Resolver eq. dif. $\overset{movimento}{m\ddot{x}} + c\dot{x} + kx = f(t) \Rightarrow x(t) = \cdots f(t)$ 2ª ordem

1

deslocamento inicial $x(0) = x_0$ $\xleftarrow{\text{geral/ são}}$ 2 cond. fronteira

velocidade inicial $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

No equilíbrio estático $v = 0 \Rightarrow$ amortecedor não está a fazer força

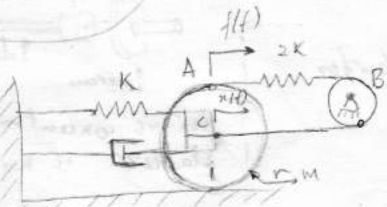
$\underbrace{\quad}_{\text{momento resistente provocado pelo amortecedor}} + \underbrace{\quad}_{\text{momento resistente provocado pela mola}} = \underbrace{M(t)}_{\text{Momento motor}}$

Como $\cos\theta$ e $\sin\theta$ a eq. acima deixa de ser linear ⇓ linearizar ⟸ exp. em série Taylor ⟸ em eng. $\theta \ll 1$ $\sin\theta \simeq \theta$

AULA TP 1

11/FEV/2014

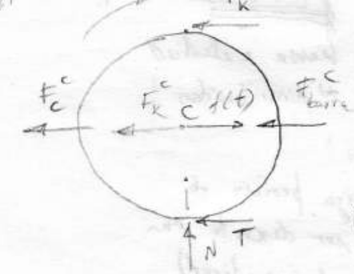
Exame 2013-09-20



roda s/ escorregar ⇒ existe força tangencial

? o sentido que damos às forças não pode ser 1 só?

[1] Desenhar DCL
[1.1] arbitrar sentido positivo
[1.2] aplicar desloc. nesse sentido
[1.3] desenhar



Em Mec3 geral/ representamos as forças inércia ($\dot{Q}$ e K_c) mas queremos ser rigorosos c/ Fi. lus.

$\dot{Q}$

hip: o ponto I é o ponto contacto

Recapitulação do conceito de MEZ

Agora basicamente é preciso juntar as contribuições de cada componente ao movimento numa equação

Teoremas vetoriais da dinâmica

$\Sigma \underline{F} = \underline{\dot{Q}}$ $\underline{\dot{Q}}$ - quantidade de aceleração

$\underline{\dot{Q}} = m\underline{a}_G$

$\Sigma \underline{M}_P = \underline{K}_P$ $\underline{K}_P$ = momento dinâmico

$\underline{K}_P = \underline{K}_G + \underline{PG} \cdot \underline{\dot{Q}}$

$\underline{K}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_G \alpha \end{bmatrix}$ (em Mec3, tudo 2D)

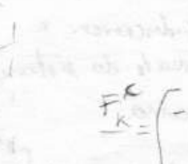
α - aceleração angular

J_G - momento de inércia em relação ao eixo que passa por G: dificuldade de alterar o movimento de rotação de um corpo.

$\underline{F}_K^C = \begin{bmatrix} -Kx \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underline{F}_C^C = \begin{bmatrix} -c\dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

l_n: comprimento natural: comprimento da mola quando não está deformada

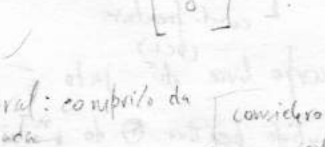
considerar pequenas oscilações $\cos\theta \simeq 1$ $\sin\theta \simeq \theta$



$r\sin\theta \underset{\approx}{\simeq} r\theta$

$x_A \simeq 2r\theta = 2x$

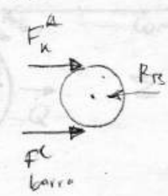
Se percorrermos x na horizontal no centro no xão (?) temos que percorrer x



Esta mola vai exercer força em A c/ sentido oposto ao convencionado p/ x

D.C.L da roldana peso desprezável ⟹ ñ terá inércia

pq a inércia da roldana é desprezável e n há atrito



ΣM concluímos q $F_x^A = F^C_{barra}$

podemos fazê-lo em I ou C ← temos de calcular T

? como?

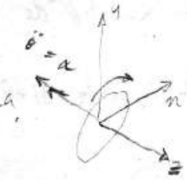
preferível pq ñ sabemos T

ñ estamos a falar do mesmo?

?

$$\underline{F_x^A} = \begin{bmatrix} -6kx \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{F_{barra}^{\,C}} = \begin{bmatrix} -6kx \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ver a regra da mão d.ta



Para chegar à eq. de movito queremos isto

? $\Sigma \underline{M_i} = \underline{K_i}$ (1)

porquê em i?

$$\underline{K_i} = \underline{K_c} + \underline{iC} \cdot \underline{\dot Q} \qquad \underline{Q} = \begin{bmatrix} m\dot x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{K_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -J_c\ddot\theta \end{bmatrix} \qquad \underline{iC} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} \qquad J_c = \frac{1}{2}mr^2 \ [kg \cdot m^2]$$

momento de inércia do disco (fórmula)

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}mr^2\frac{\ddot x}{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m\ddot x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mr\ddot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2}mr\ddot x \end{bmatrix}$$

pq o ponto i é o ponto de contacto, ⟹ está sempre aí $\begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}$ ao C

$\ddot\theta = \frac{\ddot x}{r}$ quisemos substituir pq θ depende de x e vice versa e só queremos ter 1

Como só temos coisas em z, vamos deixar de usar em vetores ⟹ $\Sigma M_i = K_i$ (1)

Representar a dependência de t p/ ficar explícito

$$J_i \frac{\ddot x(t)}{r} + cr\dot x(t) + kxr + 2r \cdot 6kx + 6kx \cdot r = f(t) \cdot r$$

P/ passar dos momentos de 1 sítio p/ outro → Steiner

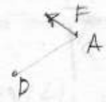
$J_c \rightarrow J_i$

Nota: Ter as fórmulas de momento de inércia de discos, retângulos e barras.

AULA TP2 / EQUAÇÃO DE MOVIᵗᵒ; TORÇÃO; FLEXÃO 12/FEV/20

$\sum \underline{M_P} = \underline{K_P}$

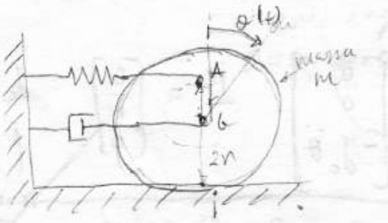
- Momento provocado p/ 1 força: $\underline{M_P} = \underline{PA} \times \underline{F}$



- Momento dinâmico: $\underline{K_P} = \underline{K_G} + \underline{PG} \cdot \underline{\dot{Q}}$
- Quant// de aceleração: $\underline{\dot{Q}} = m\,\underline{a_G}$
- Momento dinâmico em G (em Mec 3) $\underline{K_G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_G \alpha \end{bmatrix}$

1

rola sem escorregar

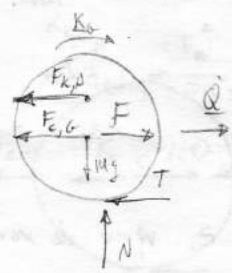


a) estabelecer a eq. diferencial do movi^to

$\boxed{1}$ Desenho do DCL

$\boxed{1.1}$ arbitrar sentido positivo

$\boxed{1.2}$ aplicar deslocaᵗᵒ 2° esse sentido e desenhar



eu decidi fazer o deslocaᵗᵒ em M

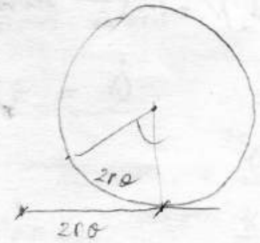
$\underline{IG} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underline{v_G} = \begin{bmatrix} 2r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underline{a_G} = \begin{bmatrix} 2r\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{F_{c,A}} = -c\,\underline{v_G} = \begin{bmatrix} -c2r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{F_{k,G}} = \begin{bmatrix} -K3r\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$F_k = K(\underbrace{r\theta}_{\text{devido à rotação}} + \underbrace{2r\theta}_{\text{devido à translação}})$ $F_c = c\underbrace{2r\dot{\theta}}_{\text{devido à translação}}$

(se o corpo escorregasse só tinha este)



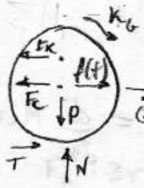
$\underline{K_G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J\ddot{\theta} \end{bmatrix}$ $\underline{K_I} = \underline{K_G} + \underline{IG} \times \underline{\dot{Q}}$

$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J\ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m2r\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J\ddot{\theta} + 4mr^2\ddot{\theta} \end{bmatrix}$

$\sum \underline{M_I} = (\underline{F_c} + \underline{F}) \times \underline{IG} + \underline{F_K} \times \underline{IA} = \begin{bmatrix} -c2r\dot{\theta} + f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r\theta \\ -3r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3Kr\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4r^2c\dot{\theta} + 2rf \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9r^2K\theta \end{bmatrix}$

Isto deve ser feito + rápido / no exame, pt+ uma maneira + rápida é



Como ñ sabemos T, ñ convém entrar c/ ele no somatório dos momentos

$$\sum M_i = K_i$$

$$\left.\begin{array}{l} J_i \ddot{\theta} \\ J_G + m l_G^2 \end{array}\right\} K_i = \left(J_G + m(2r)^2\right)\ddot{\theta}$$

$F_K = K(r\theta + 2r\theta)$

$F_c = c\,2r\dot{\theta}$

$$f(t)\cdot 2r - (2cr\dot{\theta})\cdot 2r - 3Kr\theta\cdot 3r = (J_G + 4mr^2)\ddot{\theta}$$

$$f(t)\cdot 2r - 4cr^2\dot{\theta} - 9Kr^2\theta = (J_G + 4mr^2)\ddot{\theta}$$

$$\boxed{f(t)\cdot 2r = \underbrace{(J_G + 4mr^2)}_{m_{eq}}\ddot{\theta} + \underbrace{4cr^2}_{c_{eq}}\dot{\theta} + \underbrace{9Kr^2}_{K_{eq}}\theta}$$

---

(2)

a) condições fronteira de um veio encastrado livre (M_t da figura ñ existe)

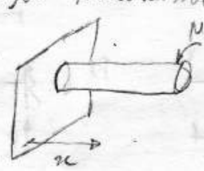
Eq. fundamental da torção

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{M(x)}{G I_p}$$

G [N/m²], I_p [m⁴]

$\theta(x)$: rotação em torno de x, da secção transversal

$M(x)$: momento torsor



pq ñ por estas c.f.?

