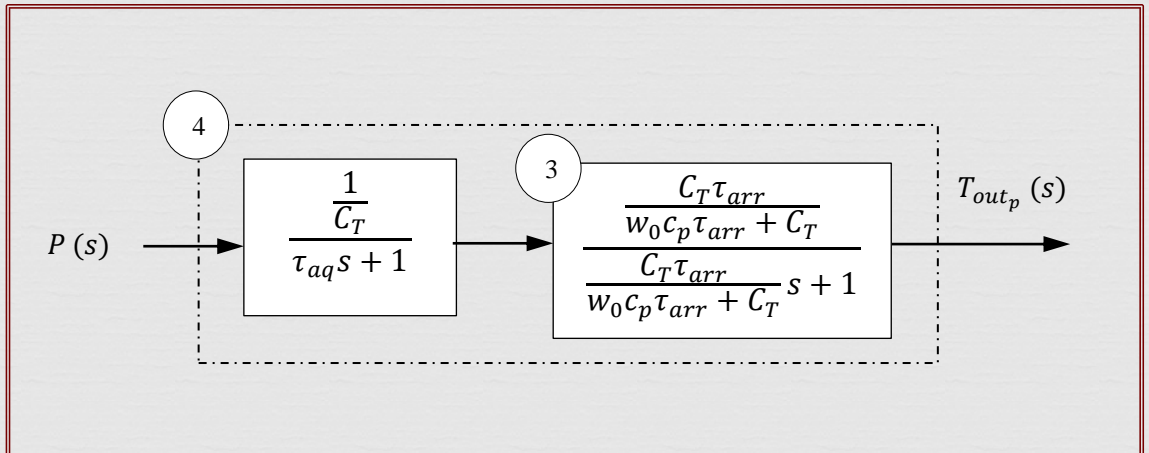
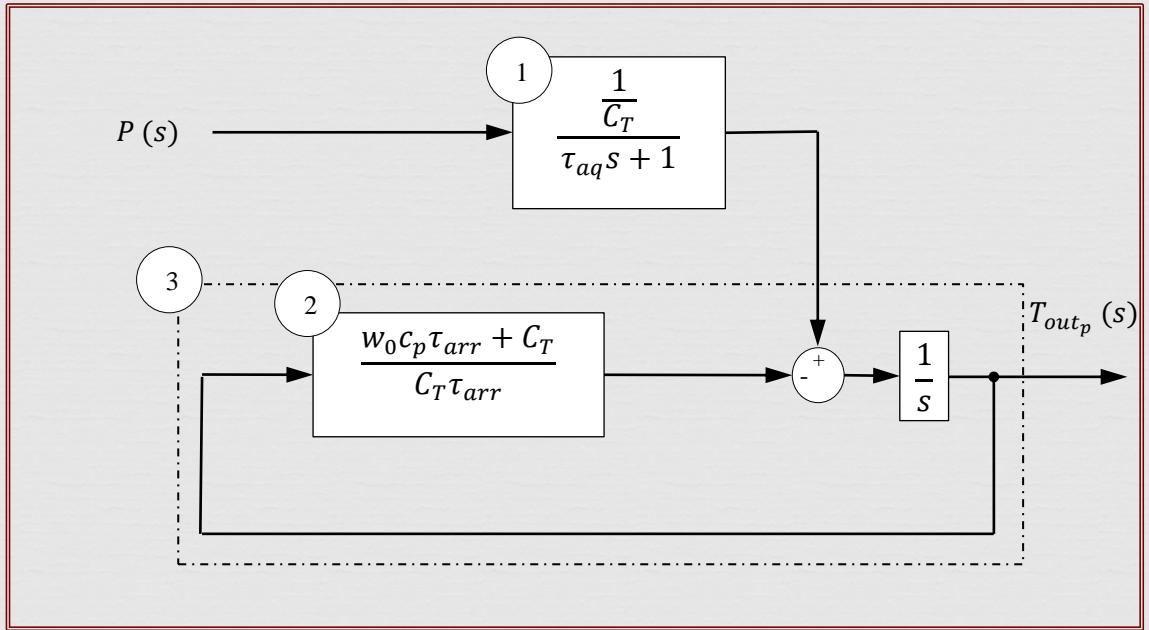
Diagrama de blocos do modelo linearizado

Relativamente ao modelo linearizado, o seu diagrama de blocos é:



Por simplificações a este diagrama de simulação, é possível, pelo princípio da sobreposição, chegar às funções de transferência para cada variável de entrada. A simplificação consegue-se considerando que todas as entradas são iguais a zero exceto aquela a que se pretende conhecer a resposta. Numa tentativa de confirmar as funções de transferência obtidas analiticamente aplicou-se o procedimento apenas a $P(s)$. As regras usadas para a simplificação do diagrama encontram-se descritas no anexo B.





Implementação no Matlab®

A simulação do comportamento do sistema será obtida pela introdução dos modelos obtidos anteriormente, neste software. O plano será

- Implementar no Matlab os dois modelos, sem controlador, e verificar o impacto da alteração das variáveis de entrada;
- Para os dois modelos, adicionar um controlador proporcional e verificar para diferentes valores de ganho como varia o tempo de resposta e o erro associado.
- Fazer análise relativa ao ganho ótimo, sobre-elongação, instabilidade, tempo de acomodação
- Avaliar o comportamento do modelo para diferentes valores das variáveis de entrada;
- Estudar o impacto da introdução de uma ação de controlo integral (controlador PI), de modo a avaliar a influência desta ação.

Sem controlador

Neste sistema, a ação de controlo é independente da saída. Quer isto dizer, o valor de T_{out} à saída não irá influenciar em nada a potência em uso. Esse valor será definido no início da simulação e assim o permanecerá, algo que se poderá verificar nos gráficos para ambos os modelos. Trata-se, pois, de um sistema de malha aberta, controlado manualmente.

Modelo não linearizado

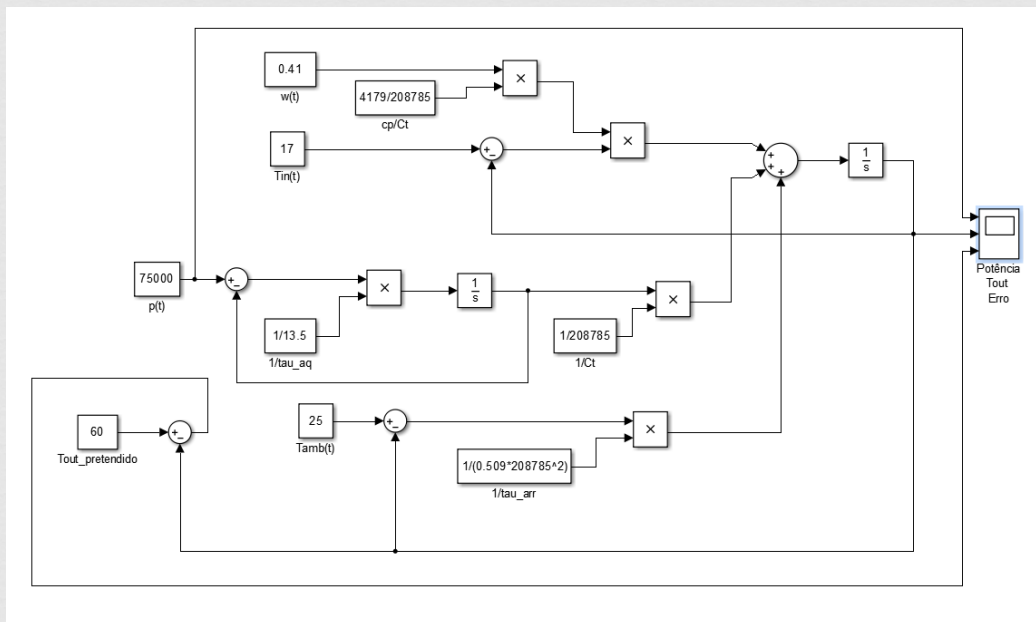
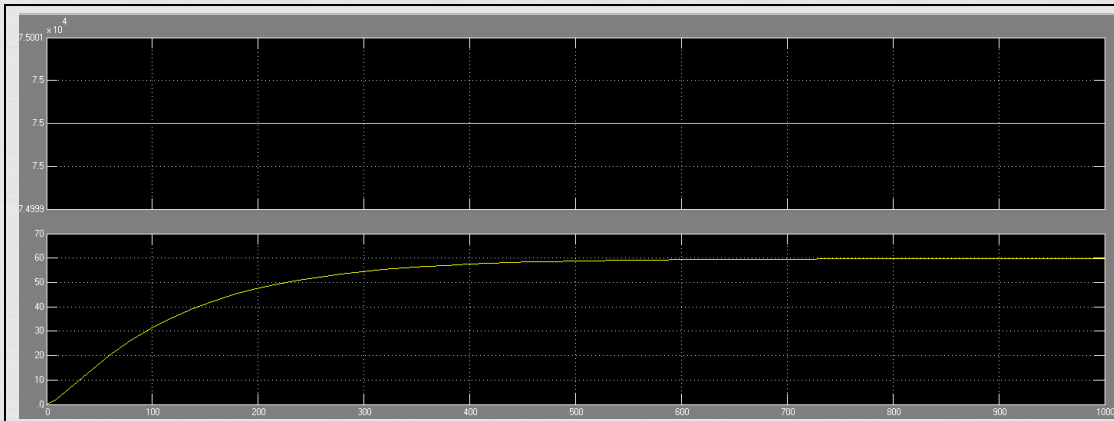
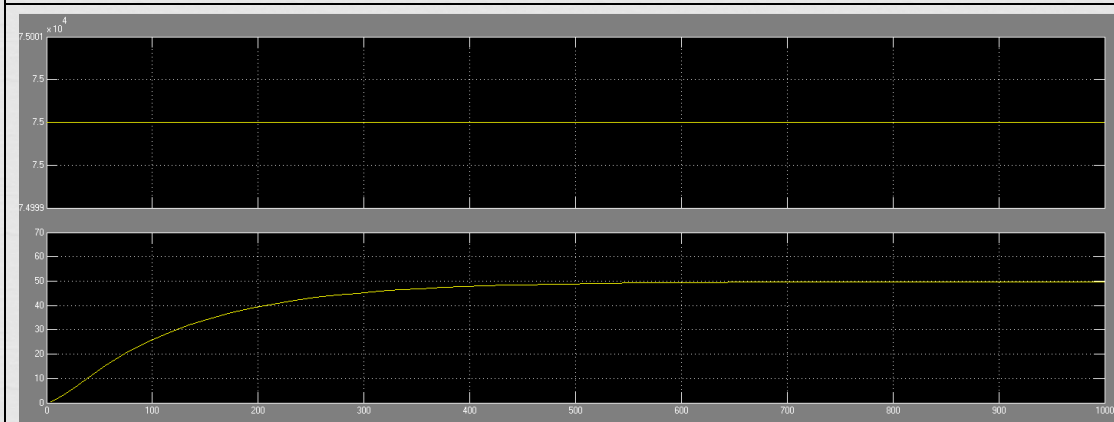