· Olhando p/ figura podemos ver q como o veio está encastrado $\boxed{\theta(0) = 0}$? e $\theta(l) = \theta$? $M(0) = M_t$

· Se cortarmos um bocadinho da ponta do veio

livre $\boxed{M(l) = 0}$ se o M_t estivesse a ser aplicado era $= M_t$

· Ter em atenção q as condições de fronteira devem-se manter verdadeiras p/ qq carregado

b) $\theta(x)$ em função de $M_t(x)$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{GIP}dx \Rightarrow \theta(x) = \frac{M(x)\cdot x}{G I_p} + c_1 \quad \text{Para } x = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\theta(x) = \frac{M(x)\cdot x}{G I_p}$$

c) $\theta(l) = \dfrac{M_t(l)\cdot l}{G I_p}$

Nota: devemos pensar nas c.f. q seriam válidas p/ qq conjunto de forças

③ 

Momento fletor

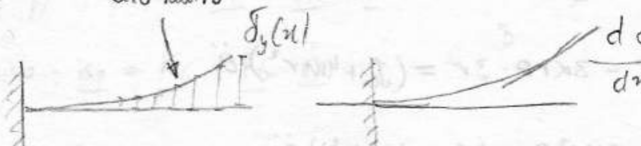
$$M_f(x) = E i \frac{d^2 \delta_y(x)}{dx^2} \quad (1)$$

$i\,[mm^4]$

$$V(x) = E i \frac{d^3 \delta_y(x)}{dx^3}$$

esforço transverso $= \frac{d}{dx} M$

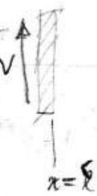
a) cond. fronteira de viga encastrada livre s/ considerar carga



$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \delta_y(0) = 0 & (1) \\ \frac{d\delta_y(0)}{dx} = 0 & (2) \end{cases}$$

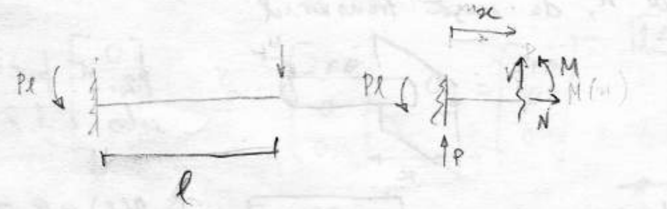
condições fronteira geométricas

$$x = l \begin{cases} M_f(l) = 0 \Rightarrow E i \frac{d^2 \delta_y(l)}{dx^2} = 0 \\ V(l) = 0 \Rightarrow E i \frac{d^3 \delta_y(x)}{dx^3} \end{cases}$$



condições fronteira naturais (pq temos de fazer balanço de forças / momentos)

b) $\delta_y(x)$ agora c/ a carga P



$$-M_f(x) + Pl - Px = 0$$

$$M - Px + Pl = 0 \Rightarrow M(x) = P(x - l) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{E i\, d^2 \delta_y(x)}{dx^2} = P(x-l) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^2 \delta_y(x) = \frac{P}{Ei}(x - l)\, dx^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int d\left(d(\delta_y(x))\right) = \iint \frac{P}{Ei} \cdot (x - l)\, dx^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d\,\delta_y(x) = \frac{P}{Ei}\left(\frac{x^2}{2} - lx\right) + c_1\, dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta_y(x) = \frac{P}{Ei}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2}\right) + c_1 x + c_2$$

$(1) \rightarrow c_2 = 0$
$(2) \rightarrow c_1 = 0$

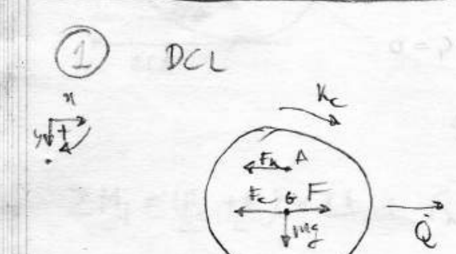
Então fica

$$\delta_y(x) = \frac{P}{Ei}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2}\right)$$

q̄ me dá o deslocado y de cada ponto da barra

ESTUDO

① DCL



Para obter a eq. dif. do movimento podemos fazer

$$\Sigma M_{A \text{ ou } G \text{ ou } i} = k_{A \text{ ou } G \text{ ou } i}$$

Os q̄ dão menos trabalho de longe são em G e i porque não é preciso fazer tantos momentos.

① Em G passam F_c, F, mg, N e $\dot{Q}$ $\xRightarrow{\text{mas}}$ é preciso calcular T

② Em i passam N, T, mg $\xRightarrow{\text{mas}}$ é preciso calcular J_i (Steiner ou teoremas vetoriais)

Por ② (feito na aula seria) $\sum M_i = K_i$

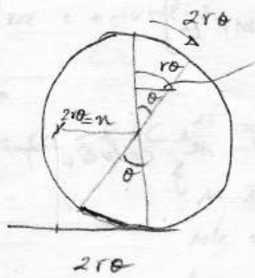
$K_i \to J_i \ddot{\theta}$ T. Steiner $\to J_c + m(2r)^2 = \frac{1}{2}m(2r)^2 + m(2r)^2 =$ ($J_c = \frac{1}{2}mr^2$)

$= 2mr^2 + 4mr^2 = 6mr^2$

$\boxed{K_i = 6mr^2\ddot{\theta}}$

$-F_k \cdot 3r - F_c \cdot 2r + F \cdot 2r \quad (1)$

($F_c = c\dot{x}$, $F = f(t)$)



translação + rotação = deslocato total

$2r\theta + r\theta = 3r\theta$

$F_k = 3r\theta k$

Relação entre x e θ?

x — deslocato em x do centro de massa do disco

$x = 2r\theta$

A eq. (1) fica

$-3r\theta k \cdot 3r - c\dot{x} \cdot 2r + f(t) \cdot 2r = 6mr^2\ddot{\theta}$ ($\dot{x} = 2r\dot{\theta}$) reescrevendo

$$\boxed{f(t) = 4{,}5 r\theta k + 2cr\dot{\theta} + 3mr\ddot{\theta}}$$

Fazendo da maneira ① $\sum M_G = K_G$

$-F_k \cdot r + T \cdot 2r = K_G \quad (2)$

$K_G \to J_c\ddot{\theta} \to \frac{1}{2}m(2r)^2 = 2mr^2 \Rightarrow \boxed{K_G = 2mr^2}$

$$\sum \vec{F}^{\,n} = m\vec{a}^{\,n}_G$$

$-T + F - F_k - F_c = m\ddot{x}$ pondo em ordem a T

$-T = m\ddot{x} - F + F_k + F_c$

$T = -m\ddot{x} + F - F_k - F_c$ ($\ddot{x} = 2r\ddot{\theta}$)

$T = -2mr\ddot{\theta} + f(t) - 3r\theta k - 2cr\dot{\theta}$ Substituindo em (2)

$-3r\theta k \cdot r - 4mr^2\ddot{\theta} + 2r f(t) - 6r^2\theta k - 4cr^2\dot{\theta} = 2mr^2$

$$\boxed{2r f(t) = 6mr^2\ddot{\theta} + 9r^2\theta k + 4cr^2\dot{\theta}}$$

Também podíamos ter feito isto pelos teoremas vetoriais $\Sigma \underline{M_G} = \dot{K}_G$

$$\Sigma \overset{n}{\underline{F}} = m\ddot{x} \Rightarrow \underline{T} = \begin{bmatrix} f(t) - 3r\theta k - 2cr\dot{\theta} - 2mr\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_G\ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2mr^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} \times \overbrace{\begin{bmatrix} -3r\theta k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{F_K} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2r \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -(f(t) - 3r\theta k - 2cr\dot{\theta} - 2mr\ddot{\theta}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2mr^2\ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

daqui resulta uma equação vetorial c/ zeros em x e y pelo q podemos pegar apenas na eq. escalar em z

Ao ter posto o (−) na expressão de onde se deduziu T, o sentido n devia já estar a ser em conta?

⇓

não. se no desenho tivesse feito o T c/ sentido contrário, a expressão T trocava toda de sinal, já n era preciso por o (−) no vetor e dava igual ao q tenho

hip: dentro dos vetores deve estar sempre explícito o sinal q indica o sentido do vetor

$$-3r^2\theta k + 2rf(t) - 6r^2\theta k - 4cr^2\dot{\theta} - 4mr^2\ddot{\theta} = 2mr^2\ddot{\theta}$$ ✓

$$\boxed{2rf(t) = 9r^2\theta k + 4r^2c\dot{\theta} + 6mr^2\ddot{\theta}}$$ reescrevendo

Nota: o sentido de T na verdade está ao contrário da realid. O q vai acontecer é q dps de se ter $\theta, \dot{\theta}$ etc vai dar $T = -(\dots)\,N$,

---

Determinação da eq. do mov. pela 2ª Lei de Newton:

$\Sigma M_p = \dot{K}_p$

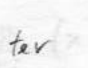
$\Sigma F = \dot{Q}$ se só tiver translação.

AULA T — 18/Fev/2

Movto harmónico: Movito harmónico c/ desfasado inicial $y(t) = A\,\text{sen}(\omega t \pm \phi)$ + avanço − atraso

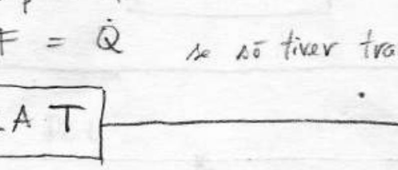
Entender $A\,\text{sen}(\omega t)$

sen(t)



1A amplitude

- Representação vetorial
- Parâmetros caraterísticos T, f, ω
- Representação tempo - frequência : é a msm informação mostrada de maneira diferente



$x(t) = A \, sen(\omega t + \phi)$ Pode ser representado sob a forma de 1 vetor rotativo

amplitude, freq., desfazado

. Grandezas cinemáticas

definição de $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ e suas relações.

Regime livre e natural

$\mathcal{L}(\ldots)$

$(ms^2 + cs + k) C e^{st} = 0$

se sabemos q sole $\neq 0$ então $\Rightarrow \boxed{ms^2 + cs + k = 0}$ eq. caraterística do regime livre natural

---

Raízes da eq caraterística

s_1 e s_2: raízes

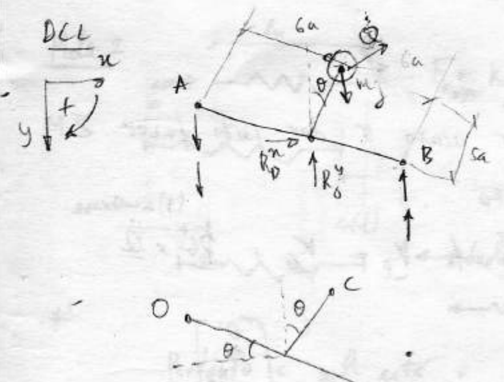
chegou-se finalmente a $\boxed{x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi)}$

mov. osc. harmónico — depende das prop mec. do sistema $\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$

É a parte real q atenua o movimento vibratório.

AULA TP3 / EQ. DE MOVIMENTO E A SUA LINEARIZAÇÃO | 18/FEV/2014

DCL



Uma partícula não tem momento de inércia relativo ao eixo q passa por ela: $J_c = 0$; $J_0 \neq 0 = 0 + \overline{OC}^2 m$

$$\underline{OA} = \begin{bmatrix} -6a\cos\theta \\ -6a\,sen\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{OB} = \begin{bmatrix} 6a\cos\theta \\ 6a\,sen\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{OC} = \begin{bmatrix} 5a\,sen\theta \\ -5a\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v_A} = \underline{\dot{OA}} = \begin{bmatrix} +6a\dot{\theta}\,sen\theta \\ -6a\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{v_B} = \underline{\dot{OB}} = \begin{bmatrix} -6a\dot{\theta}\,sen\theta \\ 6a\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{v_c} = \underline{\dot{OC}} = \begin{bmatrix} 5a\dot{\theta}\cos\theta \\ 5a\dot{\theta}\,sen\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a_c} = \underline{\ddot{OC}} = \begin{bmatrix} 5a\ddot{\theta}\cos\theta - 5a\dot{\theta}^2 sen\theta \\ 5a\ddot{\theta}\,sen\theta + 5a\dot{\theta}^2\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F_{c,A}} = 6a\dot{\theta}c \begin{bmatrix} -sen\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{F_{c,B}} = 6a\dot{\theta}c \begin{bmatrix} sen\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem o sentido contrário à velocidade

28:00

$$\Delta \underline{OA} = \underline{OA}(t)\Big|_{\theta} - \underline{OA}(0)\Big|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} -6a\cos\theta \\ -6a\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a(1-\cos\theta) \\ -6a\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 \\ -6a\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

o prof aqui linearizou parte de ... demasiado com...

$$\underline{F}_{K,A} = \begin{bmatrix} 0 \\ K6a\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$ a força tem sentido positivo

$$\underline{F}_{K,B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -K6a\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

sendo o corpo rígido, mesmo que estivesse aplicado noutro ponto aqui

Pela 2ª Lei de Newton $\Sigma M_0 = \dot{K}_0$

$$\underline{OA} \times \underline{F}_{KA} + \underline{OA} \times F_{c,A} + \underline{OB} \times F_{K,B} + \underline{OB} \times F_{c,B} + \underline{OC} \times \begin{bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{M} = \dot{\underline{K}}_0$$

$$\begin{bmatrix} -6a\cos\theta \\ -6a\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 6aK\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +6a\dot\theta\,\text{sen}\,\theta \\ -6a\dot\theta\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \times 6a\dot\theta c \begin{bmatrix} -\text{sen}\,\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6a\cos\theta \\ 6a\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -6Ka\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6a\dot\theta\,\text{sen}\,\theta \\ 6a\dot\theta\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \times 6a\dot\theta c \begin{bmatrix} \ldots \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 5a\,\text{sen}\,\theta \\ -5a\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6^2a^2K\cos\theta\,\text{sen}\,\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6^2a^2\dot\theta^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta c - 6^2a^2\dot\theta^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta c \end{bmatrix}$$

Isto se pode fazer

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_0\ddot\theta \end{bmatrix}$ se O for ponto fixo. Se por acaso ū der jeito fazer num ponto fixo, e tivermos q fazer num ponto móvel, então $\dot{K}_P = \dot{K}_G + \underline{PG} \times \dot{Q}$

tipo $\Sigma M_P = \dot{K}_P$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_G\ddot\theta \end{bmatrix},$$

* Aplicação série de Taylor

$$f(\theta) = f(0) + \frac{df(0)}{d\theta}\cdot\frac{\theta-0}{1} + \frac{d^2f(0)}{d\theta^2}\cdot\frac{\theta^2}{2!} + \frac{d^3f(0)}{d\theta^3}\cdot\frac{\theta^3}{3!}$$

$$\text{sen}\,\theta = \cancel{\text{sen}(0)}^{0} + \underbrace{\cos 0}_{1}\cdot\theta\left(-\text{sen}\,0\cdot\frac{\theta^2}{4} - \cos 0\,\frac{\theta^3}{6}\right)$$ dependendo da precisão q geramos fazemos + ou - menos termos. Mas se deixarmos os termos superiores a 2, a eq. torna-se não linear, e isso ū aprendemos a resolver.

$\theta \ll 1$, então $\text{sen}\,\theta \simeq \theta$

Repetir p/ $\cos\theta$ ... $\theta \ll 1 \Rightarrow \cos\theta \simeq 1$

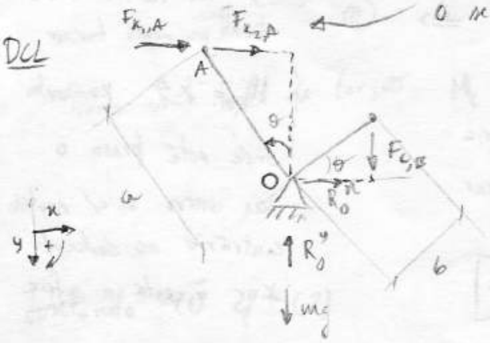
(!) se por acaso nos aparecerem termos $\dot{\theta}\theta$ independentes, todos eles e as suas derivadas podem ser desprezados por serem pequenos. São infinitésimos de 2ª ordem.

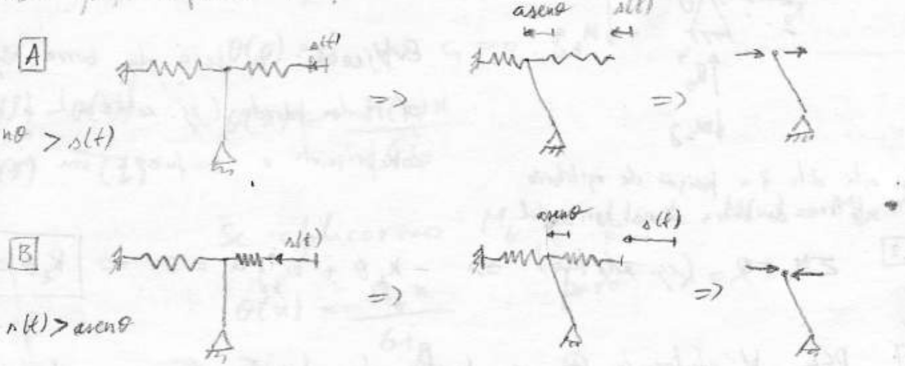
AULA TP4 / EQ DE MOVIMENTO

19/FEV/2014

o sentido desta força depende de quanto vale $s(t)$

DCL





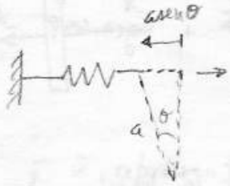
Por isso tanto faz qual o sentido a arbitrar.