Figura 16 - Diagrama do modelo não linearizado sem controlador implementado no Matlab. Representadas as condições para caudal máximo.

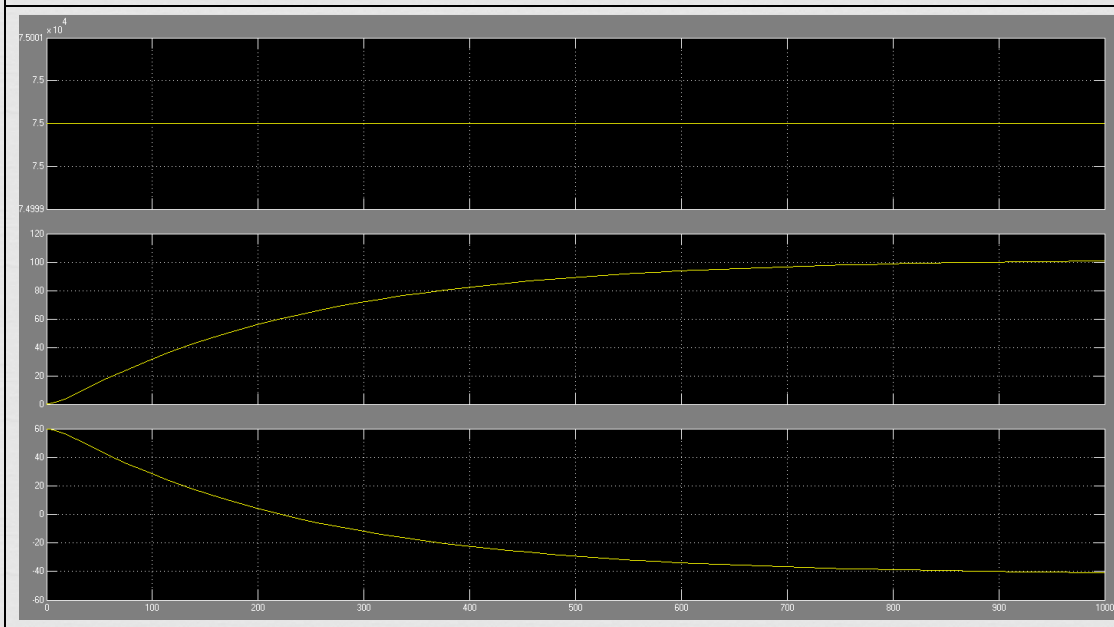
De seguida apresentam-se os resultados obtidos das diversas simulações.



P	75k W
w	0.42 kg/s
T_{in}	17 °C
T_{amb}	25 °C



P	75 kW
w	0.42 kg/s
T_{in}	7 °C
T_{amb}	25 °C



P	75 kW
w	0.21 kg/s
T_{in}	17 °C
T_{amb}	25 °C

Para a primeira simulação verifica-se o aumento da temperatura até aos 60°C de acordo com o previsto analiticamente pelas leis termodinâmicas. Note-se que o

caudal máximo foi calculado exatamente nas condições que permitem a sua maximização, isto é, todas as temperaturas envolvidas são as máximas.

Seguidamente diminuiu-se a temperatura de entrada para o mínimo admissível nas condições de projeto, 7°C. Constatou-se, como era de esperar, que baixando a temperatura de entrada não é possível atingir a temperatura desejada na saída para o caudal máximo, mesmo fornecendo a potência máxima.

Na terceira simulação diminuiu-se o caudal para metade do caudal máximo. Sendo o caudal menor e não se controlando a potência fornecida, verificou-se que a temperatura desejada era ultrapassada atingindo-se a temperatura de ebulição da água e colocando em risco a integridade da caldeira.

Percebe-se assim que sem controlador é impossível garantir a temperatura desejada à saída sem ter que controlar a potência manualmente. O sistema não se adapta às perturbações introduzidas, isto é, qualquer desvio em relação às condições de determinação do caudal máximo feitas analiticamente traduz-se numa resposta diferente do sistema e que, se implementado num sistema real, pode mesmo colocar em perigo o operador.

Modelo linearizado

O modelo implementado no Matlab é o da figura em baixo. Os valores a introduzir para as variáveis de entrada são valores variacionais relativos ao ponto de funcionamento. Por exemplo, introduzir na entrada um $\Delta w = -0.10 \text{ kg/s}$ significa que o caudal a passar pela caldeira é de

$$w_0 - 0.10 = \frac{0.417}{2} - 0.11 \text{ kg/s}$$

Por este motivo torna-se necessário introduzir sempre a variação de alguma variável de entrada para se poder observar alguma variação de T_{out} .

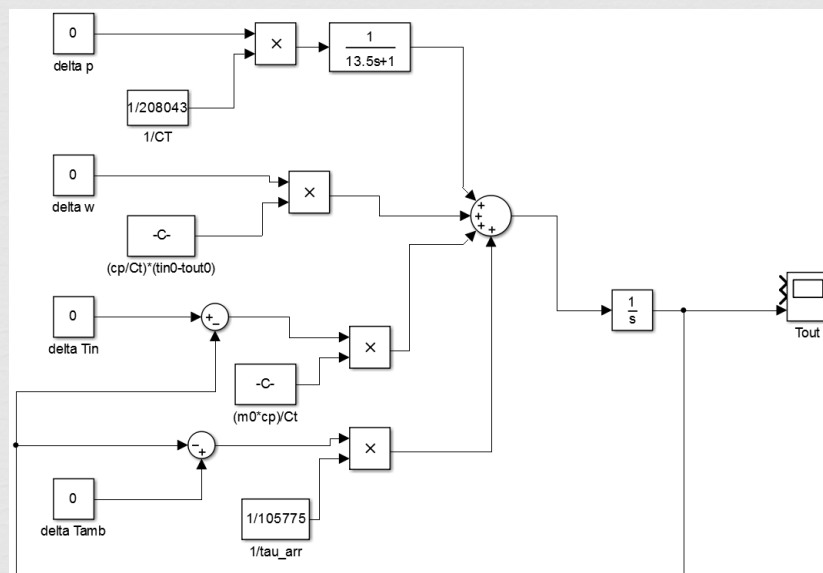
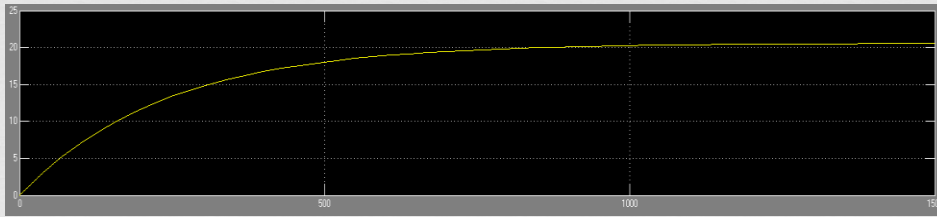
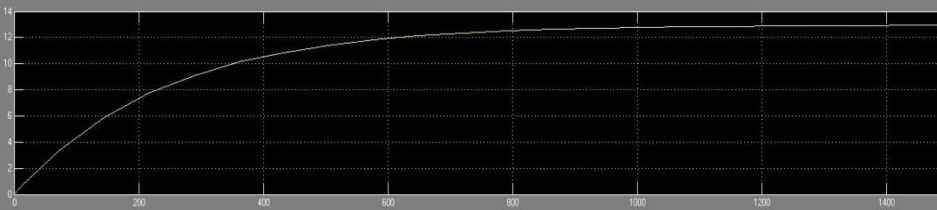


Figura 17 – Modelo linearizado sem controlador.



ΔP	0 kW
Δw	-0.1 kg/s
ΔT_{in}	0 °C
ΔT_{amb}	0 °C



ΔP	0 kW
Δw	0 kg/s
ΔT_{in}	+13 °C
ΔT_{amb}	0 °C

Para uma diminuição de caudal verifica-se, mantendo todas as outras entradas fixas, um aumento da temperatura de saída. Esta situação é de esperar uma vez que a massa de água demora mais tempo desde que entra até que sai e portanto mais energia térmica lhe é transferida.

Para um aumento da temperatura de entrada da água na caldeira sem controlador verifica-se que à saída, esse aumento é gradual. Com efeito, só cerca de 10 minutos depois de água ser enviada para a caldeira 13°C mais quente, é que à saída esse aumento se verifica na totalidade.