Se fizermos como está representado, aplicando a 2ª lei de Newton

(!) o corpo está a rodar no sentido contrário ao +

$$\Sigma M_0 = K_0 \qquad F_{K_1,A}\cdot a + F_{K_2,A}\cdot a + F_{c,B}\cdot b = -J\ddot{\theta}$$

Mola 1

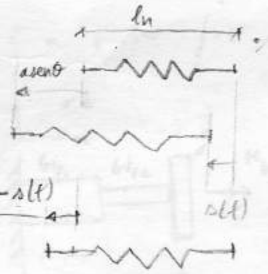


$F_K = K a\, sen\theta$ ($\simeq \theta$)

Amortecedor: $F_{c,B} = cb\,sen\dot{\theta}$ ($\simeq \dot{\theta}$)

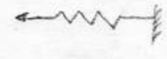
$F_c = \dot{x}c \qquad \dot{x} = b\,sen\dot{\theta}$

Mola 2



$F_{K_2A} = K_2(a\,sen\theta - s(t))$ ($\simeq \theta$)

← deslocamento total



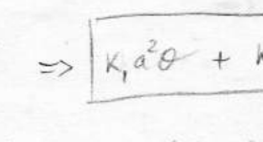
*¹ Portanto a mola está a puxar (e não a empurrar)

Porquê $a\,sen\theta - s(t)$ e não $s(t) - a\,sen\theta$?

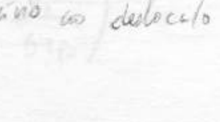
Porque qdo $a\,sen\theta - s(t)$ ↗ ⇒ a força F_K ↗ no sentido em q está representada.

Se tivéssemos escolhido a representação [B] seria $s(t) - a\,sen\theta$

Também podíamos ter pensado em termos de forças. O deslocamento $s(t)$ faz c/ q a mola faça força na barra contrária ao q está representado. A mola empurra a barra, no desenho do DCL está a puxar ⇒ sinal (−)



O deslocamento $a\,sen\theta$ faz c/ q a mola faça força a favor do q está representado. A mola puxa a barra tal como está no desenho ⇒ sinal (+)



$$K_1a^2\theta + K_2(a\theta - s(t))a + cb^2\dot{\theta} = -J\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{K_1a^2\theta + K_2a^2\theta - K_2a\,s(t) + cb^2\dot{\theta} = -J\ddot{\theta}}$$

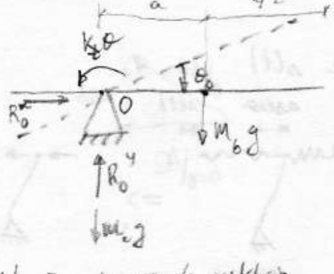
*¹ A força q 1 mola exerce sobre os corpos c/ q está solidária tem sentido contrário ao deslocamento total q sofrem.

Aula TP 9, Eq. movto

construção do DCL :

[1] DCL na posição de equilíbrio estático [1.1] e determinação das forças das molas q atuem nesta

[1.1]



Mola de torção:

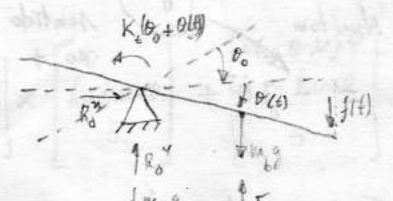
Ao ser rodada um momento ... $M_{t0} = k\theta$ no onde está presa seu centro e c contrário ao ... Xar q está a

Explicação: o peso da barra faz com q c/ tudo parado (eq. estático) a mola esteja comprimida e a fazer um momento torsor.

Nota: está dito q a posição de eqlibrio estático da barra é na horizontal

[1.2] $\sum M_0 = 0$ (eq. estático) $\Rightarrow -k_t\theta + m_{b}g\,a = 0 \Rightarrow \boxed{k_t\theta = m_{b}g\,a}$

[2] DCL p/ deslocato ⊕ a partir da posição de eq. estático

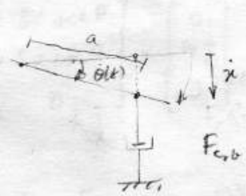


Pela 2ª lei de Newton

$$\sum M_0 = \dot{H}_0$$

$$-k_t(\theta_0 + \theta(t)) + f(t)\cdot\left(\frac{l}{2}+a\right)\cos\theta + m g\, a\cos\theta - c\dot{\theta}a\cdot a$$

$$= J_0\ddot{\theta}$$



$F_{c,G} = c\dot{x} = c\dot{\theta}a$

$J_0 = J_{0,barra} + J_{0,colar}$ ($4{,}05\cdot10^{-2}\ kg\,m^2$)

$J_{G,barra} + m\cdot\overline{OG}^2$

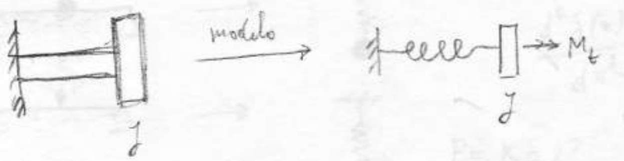
$\frac{1}{12} m_{barra} l^2$

Reescrevendo, a eq. do mov. fica

$$\boxed{J_0\ddot{\theta}(t) + ca^2\dot{\theta}(t) + k_t(\theta_0 + \theta(t)) = \left(a+\frac{l}{2}\right)f(t)}$$

AULA TP5 — RIGIDEZ DE VEIOS — 25/FEV/2014

①



$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{M(x)}{GI_p} \Rightarrow \theta(x) = \frac{M(x)x}{GI_p} + c_1$$

cond. fronteira (só precisamos de 1)

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\theta(x) = \frac{M(x)x}{GI_p}$$

Para uma mola de torção $M_t = K_t \Delta\theta$

$$= K_t(\theta(l) - \theta(0))$$

$$= K_t\,\theta(l) \quad (1)$$

Se aplicarmos M_t ao volante $M(x) = M_t \ \forall x$

$$\theta(x) = \frac{M_t x}{GI_p} \quad \text{para } x = l$$

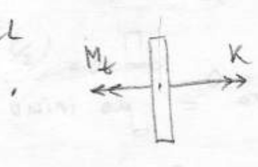
$$\theta(l) = \frac{M_t l}{GI_p} \quad (2)$$

Juntando (1) c/ (2),

$$\cancel{M_t} = K_t \frac{\cancel{M_t} l}{GI_p} \Rightarrow K_t = \frac{GI_p}{l}$$

Equação do movimento do volante?

DCL

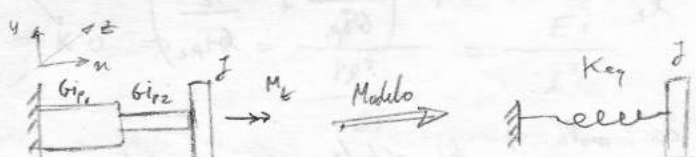


$$\Sigma M = K \Rightarrow -K_t\,\theta(l,t) = J\ddot{\theta}(l)$$

$$\omega_n = \left(\frac{K_{eq}}{m_{eq}}\right)^{1/2} = \left(\frac{K_t}{J}\right)^{1/2}$$

Porque é q. ñ representamos o M_t também do lado direito (o do lado esq. é apenas o q a mola faz sobre o volante). R: Podíamos tê-lo feito e estava certo.

②



$x \in [0, l_1]$

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{M(x)}{GI_{p_1}} \Rightarrow \theta(x) = \frac{M_t x}{GI_p} + \cancel{c}^{\,=0}$$

$$\theta(l_1) = \frac{M_t l_1}{GI_{p_1}}$$

$x \in [l_1, l_1 + l_2]$

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{M(x)}{GI_{p_2}} \Rightarrow \theta(x) = \frac{M_t x}{GI_{p_2}} + c_1$$

$$\theta(l_1) = \frac{M_t l_1}{GI_{p_1}} = \frac{M_t l_1}{GI_{p_2}} + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 = M_t\left(\frac{l_1}{GI_{p_1}} - \frac{l_1}{GI_{p_2}}\right)$$

$$\theta(x) = \frac{M_t x}{GI_{p_2}} + M_t\left(\frac{l_1}{GI_{p_1}} - \frac{l_1}{GI_{p_2}}\right)$$

$$M_t = K_{eq}\,\theta(l_1+l_2) \qquad \theta(l_1+l_2) = \frac{M_t(l_1+l_2)}{Gi_{p_2}} + \frac{M_t l_1}{Gi_{p_1}} - \frac{M_t l_1}{Gi_{p_2}} = \frac{M_t l_2}{Gi_{p_2}} + \frac{M_t l_1}{Gi_{p_1}}$$

$$\cancel{M_t} = K_{eq}\left(\frac{\cancel{M_t} l_2}{Gi_{p_2}} + \frac{\cancel{M_t} l_1}{Gi_{p_1}}\right) \Rightarrow \frac{1}{K_{eq}} = \frac{l_2}{Gi_{p_2}} + \frac{l_1}{Gi_{p_1}} \checkmark$$

Alternativa:

Sabemos que $M(x) = K\Delta\theta(x)$ então $K_1 = \dfrac{M_1}{\Delta\theta_1}$, $K_2 = \dfrac{M_2}{\Delta\theta_2}$ ($M_1 = M_t$, $M_2 = M_t$)

(encastrado) $\theta(l_1) - \theta(0)$ ($\theta(0)=0$) $\qquad \theta(l_2+l_1) - \theta(l_1)$

$$K_1 + K_2 = \frac{M_t}{\theta(l_1)} + \frac{M_t}{\theta(l_1+l_2) - \theta(l_1)}$$

escrevi os > ângulos 1° pq considerei q o momento aplicado era positivo. $M = K\Delta\theta$ então o deslocado tb tem de ser

$$K_1 + K_2 = \frac{M_t}{\theta(l_1+l_2)}$$

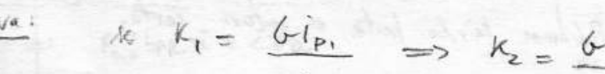
falta saber qto vale isto. E agora era = ao início da resolução anterior.

Alternativa: $K_1 = \dfrac{Gi_{p_1}}{l_1} \Rightarrow K_2 = \dfrac{Gi_{p_2}}{l_2} \Rightarrow K_{eq} = \left(\dfrac{l_1}{Gi_{p_1}} + \dfrac{l_2}{Gi_{p_2}}\right)^{-1} \checkmark$

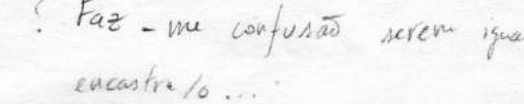
? Faz-me confusão serem iguais, qdo a da mola 1 foi obtida c/ condição de encastrado...

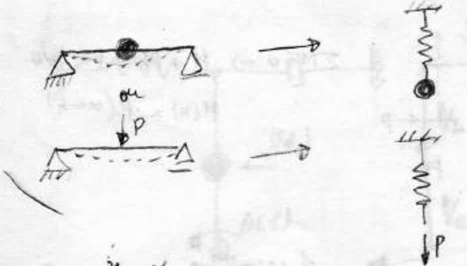
R: a cte de elasticid de 1 mola é-lhe intrínseca, i.e., ñ depende de como ela é posta a funcionar. Portanto as molas de torção têm $\boxed{K_{mt} = \left(\dfrac{G\,i_{p}}{l}\right)_{mt}}$

Nota: neste exercício era importante saber observar q M_t era cte. Para lá chegar podíamos pensar na 3ª lei de Newton (a da ação-reação)



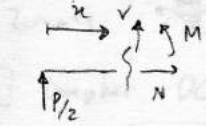
ou no diagrama de esforços → o qual ñ depende das propried. da coisa sujeita ao esforço, aí é a σ q entra. Este só nos fala das solicitações.





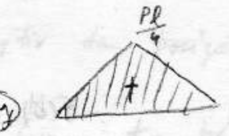
$$\frac{d^2\delta(x)}{dx^2} = \frac{M_f(x)}{Ei}$$ (1) Como M_f depende de x, e para integrar precisamos de explicitar essa dependência é preciso calcular o diagrama de momentos flectores.

$P = K\delta$?



$\Sigma M = 0 \Rightarrow -\frac{P}{2}x + M = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{P}{2}x$

$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{4}$



Substituindo em (1)

$$\frac{d^2\delta(x)}{dx^2} = \frac{Px}{2EI} \Rightarrow \frac{d\,\delta(x)}{dx} = \frac{Px^2}{4EI} + c_1 \Rightarrow \delta(x) = \frac{Px^3}{12EI} + c_1x + c_2$$

- Notar q esta expressão só é válida para $x \in [0, l/2]$ de $\frac{l}{2}$ a l a equação do $M(x)$ é outra q n calculei (mas tb n é preciso), por isso n se podia usar como cond. fronteira $\delta(l) = 0$

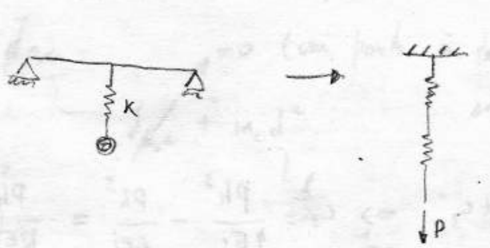
$\delta(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$\frac{d\delta}{dx}(l/2) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{4EI} + c_1 \Rightarrow c_1 = -\frac{Pl^2}{16EI}$ $\Bigg\}$ $\delta(x) = \frac{Px^3}{12EI} - \frac{Pl^2}{16EI}x$

$$\delta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^3}{96EI} - \frac{Pl^3}{32} = \frac{Pl^3}{64EI}$$ devia dar $\frac{Pl^3}{48EI}$?

- $P = K\delta \Rightarrow K = \frac{P}{\frac{Pl^3}{Ei}} = \frac{Ei}{l^3}$

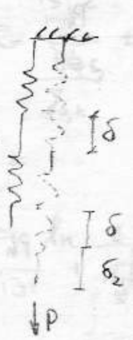
Se tirássemos



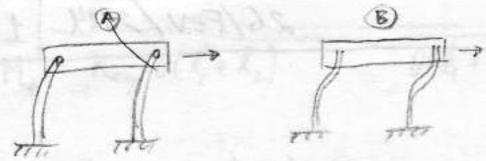
Como o K da mola é dado então $K_{eq} = \frac{1}{K_{viga}} + \frac{1}{K_{mola}}$

$\left(\frac{48EI}{l^3}\right.$

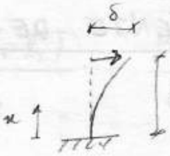
Se o K da mola n fosse dado



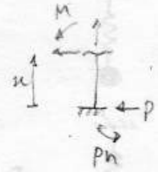
$P = K_{mola}(\delta + \delta_2 - \delta)$



Caso (A)



$$\frac{d^2\delta(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

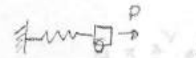


$\Sigma M = 0 \Rightarrow M + Ph - Px$

$M(x) = P(x-$

$$\frac{d^2\delta(x)}{dx^2} = \frac{Px}{EI} - \frac{Ph}{EI} \Rightarrow \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{Px^2}{2EI} - \frac{Phx}{EI} + c_1$$

$$\Rightarrow \delta(x) = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Phx^2}{2EI} + c_1 x + c_2$$



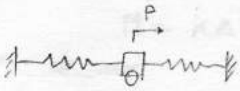
$P =$

$$\left.\begin{array}{l} \delta(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ \frac{d\delta(0)}{dx} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{array}\right\} \delta(x) = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Phx^2}{2EI}$$

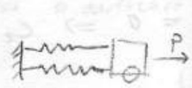
$$\delta(h) = \frac{Ph^3}{6EI} - \frac{Ph^3}{2EI} \Rightarrow \delta(h) = -\frac{Ph^3}{3EI}$$

$P = K\delta \Rightarrow K = \frac{3EI}{h^3}$

As 2 vigas representadas podiam-se modelar:



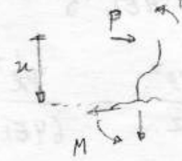
ou



De qq maneira estão em paralelo $\Rightarrow K_{eq} = \frac{6EI}{h^3}$

Caso (B)

Fazendo desta vez o corte em cima



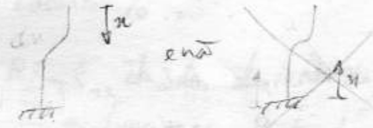
$\Sigma M = 0 \Rightarrow$

$M + M_0 - Px = 0 \Rightarrow$

$M = Px - M_0$

$$\frac{d^2\delta(x)}{dx^2} = \frac{Px - M_0}{EI} \Rightarrow \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{Px^2}{2EI} - \frac{M_0 x}{EI} + c_1 \Rightarrow \delta(x) = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{M_0 x^2}{2EI} + c_1 x + c_2$$

(!) Como defini $\downarrow x$, a equação $M(x)$ reflete isso e também $\delta(x)$. Portanto temos de fazer



$$\delta(h) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{Ph^3}{6EI} - \frac{M_0 h^2}{2EI} + c_1 h + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{Ph^3}{4EI} - \frac{Ph^3}{6EI} = \frac{Ph^3}{12EI}$$

$$\frac{d\delta(h)}{dx} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{Ph^2}{2EI} - \frac{M_0 h}{EI} + \cancel{c_1} \Rightarrow \frac{M_0 h}{EI} = \frac{Ph^2}{2EI} \Rightarrow M_0 = \frac{Ph}{2}$$

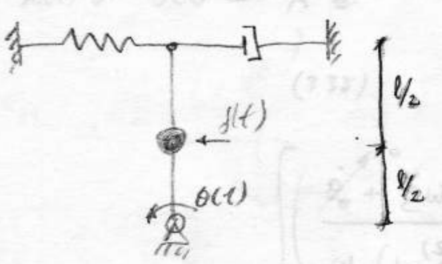
$$\frac{d\delta(0)}{dx} = 0 \Rightarrow 0 = c_1$$

$$\frac{2}{12} - \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\delta(x) = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Phx^2}{4EI} + \frac{Ph^3}{12EI} \qquad \delta(h) = \frac{Ph^3}{6EI} - \frac{Ph^3}{4EI} + \frac{Ph^3}{3EI} = \frac{Ph^3}{12EI}$$

$$K = \frac{12EI}{h^3} \Rightarrow K_{eq} = \frac{24EI}{h^3}$$

AULA TP7   5/Mar/2014



$m_b = 0,82$ Kg

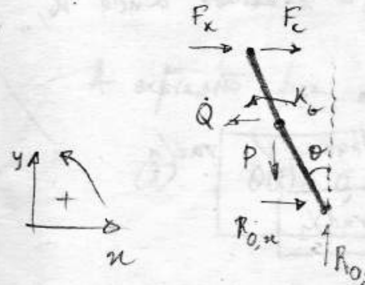
$m_c = 0,5$ Kg

$l = 0,3$ m

$\theta_0 = 15° = 0,2618$ rad

$180° \text{ — } \pi$ rad
$15° \text{ — } x \rightarrow x = 0,2618$ rad

[1] Desenhar DCL aplicando deslocado no sentido positivo a partir da posição de equilíbrio estático



[2] Aplicar 2ª lei de Newton. (momentos p/ um ponto fixo, O)

$$\sum M_0 = K_0$$

$$-F_x \cdot l\cos\theta - F_c\, l\cos\theta + P\frac{l}{2}\,\text{sen}\,\theta + f(t)\frac{l}{2}\cos\theta = J_0\ddot{\theta}$$

(momento de inércia do sistema todo)

$$-F_x l - F_c l + \frac{Pl}{2}\theta + f(t)\frac{l}{2} = J_0\ddot{\theta}$$

? só podemos escrever isto pq O é um ponto fixo. Pq?