Esse aumento gradual deve-se à transferência de calor da água mais quente a entrar para a água dentro da caldeira com capacidade térmica $C_T = 208043 \text{ J/}^\circ\text{C}$.

Após análise de ambos os modelos sem controlador, conclui-se que não é uma solução viável visto que o ajuste da potência é deixado ao cargo do operador que deve recalcular e ajustar a potência a ser fornecida ao sistema sempre que alguma outra variável de entrada se altere.

Com controlador proporcional

Adicionando um controlador proporcional ao modelo, o controle da potência deixará de ser manual e passará a ser automático. Assim, deixa-se agora de ter uma entrada com um valor fixo de potência, imposto manualmente antes da simulação, e passam-se a ter valores variáveis, obtidos de acordo com o controlador adicionado e o erro em relação à temperatura de saída da água pretendida.

A adição de um controlador proporcional irá produzir uma ação de controle proporcional ao erro de temperatura verificado.

$$P = K_p \cdot e(t) = K_p \cdot (T_{out\ pretendido} - T_{out\ atual}(t))$$

Assim, a potência térmica será tanto maior quanto maior for o erro de temperatura. No entanto, se o erro de temperatura se anular o controlador deixa de fornecer calor à água e esta não aquece. É essa a razão pela qual o erro de temperatura nunca atingirá zero mas sim um valor que assegure algum fluxo de calor. Esse valor poderá ser tanto mais próximo do valor pretendido quanto maior for o ganho do controlador. Isto significa, então, que aumentar o ganho proporcional deverá aumentar a precisão do sistema – diminui o erro permanente – sendo, contudo, de esperar uma diminuição da sua estabilidade.^[1]

Modelo não linearizado

Em baixo e na página seguinte apresentam-se o mesmo diagrama de blocos do modelo não linearizado, mas agora com controlador proporcional e as simulações efetuadas.

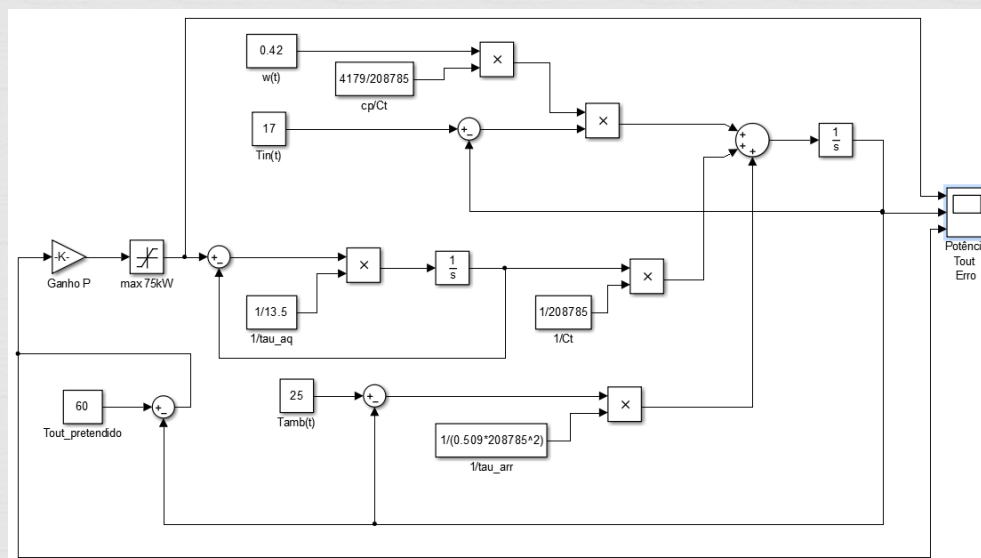
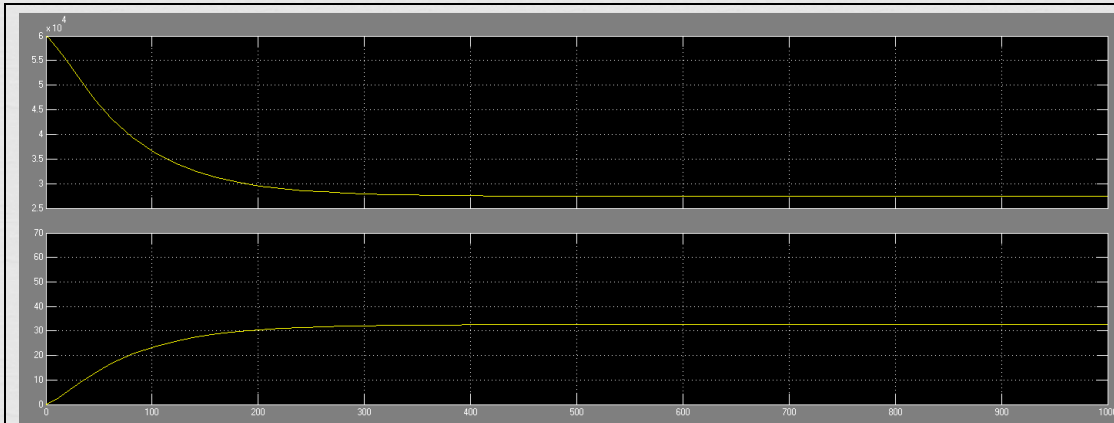
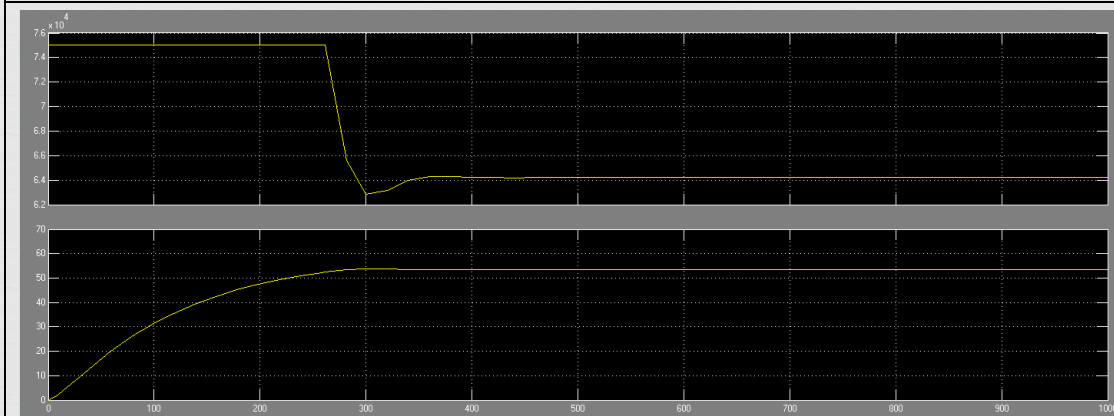


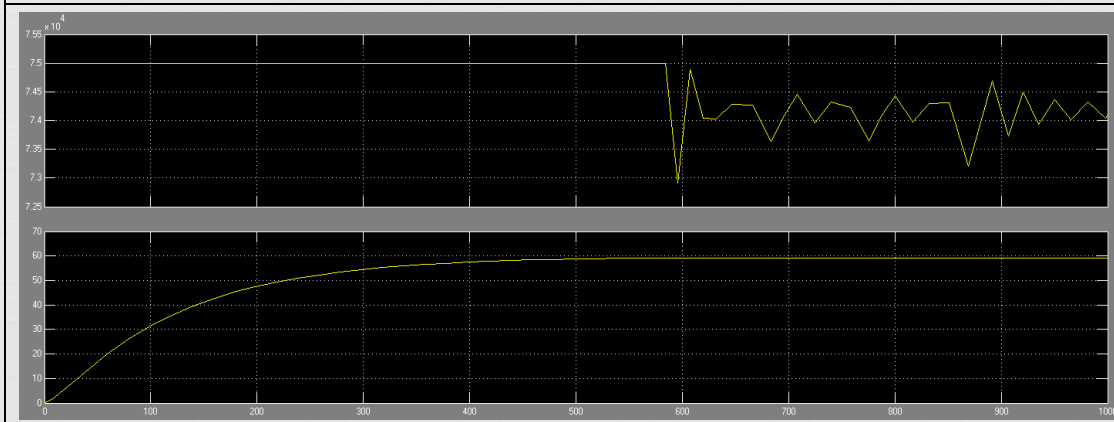
Figura 18 - Modelo não linearizado com controlador proporcional e limite de potência a 75kW.