$F_x = Kl\,\text{sen}\,\theta$

$F_c = cl\,\text{sen}\,\dot{\theta}$

$P = (m_c + m_b)\,g$

apesar da barra ser um sistema contínuo, simplificamos isto dizendo q toda a massa se encontra no seu centro de massa, visto q a análise q estamos a fazer é p/ elementos discretos.

(!) Há exercício em q n se considera o peso pq se considera q ele é equilibrado p/ uma pré-deformação das molas (X_s) mas aqui isso n tem como acontecer ptt tem de ser considerado

$$J_0 = J_{0,b} + J_{0,c}$$

$J_{0,c} = \underbrace{J_{G,c}}_{=0} + m_c d^2$, $d = \frac{l}{2}$ — $=0$ (um ponto n tem momento de inércia p/ rodar em torno de si mesmo (no seu centro de massa))

$J_{0,b} = J_{G,b} + m_b d^2$, $d = \frac{l}{2}$

momento de inércia de 1 barra no centro de massa: $\frac{ml^2}{12}$

$$J_0 = \underbrace{\frac{m_b l^2}{12} + m_b\frac{l^2}{4}}_{J_{0,b}} + \underbrace{m_c\frac{l^2}{4}}_{J_{0,c}} = \frac{m_b l^2}{3} + \frac{m_c l^2}{4} \Rightarrow \boxed{J_0 = 0,03585 \text{ kg m}^2}$$

(m_b = 0,82; m_c = 0,5; l = 0,3)

→ decremento logarítmico?

$$\delta N = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_1 + NT)} \Rightarrow \boxed{\delta = 0,8886}$$

N = 2; $x(t_1)$ = −9,62; $x(t_1 + NT)$ = −1,627

afastado relativo à posição de equilíbrio estático

(!) tem de ser número inteiro

· razão de amortecimento, ξ $\quad \delta = \dfrac{2\pi\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} \Rightarrow \boxed{\xi = 0{,}14} \Rightarrow$ sistema sub-amortecido

δ ↳ 0,8886

· frequência natural amortecida, w_d e não amortecida, w_n

$w_d = w_n(1-\xi^2)^{1/2}$ (1) $\qquad w_n = \left(\dfrac{K_{eq}}{m_{eq}}\right)^{1/2}$ (2)

↳ esta eq. precisa desta 1º ↲ → mas nós ñ sabemos ainda

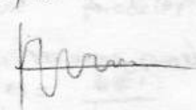
tentando de outra maneira

$f_n = \dfrac{1}{T_n}$ e $f_d = \dfrac{1}{T_d\ [s]}$ $\quad$ mas em mecânica III geral/ trabalhamos c/ rad/s

$(\omega = 2\pi f)$ $\qquad$ [Hz] $\qquad w_d = \dfrac{2\pi}{T_d}$ [rad/s] $\Rightarrow \boxed{w_d = 49{,}64 \text{ rad/s}}$

T_d ↳ $\dfrac{0{,}3161 - 0{,}06295}{2}$ ↲ pq são 2 períodos

no gráfico teros



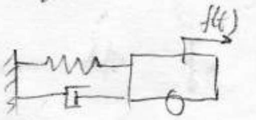
o ξ significa q o sistema tem amortecimento (devido ao amortec...

por isso usamos esta expressão e não a do f_n

Substituindo w_d em (1) $\Rightarrow$ $\boxed{w_n = 50{,}134 \text{ rad/s}}$

· cte de rigidez da mola, K $\quad$ aqui há q fazer 1 àparte. A fórmula (2) foi deduzida p...

caso



$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0 \qquad w_n = \left(\dfrac{K}{m}\right)^{1/2}$ $\quad$ Para um caso genéric... fica o q está em (2)

A equação do movimento deste exercício podia ser reescrita da mesma forma

$$\boxed{\underbrace{J_0}_{m_{eq}}\ddot{\theta}(t) + \underbrace{cl^2}_{c_{eq}}\dot{\theta}(t) + \underbrace{\left(Kl^2 - (m_b + m_c)g\frac{l}{2}\right)}_{K_{eq}}\theta(t) = f(t)\frac{l}{2}} \quad (4)$$

$w_n = \left(\dfrac{K_{eq}}{J_0}\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{K_{eq} = 90{,}106 \text{ Nm}}$ $\quad K_{eq} = Kl^2 - (m_b + m_c)g\dfrac{l}{2} \Rightarrow \boxed{K = 1022{,}8 \ldots}$

w_n ↳ 50,134; J_0 ↳ 0,03585; l = 0,82; m_b = 0,5; g = 9,81; m_c = 0,3

· cte de amortecimento, c $\quad \xi = \dfrac{c_{eq}}{2m_{eq}w_n} \Rightarrow \boxed{c_{eq} = 0{,}503 \text{ Nms}}$ $\quad c_{eq} = cl^2 \Rightarrow \boxed{c = 5{,}5\ldots}$

ξ ↳ 0,14; m_{eq} ↳ 0,03585; w_n ↳ 50,134

· expressão da resposta resposta livre ou natural à perturbação inicial, $\theta_0 =$

$$x(t) \text{ ou } \theta(t) = A\, e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

(3.35) 49,64

$$\tan^{-1}\left(\frac{\dot\theta_0 + \xi\omega_n\theta_0}{\omega_n(1-\xi^2)^{1/2}\,\theta_0}\right) \Rightarrow \boxed{\phi = 0{,}14049 \text{ rad}}$$

ter atenção em ter "grau: radiano" nas definições gerais da máquina

$$\left[\left(\frac{\dot\theta_0 + \xi\omega_n\theta_0}{\omega_n(1-\xi^2)^{1/2}}\right)^2 + \theta_0^2\right]^{1/2} \Rightarrow \boxed{A = 0{,}2644}$$

$\dot\theta_0 = 0$; 50,134; 0,14; 0,2618

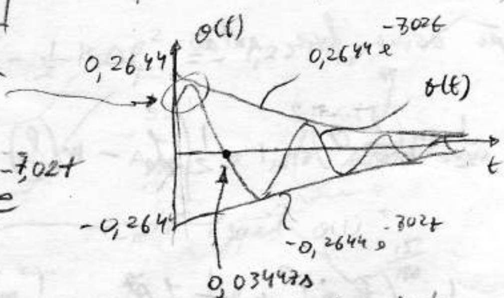
A expressão fica então

$$(3) \quad \boxed{\theta(t) = 0{,}264\, e^{-7{,}02 t} \cos(49{,}64 t - 0{,}1405)} \leftarrow \text{pôr na máquina e ver :)}$$

· expressão do envelope

$t=0$: $\cos(-0{,}1405)$ por causa do ϕ

$$\theta_{envelope} = \pm A e^{-\xi\omega_n t} \Rightarrow \theta_{env.} = \pm 0{,}2644 e^{-7{,}02 t}$$



· instante em q o sistema passa pela 1ª vez na posição de equilíbrio estático, $\theta(t) = 0$

[A] Pondo a expressão (3) na máquina vê-se q o 1º zero é em $t = 0{,}034$ s

[B] Fazendo um solve $\theta(t) = 0$ obtém-se $t = 0{,}06329 \cdot n - 0{,}0288$
fazendo $n = 1 \Rightarrow t = 0{,}03447$ s

<u>Determinar</u>

· energia dissipada até ao instante calculado em cima (vamos chamar-lhe t_1)

<u>Análise</u>

Para os sistemas analizados em ME3 só estamos interessados na energia mecânica. $E_{Mecânica}$, E_M

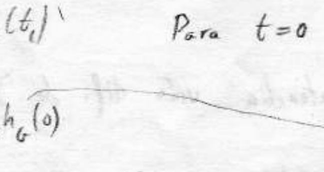
$$E_M = E_p + E_c \qquad E_c = \frac{1}{2} m \dot x_G^2 + \frac{1}{2} J_G \dot\theta^2 \qquad E_p = E_{P,elástica} + E_{P,gravítica}$$