K_p	$1k \frac{W}{^\circ C}$
w	0.42 kg/s
T_{in}	$17 \text{ }^\circ C$
T_{amb}	$25 \text{ }^\circ C$



K_p	$10k \frac{W}{^\circ C}$
w	0.42 kg/s
T_{in}	$17 \text{ }^\circ C$
T_{amb}	$25 \text{ }^\circ C$



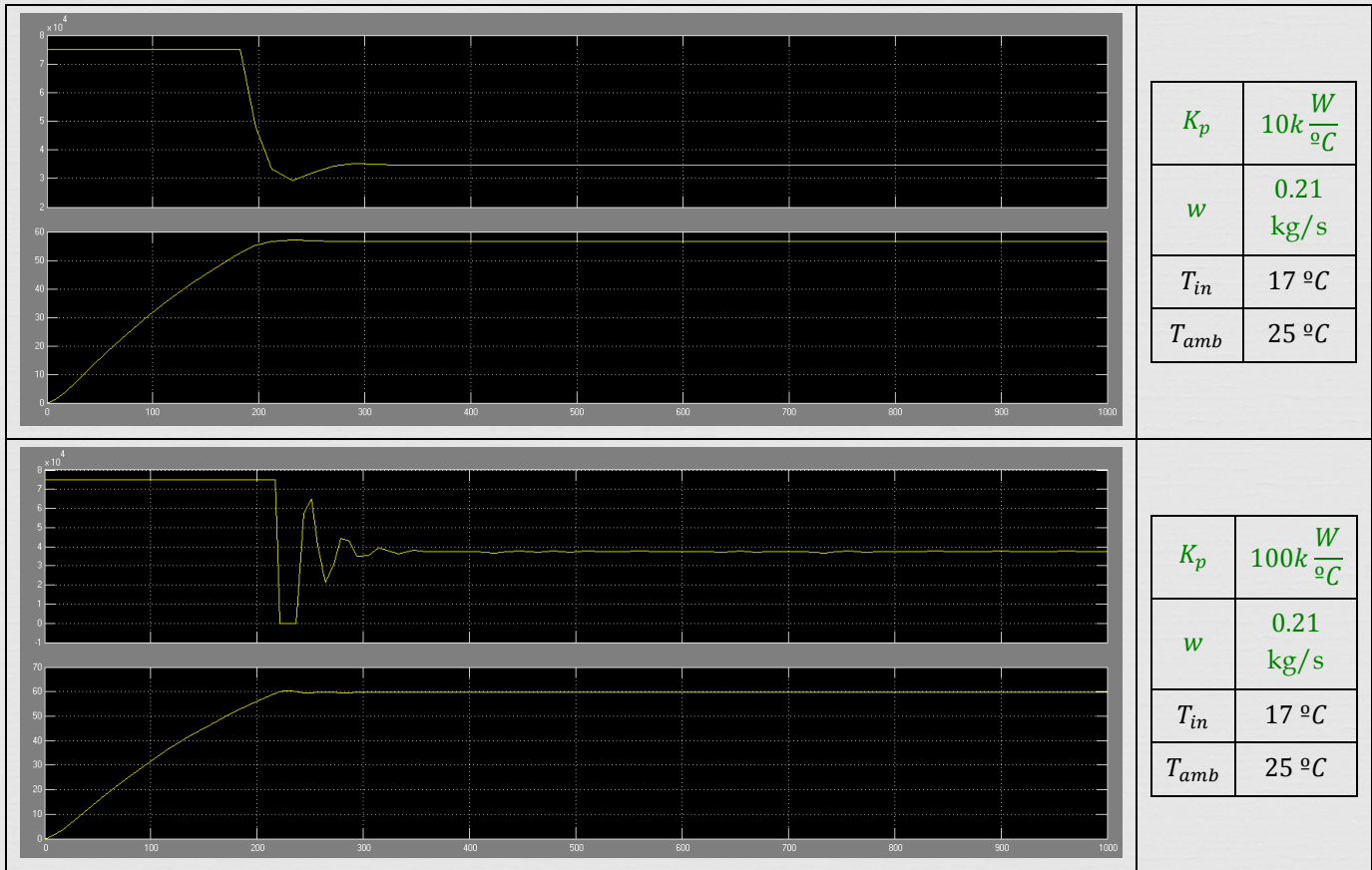
K_p	$100k \frac{W}{^\circ C}$
w	0.42 kg/s
T_{in}	$17 \text{ }^\circ C$
T_{amb}	$25 \text{ }^\circ C$

Tendo em conta os pontos referidos introdutoriamente, experimentaram-se vários valores de K_p sucessivamente maiores.

Como seria de esperar, para o menor valor de ganho, $1 \text{ kW/}^\circ C$, não se conseguiu atingir a temperatura desejada. O sistema diminuiu a potência mesmo sem atingir a temperatura desejada e encontrou um ponto de equilíbrio para o regime permanente que se encontra muito longe do pretendido.

Para o valor de ganho 10 vezes superior o erro em regime permanente passa a cerca de $7^\circ C$ abaixo da temperatura desejada. Note-se que há uma quebra de potência quando a temperatura é próxima da desejada.

Para o valor de ganho superior o erro praticamente se anula, o que é ótimo, mas trazendo a consequência indesejada da instabilidade do sistema. A determinação do ganho ótimo resultaria em estabelecer um compromisso entre estabilidade e erro, e encontrar um valor de ganho que satisfizesse essas exigências.



Nas duas últimas simulações, e comparando com a simulação para o mesmo caudal mas sem controlador, pode-se observar o correto funcionamento do controlador ao reduzir a potência para compensar a redução de caudal, de modo a manter a temperatura da água na saída a 60°C. De notar que o aumento do ganho diminuiu ligeiramente o erro de regime permanente tendo no entanto aumentado a instabilidade, sem nenhuma redução visível no tempo de acomodação.

Modelo linearizado

Para se poder estudar a influência do valor do ganho optou-se por impor uma variação do caudal – poderia ter sido outra variável de entrada – para se observar a resposta do sistema, sob a forma do ajuste de potência. Como o ponto de funcionamento em uso é para um caudal metade do máximo, então terá de ser calculada a potência necessária para esse caudal, que será a potência correspondente ao ponto de funcionamento. Aplicando a equação já demonstrada para o cálculo do caudal máximo, entra-se com as condições respetivas ao ponto de funcionamento.

$$P - \frac{T_{interior} - T_{amb}}{R_{eq}} = w c_p (T_{out} - T_{in}) \quad (1)$$

$P = ? \text{ kW}$	$\bar{T}_{interior} = \frac{17 + 60}{2} = 38.5$	$T_{in} = 17^\circ\text{C}$	$T_{out} = 60^\circ\text{C}$
$T_{amb} = 25^\circ\text{C}$	$c_p(\text{H}_2\text{O}; 38.5^\circ\text{C}) = 4179 \text{ J/kgK}$	$R_{eq} = 0,50942$	$\frac{w_{m\acute{a}x}}{2} = \frac{0,41722}{2} \text{ kg/s}$

$$P = 37513 \approx \frac{P_{m\acute{a}x}}{2}$$

Assim, no modelo será necessário limitar a variao de potência entre $P \in$

$$\left[-\frac{P_{m\acute{a}x}}{2}, \frac{P_{m\acute{a}x}}{2} \right].$$

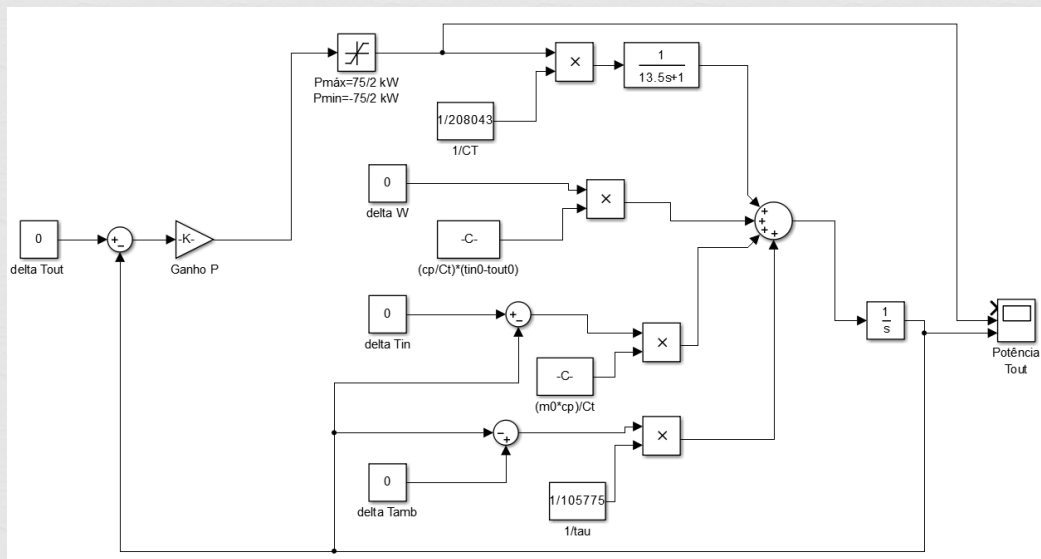
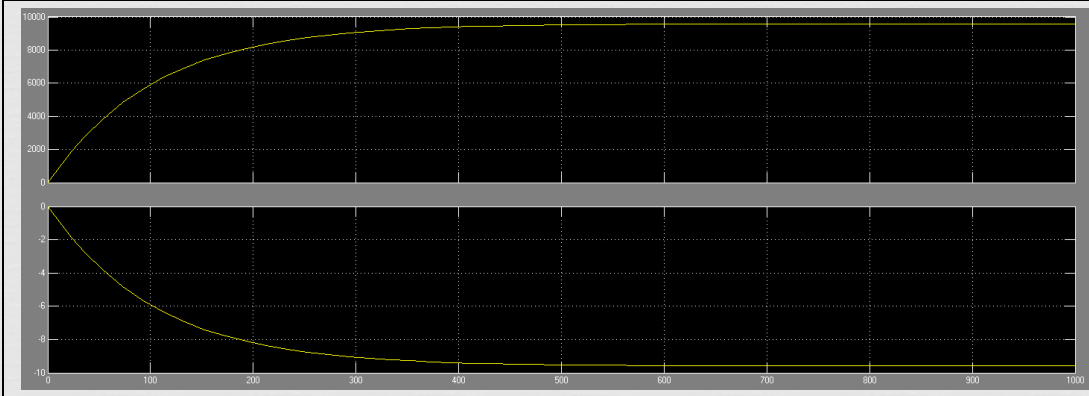
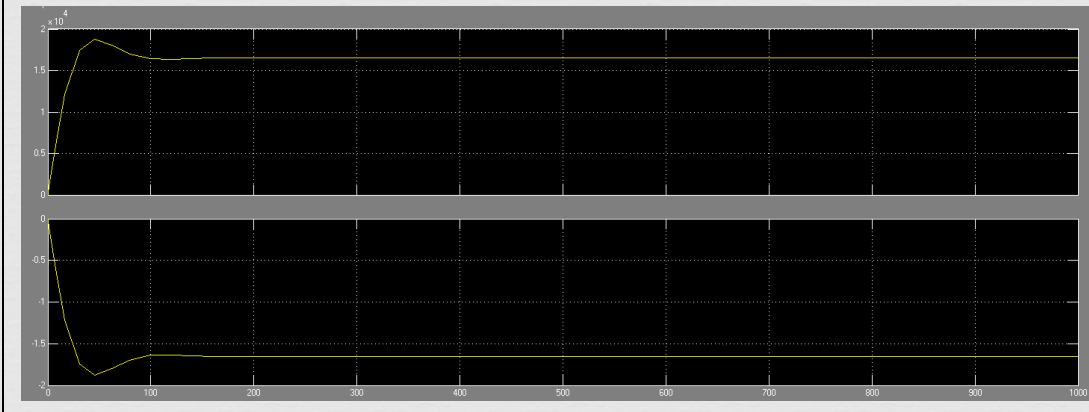


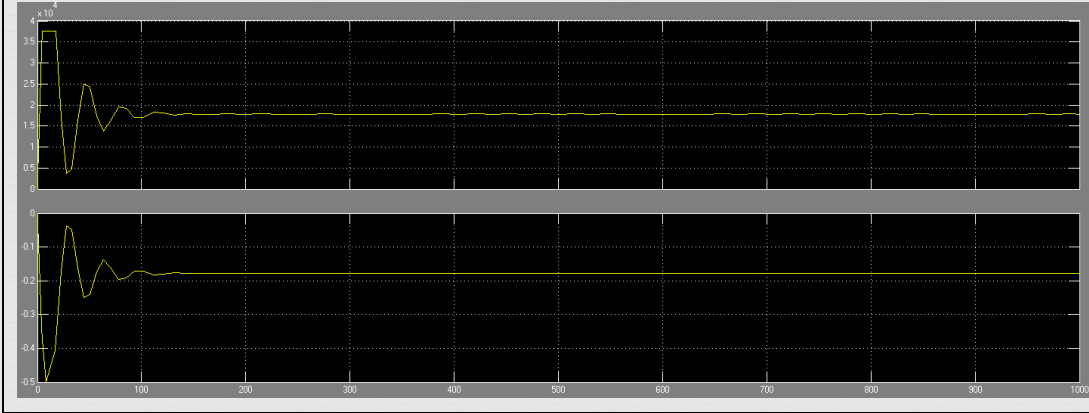
Figura 19 - Diagrama do modelo linearizado com controlador proporcional e limitador da variao da potência a $\pm \frac{75}{2} \text{ kW}$.



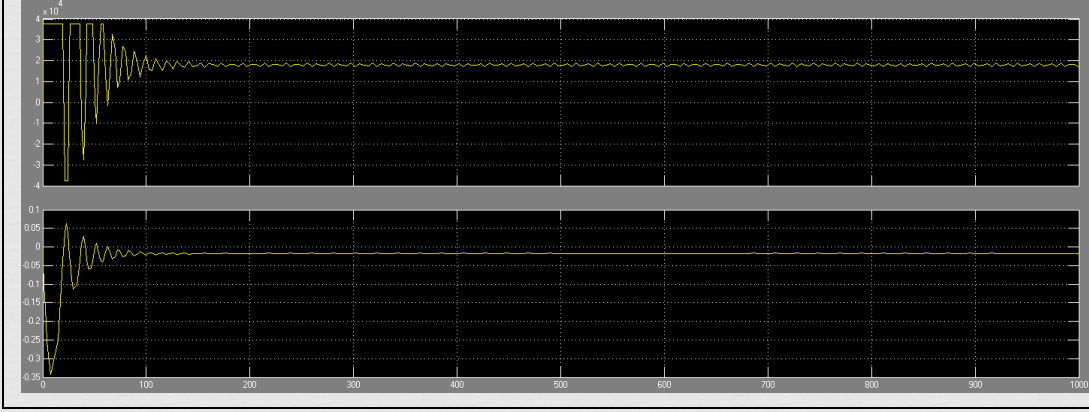
K_p	$1k \frac{W}{^\circ C}$
Δw	+0.1 kg/s
ΔT_{in}	0 °C
ΔT_{amb}	0 °C
Erro	-10 °C



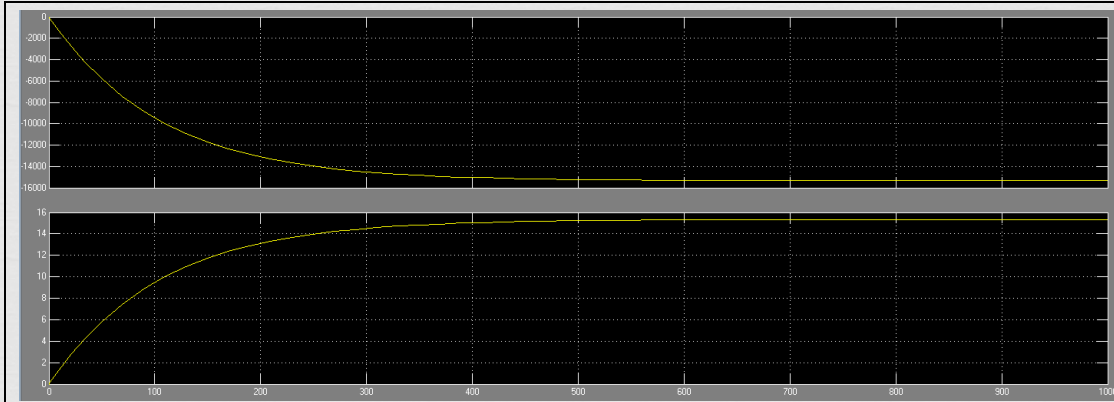
K_p	$10k \frac{W}{^\circ C}$
Δw	+0.1 kg/s
ΔT_{in}	0 °C
ΔT_{amb}	0 °C
Erro	-1.6 °C



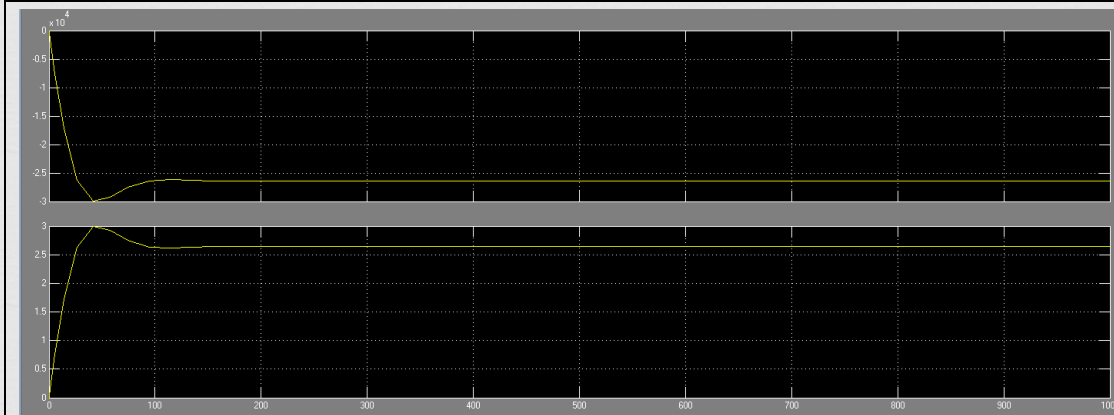
K_p	$100k \frac{W}{^\circ C}$
Δw	+0.1 kg/s
ΔT_{in}	0 °C
ΔT_{amb}	0 °C
Erro	-0.18 °C



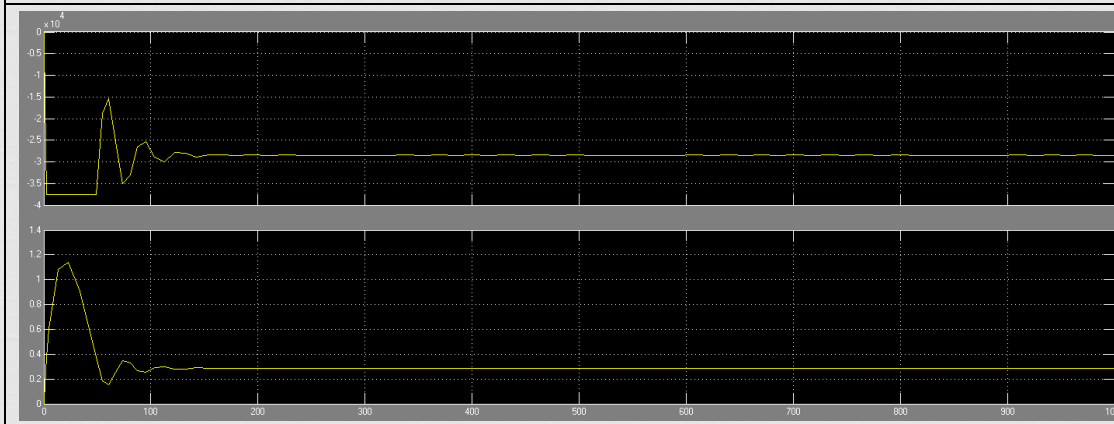
K_p	$1M \frac{W}{^\circ C}$
Δw	+0.1 kg/s
ΔT_{in}	0 °C
ΔT_{amb}	0 °C
Erro	-0.025 °C



K_p	$1k \frac{W}{^\circ C}$
Δw	0 kg/s
ΔT_{in}	+33 °C
ΔT_{amb}	0 °C
Erro	+15 °C



K_p	$10k \frac{W}{^\circ C}$
Δw	0 kg/s
ΔT_{in}	+33 °C
ΔT_{amb}	0 °C
Erro	+2.6°C



K_p	$100k \frac{W}{^\circ C}$
Δw	0 kg/s
ΔT_{in}	+33 °C
ΔT_{amb}	0 °C
Erro	+0.3°C

Relativamente ao aumento do ganho, em ambos os casos, traduz-se

- redução do erro em regime permanente,

$$e_{ss} = T_{out \text{ pretendido}} - T_{out \text{ r. permanente}}$$
- aumento da instabilidade do sistema sob a forma de
 - aumento da frequência de oscilação;
 - aumento do tempo de acomodação;
 - aumento da sobre-elongação.
- Efetivamente para valores de ganho elevados, o sistema nunca chega a estabilizar.