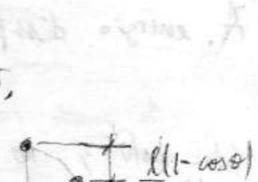
$$E_{P,el} = \frac{1}{2}\begin{cases} K\Delta l^2 & \text{mola linear} \\ K_t \Delta\theta^2 & \text{mola torção}\end{cases} \qquad E_{P,g} = m_{total}\, g h_G \qquad \text{Equações sempre válidas em ME3}$$

Aqui o q nos estão a pedir é $E_M(0) - E_M(t_1)$ Para $t=0$ temos então,

$$E_M(0) = \frac{1}{2} m \dot x_G^2(0) + \frac{1}{2} J_G \dot\theta^2(0) + \frac{1}{2}K\Delta l^2 + m g h_G(0)$$

$\dot x_G(0)=0$ está parado inicial/ ; $\dot\theta(0)=0$ está parado inicial/





Aqui se nós aproximarmos o $\cos\theta \approx 1$ no final teremos que $\Delta E_{P,g} = 0$ o que não é verdade então $\cos\theta \approx 1$

$$E_M(0) = \underbrace{\frac{1}{2} K l^2 \theta^2}_{E_{P,e}(0) = 3{,}154} + \underbrace{m_t g \frac{l}{2}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)}_{E_{P,g}(0) = 1{,}876} \Rightarrow \boxed{E_M(0) = 5{,}030\ J} \qquad m_t = m_b + m_c$$

Para $t = t_1 = 0{,}03447\ s$ $\qquad \theta(t_1) = 0$ (está a passar pela posição ...)

$$E_M(t_1) = \frac{1}{2} m_t \dot{x}_G^2(t_1) + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2(t_1) + \frac{1}{2} K_{eq} \theta^2 + (m_t g h_G)$$

$\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)$

mas nós não sabemos este, só sabemos $J_0 = J_G + m_t\left(\frac{l}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow J_G = J_0 - m_t\left(\frac{l}{2}\right)^2$

∴ A equação acima fica então

$$E_M(t_1) = \frac{1}{2} m_t \left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[J_0 - m_t\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\dot{\theta}^2 + \overbrace{(m_b + m_c) g \frac{l}{2}}^{= E_{P,g} \text{ anterior} = \text{cte}}$$

$$E_M(t_1) = \cancel{\frac{1}{2} m_t \left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2} + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 - \cancel{\frac{1}{2} m_t \left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2} + E_{P,g}$$

$$E_M(t_1) = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2(t_1) + E_{P,g}$$

para regime livre eq. (3.39) $\quad \dot{\theta}(t_1) = A e^{-\xi \omega_n t}\left[\omega_n \cos(\omega_d t - \phi - \psi)\right]$ (3.40)

0,14 ; 50,134 ; 0,14049 ; 0,2644 ; 0,03447 ; 49,64

$\psi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{(1-\xi^2)^{1/2}}{\xi}\right) \Rightarrow \boxed{\psi = 1{,}430}$

$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}(t_1) = -10{,}304\ rad/s}$

Assim,

$$E_M(t_1) = \frac{1}{2} \underbrace{J_0}_{0{,}03585} \underbrace{\dot{\theta}^2(t_1)}_{+10{,}304^2\ (?)} + \underbrace{E_{P,g}}_{1{,}942} \Rightarrow \boxed{E_M(t_1) = 3{,}8451\ J}$$

A energia dissipada é $\underbrace{E_M(t_0)}_{5{,}03} - \underbrace{E_M(t_1)}_{3{,}84} = \underline{1{,}1848\ J}$

Nota: visto que no final se pretendia uma dif. de energias e a $\Delta E_{P,g} \approx 0$ nem era preciso calculado.

$$\frac{\overbrace{E_{P_g}(0)}^{1{,}876} - \overbrace{E_{P_g}(t_1)}^{1{,}942}}{\underbrace{\Delta E_M}_{1{,}1848}} \times 100 = 5{,}6\ \%$$

Outra maneira de calcular ΔE_M era fazer direta/

$$\Delta E_M = \frac{1}{2} J_0 \overset{\approx 0}{\dot{\theta}^2(0)} + \frac{1}{2} K l^2 \theta^2(0) + mg\frac{l}{2}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) - \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2(t_1) - \frac{1}{2} K l^2 \overset{\approx 0}{\cancel{\theta^2(t_1)}} - \cancel{mg\, l\cos\theta(t_1)}_{=1}$$

$$\Delta E_M = \frac{1}{2}\underbrace{\left(Kl^2 - mg\frac{l}{2}\right)}_{K_{eq}}\theta^2(0) - \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2(t_1)$$

$$\Delta E_M = \frac{1}{2} K_{eq}\theta^2(0) - \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2(t_1) = 1{,}1848\ J$$

(desprezando E_{Pg}) (parado)

$$\Delta E_M = \Delta E_p + \Delta E_c \Rightarrow \Delta E_M = \overset{\approx 0}{\cancel{E_p(t_1)}} - E_p(0) + E_c(t_1) + \overset{=0}{\cancel{E_c(t_0)}}$$

$$\Delta E_M = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{x}_{G,i}^2 + \sum \frac{1}{2} J_{G,i}\dot{\theta}^2 -$$

(massa concentrada)

$$= \frac{1}{2} m_b \dot{x}_{G,b}^2 + \frac{1}{2} m_c \dot{x}_{G,c}^2 + \frac{1}{2} J_{G,b}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\overset{=0}{\cancel{J_{G,c}}}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K\Delta l^2 = -1{,}2514\ J$$

$0{,}82$ $\quad 0{,}5 \quad \frac{m_b l^2}{12} \quad 1022{,}8$

$10{,}304 \quad \dot{\theta}\frac{l}{2} \approx 0{,}3 \quad \dot{\theta}\frac{l}{2} \quad \frac{15\cdot\pi}{180}\cdot l$

Se a isto somarmos a ΔE_{Pg} dá igual

$$E_{Pg}(0) = mg\frac{l}{2}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = 1{,}94238 \qquad \theta \approx \frac{15}{180}$$

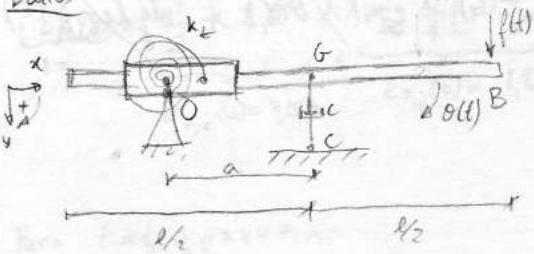
$$E_{Pg}(t_1) = mg\frac{l}{2}\left(1 - \cancel{\frac{\theta^2}{2}}\right) = 1{,}8758$$

$\Delta E_{Pg} = 0{,}06656$

$$-1{,}2514 + 0{,}06656 = -1{,}1848\ J$$

AULA TP9 - SISTEMA C/ 1GL - REGIME FORÇADO HARMÓNICO 12/Mar/2

Dados



$m_{barra} = 1{,}25$ kg

$J_O^c = 4{,}05 \cdot 10^{-2}$ kg m²

$k_t = 2$ Nm/rad

$c = 6{,}5$ Ns/m

$a = 0{,}12$ m

$l = 0{,}5$

a) Determinar Eq. do movito

Análise já foi feito na aula 19/Fev $\underbrace{J_O}_{m_{eq}} \ddot\theta(t) + \underbrace{ca^2}_{c_{eq}} \dot\theta(t) + \underbrace{k_t}_{k_{eq}} \theta(t) = \underbrace{\left(a + \frac{l}{2}\right) F}_{F_{eq}}$

b) Determinar a frequência de ressonância (ω_r)

a correspondente amplitude do deslocato do ponto G

Análise Para poderimos usar as fórmulas diretas dos apontamentos temos de ver se a equação do movito é semelhante à usada na dedução delas.

Neste caso corresponde.

! se a força por exemplo fosse $\omega F\cos\omega t$ já ñ se podiam usar as expr diretas dos apontamentos

$\omega_r = \omega_n (1 - 2\xi^2)^{1/2} \Rightarrow \boxed{\omega_r = 4800 \text{ rad/s}}$

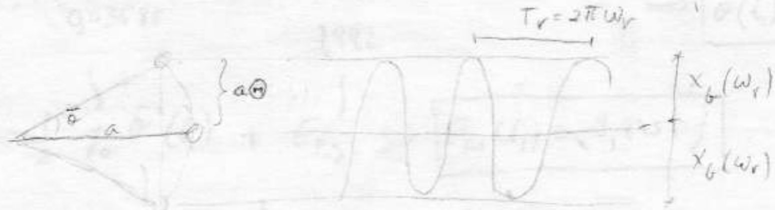
$\xi = \frac{c_{eq}}{c_c}$, $c_{eq} = ca^2$ ($c = 6{,}5$, $a^2 = 0{,}12^2$), $c_c = 2 m_{eq} \omega_n$ ($\omega_n = 4865$, $m_{eq} = J_O = 4{,}05 \cdot 10^{-2}$) $\Rightarrow \boxed{\xi = 0{,}1138}$

$\left(\frac{k_{eq}}{m_{eq}}\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{\omega_n = 4865 \text{ rad/s}}$

$k_t = 2$, $J_O \approx 4{,}05 \cdot 10^{-2}$

$\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t)$

$\theta_p(t) = \Theta(\omega) \cos(\omega t \ldots$



$X_G(\omega_r) = a\Theta(\omega_r)$

$\Theta(\omega) = \Theta_s \mu(\omega)$ — deslocato ~~fator~~ estático

$X(\omega) = X_s \mu(\omega)$ — deslocato estático

obtidos da eq. do movito aceleração e velocid e c/ a parte cte da força

tirando aceleração e velocid da eq. do movito (situação estática)