O aumento do caudal foi respondido pelo controlador por um aumento da potência fornecida. Na verdade, para um caudal de $\frac{0.4172}{2} + 0.1 \text{ kg/s}$, substituído na equação (1) resulta numa potência necessária de 55.4kW, ou seja, um aumento de 18kW. relativamente ao ponto de funcionamento. Observando o gráfico parece ser esse o valor da potência do qual o controlador se procurou aproximar.

Em relação ao aumento de T_{in} para 50°C, substituindo na equação (1) com $c_p = 4181 \text{ J/kgK}$ e $\bar{T}_{interior} = \frac{60+50}{2} = 55^\circ\text{C}$ resulta numa potência necessária de 8.83kW o que significa uma variação de potência de -28.7 kW . Mais uma vez o valor de regime permanente da potência observado no gráfico parece ser correto.

Com controlador proporcional e integral

Um dos inconvenientes verificados do uso único do controlador proporcional foi a existência de uma diferença permanente entre a temperatura de saída pretendida e a verificada. Foi possível diminuir esse erro mas à custa de estabilidade do sistema.

A adição de um controlador integral ao sistema irá corrigir o 1º problema. A ação integral vai atuar no processo ao longo do tempo enquanto existir diferença entre o valor desejado e o valor medido.

$$P = K_p \cdot e(t) + K_i \int e(t) dt$$

Com efeito, o sinal de correção é integrado no tempo. Enquanto a ação proporcional atua de forma instantânea quando acontece um distúrbio em degrau, a ação integral vai atuar de forma lenta até eliminar por completo o erro.

Como inconvenientes, pode aumentar a sobre-elongação, na resposta ao degrau, do sistema controlado e tende a diminuir a sua estabilidade.

Modelo não linearizado

Em baixo apresenta-se o modelo implementado e algumas das simulações corridas no Matlab.

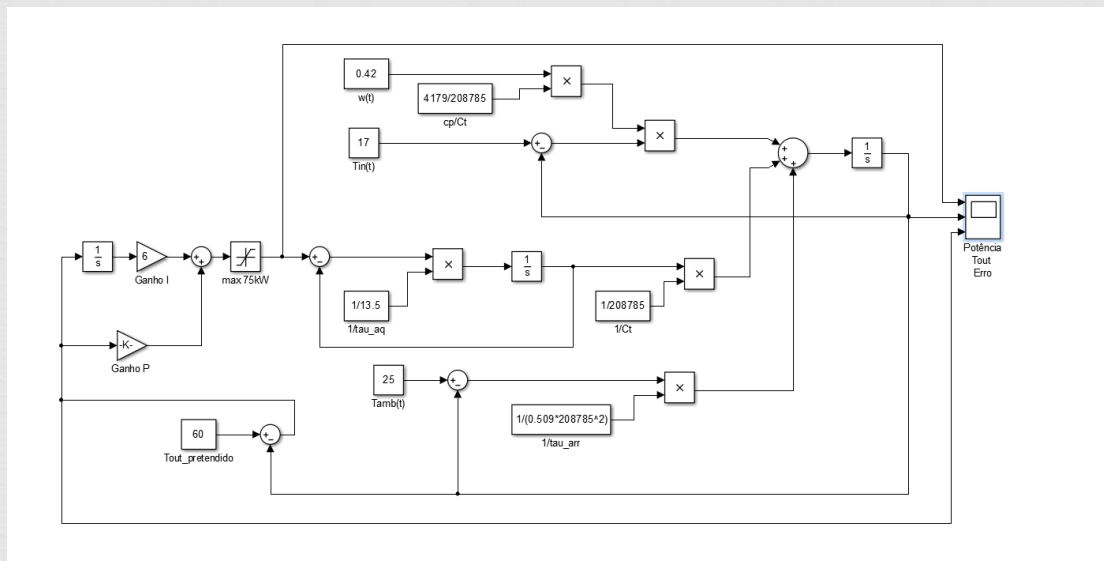
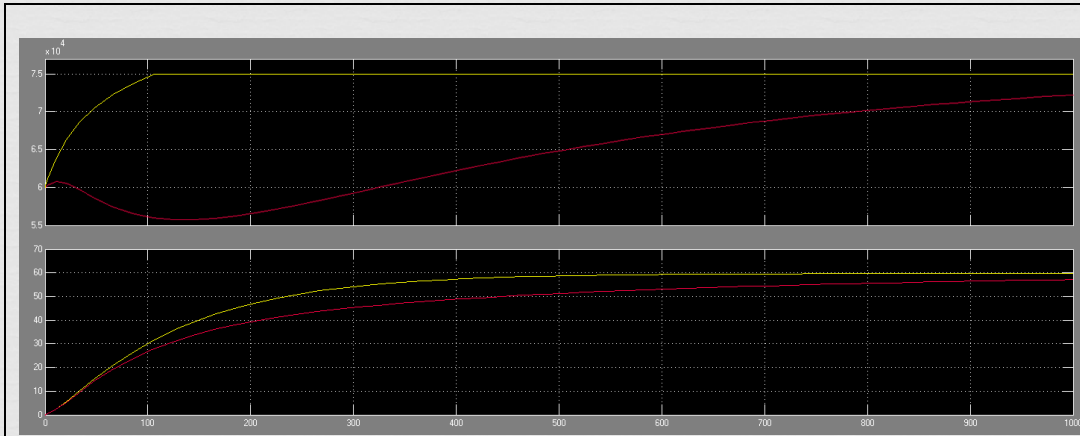
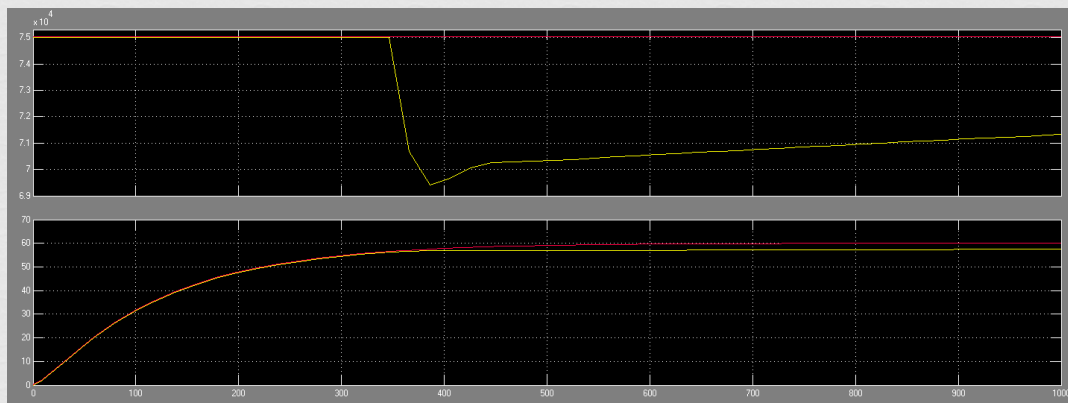


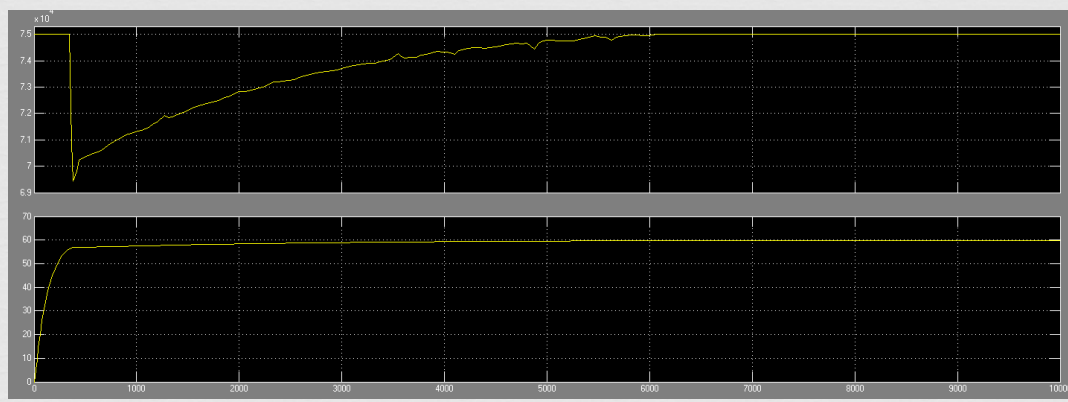
Figura 20 - Diagrama do modelo não linearizado com controlador proporcional e integral e limitador da potência a 75kW.



K_i	5 e 10
K_p	$1k \frac{W}{^\circ C}$
w	0.42 kg/s
T_{in}	$^\circ C$
T_{amb}	$25 \text{ }^\circ C$
Erro (t=1ks)	$-2^\circ C$ $0^\circ C$



K_i	5 e 10
K_p	$10k \frac{W}{^\circ C}$
w	0.42 kg/s
T_{in}	$^\circ C$
T_{amb}	$25 \text{ }^\circ C$
Erro (t=1ks)	$-2^\circ C$ $0^\circ C$



K_i	5
K_p	$10k \frac{W}{^\circ C}$
w	0.42 kg/s
T_{in}	$^\circ C$
T_{amb}	$25 \text{ }^\circ C$
Erro (t=10ks)	$0^\circ C$

Na 1ª e na 2ª simulação pode-se observar a influência do aumento do ganho integral que reduz o tempo de acomodação.

Entre as 2ª e 3ª simulações pode-se observar o efeito do controlador integral na sua totalidade, ao diminuir completamente o erro deixado pelo controlador proporcional, ao fim de um período de tempo de 10 000s.

Para os valores de ganho utilizados não se observou grandes variações da estabilidade do sistema, exceto na 3ª simulação que apresentou oscilações até ao tempo de acomodação.

Modelo linearizado

Seguem-se o modelo implementado no Matlab e algumas das simulações efetuadas.

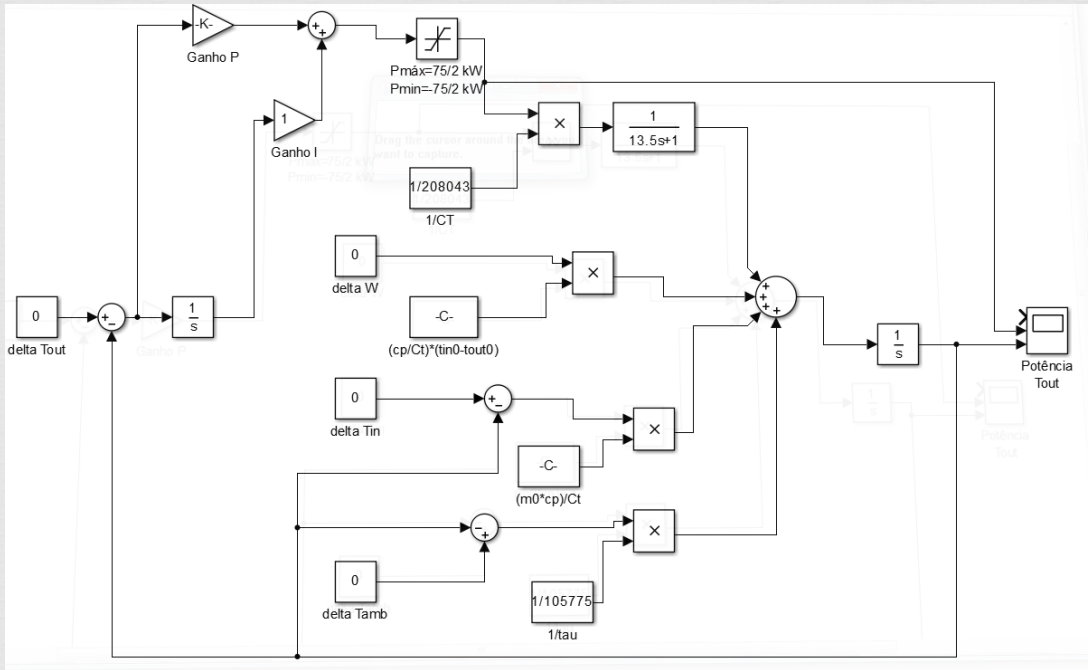
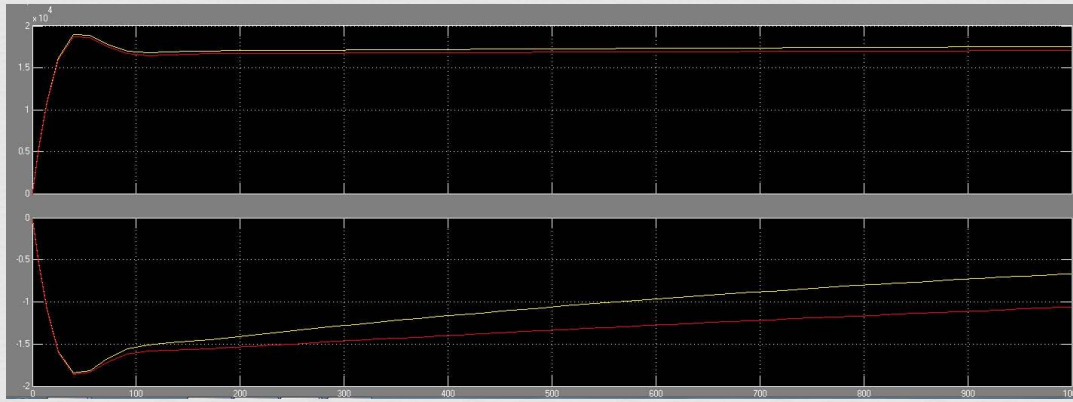
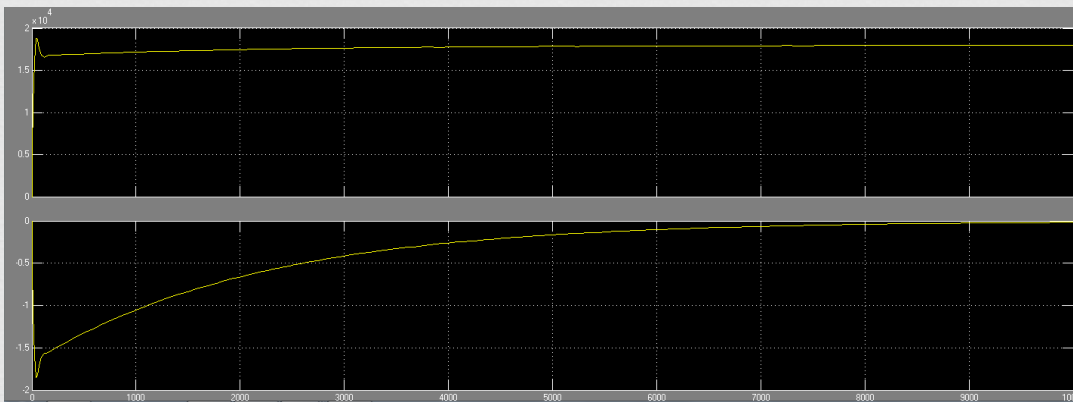


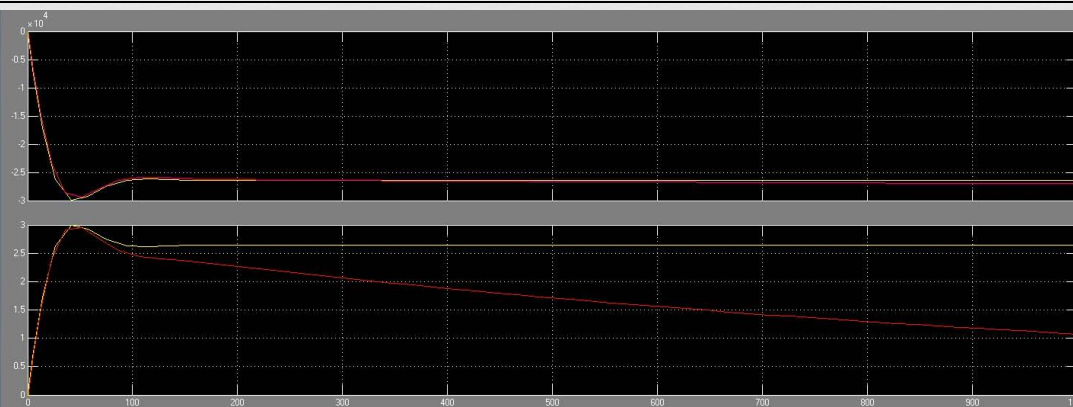
Figura 21 - Diagrama do modelo linearizado com controlador proporcional e integral e limitador da variação da potência a $\pm \frac{75}{2} kW$.



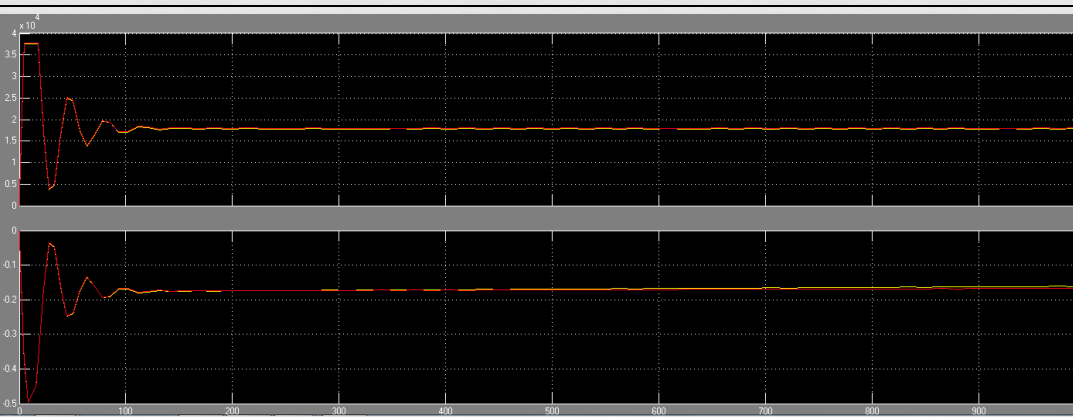
K_i	5 e 10
K_p	$10k \frac{W}{^\circ C}$
Δw	0.1 kg/s
ΔT_{in}	0 °C
ΔT_{amb}	0 °C
Erro (t=1ks)	-1°C



K_i	5
K_p	$10k \frac{W}{^\circ C}$
Δw	0.1 kg/s
ΔT_{in}	0 °C
ΔT_{amb}	0 °C
Erro (t=10ks)	0°C



K_i	5
K_p	$10k \frac{W}{^\circ C}$
Δw	0 kg/s
ΔT_{in}	+33 °C
ΔT_{amb}	0 °C
Erro	+2.6 e 1 °C



K_i	5 e 10
K_p	$100k \frac{W}{^\circ C}$
Δw	+0.1 kg/s
ΔT_{in}	0 °C
ΔT_{amb}	0 °C
Erro	-0.18 e - 0.18 °C

A adição do controlador integral veio mais uma vez agir sobre o erro permanente, anulando-o, algo observado na totalidade para a 2ª simulação, que tem um período de tempo superior. Portanto, com a adição do controlador integral verificou-se um aumento da precisão do sistema.

Tal como com o modelo não linearizado, com o aumento do ganho integral verifica-se uma redução do tempo de acomodação, observado pelo anulamento mais veloz do erro. Essa diferença é observada significativamente com o aumento de T_{in} para 50°C mas muito ligeiramente para o aumento de caudal para 0.3kg/s. Estas simulações revelam que o processo se caracteriza por ter constante de tempo grande (mudanças lentas).

A associação P+I torna-se ineficiente e uma terceira ação faz-se necessário para acelerar a correção. A esta ação dá-se o nome de ação derivativa, mas não será estudada neste trabalho.

Conclusões

Durante o curso deste trabalho calculou-se o caudal máximo que a caldeira pode aquecer. Como não eram conhecidas as propriedades do isolamento da caldeira nem as características térmicas do elemento de aquecimento, calcularam-se as constantes de tempo para ambos.

Determinaram-se as equações diferenciais que descrevem o sistema, tendo-se observado que uma delas deveria ser linearizada, o que foi feito, em torno de um ponto de funcionamento para temperaturas máximas e metade do caudal máximo. A partir da equação obtida obtiveram-se as funções transferência para cada variável de entrada tanto por meio analítico como por simplificação do diagrama de blocos desenhado para o modelo linearizado.

De seguida passou-se à fase da simulação, que foi feita com recurso a um software comercial, e onde se implementaram os diagramas de blocos desenhados para ambos os modelos, não linear e linear. Para cada um deles, estudou-se o efeito da variação de algumas variáveis de entrada, bem como o impacto da adição de um controlador proporcional e mais tarde de um integral.

Verificou-se que a adição do controlador proporcional permitia um controlo da caldeira deficiente, sendo que para valores baixos do ganho decorria um erro permanente, e para valores altos instabilidade do sistema.

A adição do controlador integral veio corrigir o erro permanente, se bem que apenas após um largo período de tempo, pelo que uma terceira ação de controlo seria necessária.

Bibliografia

- [1] Almeida, Fernando Gomes de (2013). "Apontamentos MIEM - Sistemas de Controlo" [Apresentações powerpoint].
- [2] Ogata, Katsuhiko (2010). "Engenharia de Controle Moderno" 5ª Edição. Prentice Hall.
- [3] "Apontamentos de Sistemas de Controlo" (2010). Escola Superior Náutica Infante D. Henrique, DEM. Disponível em
[http://www.enautica.pt/publico/professores/jemilio/pdf/RECICLAGEM/Modulo4-Sist_Controlo.pdf]
- [4] Neto, Evandro de Figueiredo, Cardoso, Robson Santos, et. all. (1999) "Fundamentos de Controle de Processo". Disponível em
[<http://sistemas.eel.usp.br/docentes/arquivos/5817066/157/Controle.pdf>]
- [5] Sodré, Ulysses (2003). "Transformadas de Laplace". [Material de aulas]
- [6] Kodama, Takeshi. "Expansão em série de Taylor de uma Função" [Material de aulas]

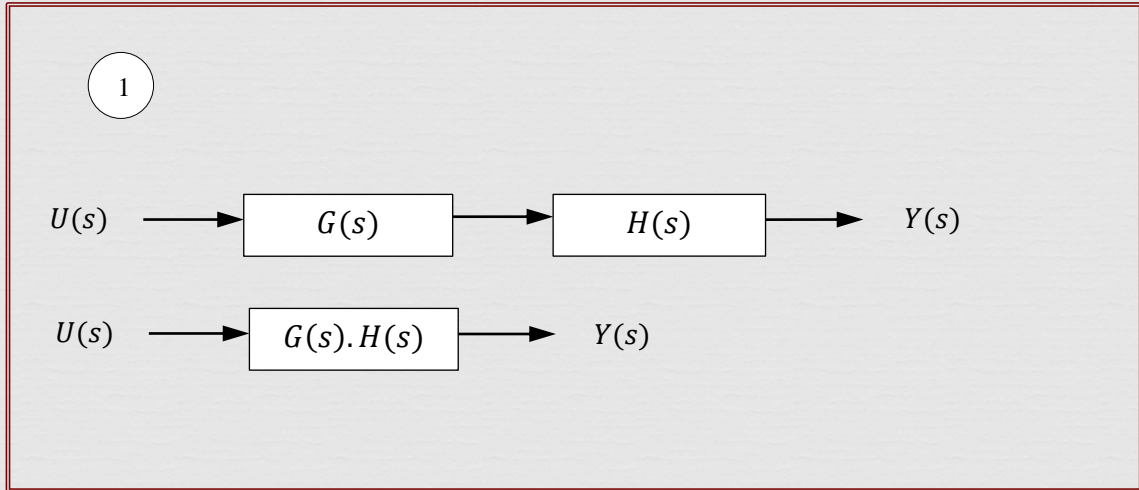
Anexos

Anexo A

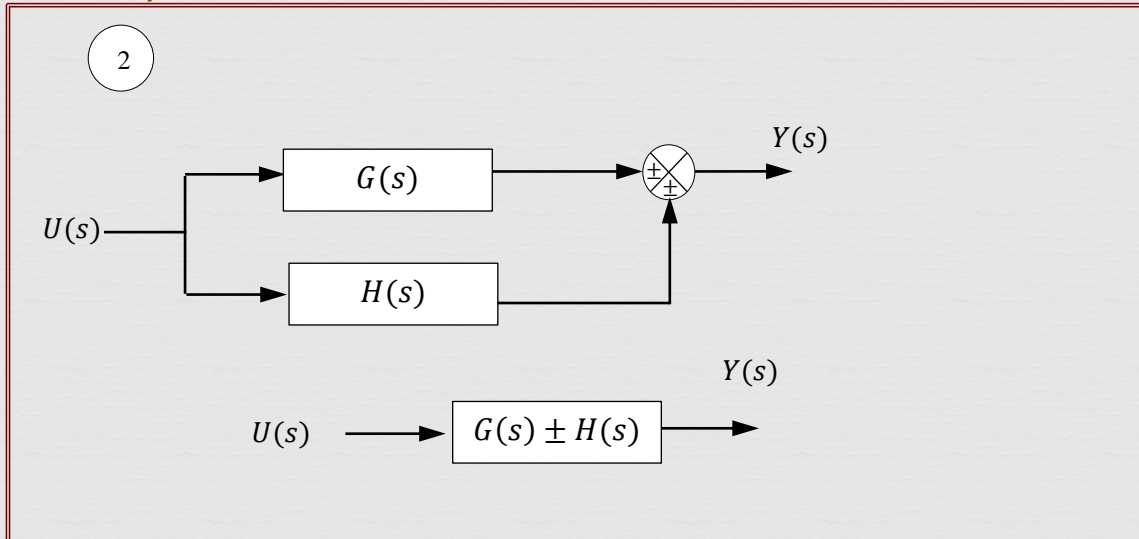
Propriedades Físicas da Água									
T (°C)	P (atm)	ρ (kg/m ³)	c_p (KJ/KgK)	λ (W/mK)	$\mu \times 10^6$ (N.s/m ²)	$\nu \times 10^6$ (m ² /s)	$\beta \times 10^3$ (K ⁻¹)	Pr	q_{lv} (KJ/Kg)
0	1,00	999,8	4,218	0,552	1790,5	1,792	-0,070	13,67	2501
10	1,00	999,7	4,192	0,578	1306,3	1,304	0,088	9,47	2477
20	1,00	998,2	4,182	0,598	1001,6	1,004	0,207	7,01	2454
30	1,00	995,65	4,179	0,614	796,7	0,801	0,303	5,43	2430
40	1,00	992,2	4,179	0,628	651,7	0,658	0,385	4,34	2406
50	1,00	988,0	4,181	0,641	545,9	0,553	0,457	3,56	2382
60	1,00	983,2	4,184	0,651	465,5	0,474	0,523	2,99	2358
70	1,00	977,8	4,190	0,661	403,8	0,413	0,585	2,56	2333
80	1,00	971,8	4,197	0,669	354,8	0,365	0,643	2,23	2308
90	1,00	965,3	4,205	0,676	314,6	0,326	0,698	1,96	2283
100	1,03	958,4	4,216	0,682	277,3	0,295	0,752	1,75	2257
120	2,02	943,1	4,246	0,685	234,2	0,249	0,860	1,45	2203
140	3,68	928,1	4,287	0,684	198,9	0,215	0,975	1,25	2145
160	6,30	907,4	4,342	0,682	171,5	0,189	1,098	1,09	2083
180	10,23	886,8	4,409	0,678	150,4	0,170	1,233	0,98	2015
200	15,86	864,7	4,497	0,665	136,4	0,158	1,392	0,92	1941

Anexo B

Blocos em série



Blocos em paralelo



Ramo de Feedback