X_s: deslocato estático provocado por 1 força estática de grandeza idêntica à amplitude da força dinâmica harmónica $f(t)$

$k_t \theta_s = \left(a + \frac{l}{2}\right) F \Rightarrow \boxed{\Theta_s = 0{,}185F \text{ rad}}$ ($k_t = 2$, $a = 0{,}12$, $l = 0{,}5$)

como estamos a considerar o $\omega_r \Rightarrow \mu$ é máx $\Rightarrow \mu(\omega_r) = \mu_{max}$ ver fig. 47

Temos então ou então $\frac{\Theta_s}{\left((1-\beta_r^2)^2+(2\xi\beta_r)^2\right)^{1/2}} = 0{,}8181F$

$\beta_r = \frac{\omega_r}{\omega_n}$

$X_b(\omega_r) = a\,\Theta(\omega_r) \Longrightarrow \boxed{X_b(\omega_r) = 0{,}09818F}$

$a = 0{,}12$

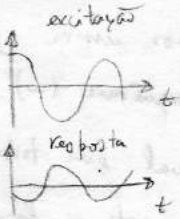
$\Theta(\omega_r) = \Theta_s \mu_{máx}$, $\Theta_s = 0{,}185$

$\mu_{máx} \overset{(4.31)}{=} \frac{1}{2\xi(1-\xi^2)^{1/2}} \Rightarrow \boxed{\mu_{máx} = 4{,}4224}$

$\Longrightarrow \boxed{\Theta(\omega_r) = 0{,}8181F \text{ rad}}$

c) Determinar A frequencia de excitação ω e respetiva amplitude $\Theta(\omega)$ de modo q o desfazalo ϕ entre a excitação e a resposta seja $135°$.

Análise



Usando a eq. 4.22

$\phi = tg^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta}\right)$ ← máquina n consegue resolver...

$\xi = 0{,}1138$

$\phi = \frac{135\cdot\pi}{180}$

$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$, $\omega_n = 4865$

ela já resolve se fizermos $tg\,\phi = (\ldots)$, ↑ descobri depois

$\boxed{\begin{array}{l} tg(a) = b \\ a = tg^{-1}(b) \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} ax^2+bx+cx=0 \\ x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{array}}$

$tg(\phi) = \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \Longleftrightarrow \beta^2 tg\phi + 2\xi\beta - tg\phi = 0$

$\Longrightarrow \beta = \frac{-\cancel{2}\xi \pm \sqrt{(2\xi)^2 - \cancel{4}tg\phi\cdot(-tg\phi)}}{\cancel{2}tg\phi} \Longrightarrow \cancel{\beta = -0{,}893} \;\vee\; \boxed{\beta = 1{,}1203}$

nunca pode ser negativa (uma frequência nunca toma valores negativos, são ciclos/segundo)

$\boxed{\omega = 5450 \text{ rad/s}}$

$\Theta(\omega) = \Theta_s\,\mu$, $\Theta_s = 0{,}185F$

$\mu = \frac{1}{\left[(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2\right]^{1/2}} \Rightarrow \boxed{\mu = 2{,}7727}$

$\Longrightarrow \boxed{\Theta(\omega) = 0{,}5129F \text{ rad}}$

d) Determinar a força $f_c(t)$ transmitida ao apoio C e a sua amplitude em função da freq.

Análise básica/ é a força q o amortecedor exerce na barra, já vista antes

? (1) $f_c(t) = c\,a\,\dot\theta(t)$

(!) cuidado para não usar o c_{eq}! A força de 1 amortecedor é c· veloc//.

$\theta(t) = \Theta(\omega)\cos(\omega t - \phi)$

$\dot\theta(t) = \Theta(\omega)\,\omega\,\text{sen}(\omega t - \phi)$ } derivando

$\xrightarrow[\text{pondo em coseno (assim podemos comparar melhor o desfazalo c/ a força)}]{} \Theta(\omega)\,\omega\cos(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2})$

A eq. (1) fica então

$135° = \frac{3}{4}\pi$

$$f_c(t) = \underbrace{\underset{6,5}{c}\,\underset{0,12}{a}\,\overset{\sim 0,5124F}{\Theta(\omega)}\,\underset{5,45}{\omega}}_{\text{amplitude}} \cos\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{f_c(t) = \underbrace{2,18F}_{F(5,45)} \cos\left(5,45t - \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\text{significado?}}\right) N}$$

significado?

$$F(\omega) = c a \omega \Theta(\omega)$$

nós queremos $\forall \omega$

$$\Theta_1 \mu = \underbrace{0,175F}_{\Theta_1} \cdot \overbrace{\frac{1}{\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]^{1/2}}}^{\mu}$$

$$F(\omega) = c a \omega \cdot 0,175F \cdot \mu$$

$\frac{\omega_n}{\omega_n}$

$$\boxed{F(\omega) = \omega_n c a \underbrace{\frac{\omega}{\omega_n}}_{\beta} \cdot 0,175F \cdot \mu} \quad (2)$$

se respondêssemos assim já ñ estava... Nós temos a frequência (ω) no β e ... para pô-la igual em todo o lado (p... ao representar sob a forma gráfica ... ñ se punha nas décimas?) e como ... nos tê-la sob a forma adimensio...

e) Determinar $F(\omega, \xi)$

Análise $\xi = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{ca^2}{2J_0\omega_n} \Rightarrow c = \frac{2\xi J_0 \omega_n}{a^2}$ por na ...

$$F(\omega, \xi) = \omega_n \cdot \frac{2\xi J_0 \omega_n}{a^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{a}\,\beta \cdot \underbrace{0,175}_{\frac{a + l/2}{k_t}} F \cdot \mu$$

↓ daqui para a frente é simplificar

$$F(\omega, \xi) = \cancel{\omega_n^2} J_0 \frac{(a + l/2)}{a\,k_t} F + 2\xi\beta\mu \qquad \omega_n^2 = \frac{k_t}{J_0}$$

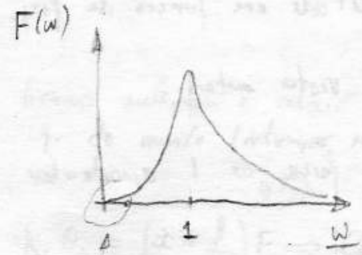
$$F(\omega, \xi) = \underbrace{\frac{a + l/2}{a}}_{\frac{[m]}{[m]}\cdot[N]\ \checkmark} \cdot F + 2\xi\beta\mu$$

adimensional

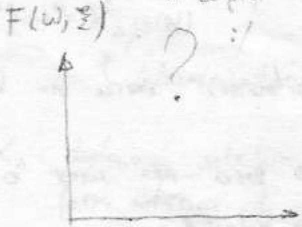
função de ω e ξ

$\Delta(\omega)$

GRÁFICOS



ñ copiei :/



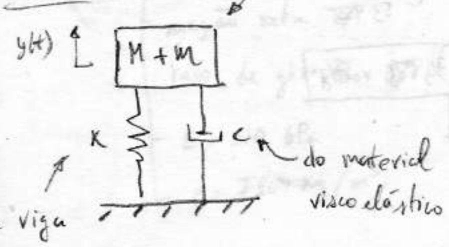
(!) No exame geral só são pedi... gráficos para os quais já e... algum semelhante na sebenta

$\omega \to 0 \Rightarrow \dot{\theta} \to 0 \Rightarrow$ o amortecedor ñ faz força

(ñ há velocid. ñ há força)

AULA TP 10 - RESPOSTA ~~HARMÓNICA~~ PROVOCADA POR 1 DESIQUILÍBRIO 18/Mar/2014

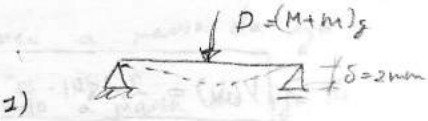
Dados Modelo



a) **Determinar** ω_n

$$\left(\frac{K_{eq}}{m_{eq}}\right)^{1/2} \quad (1)$$

K_{eq} ↳ K; m_{eq} ↳ $M+m$



$P = K\delta \Rightarrow K = \dfrac{(M+m)g}{\delta}$

$\Rightarrow \boxed{K = 53\,955 \text{ N/m}}$

O q é q relaciona 1 força c/ 1 deslocamento? : rigidez ? q fórmula é esta?

$M = 10$ kg

$m = 1$ kg

$\delta_{\text{viga a meio vão}} = 2$ mm

$\xi = 0,1$

$\omega = 675$ rpm

de (1) $\Rightarrow \boxed{\omega_n = 70,036 \text{ rad/s}}$

Aqui neste caso era óbvio q $K_{eq} = K$ e $m_{eq} = M + m$ mas geral/ n é, e por isso convém escrever a eq. do mov. 1º

b) **Determinar** a amplitude da vibração estacionária do motor

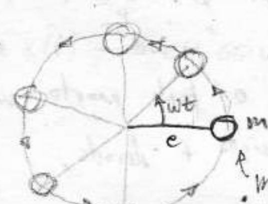
- o desfasamento da resposta em relação à excitação
- a expressão do movimento $y(t)$ em regime estacionário / permanente

Análise vou escrever a eq. do mov q já devia ter feito em cima.

$$(M+m)\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx = f(t)$$

como determinar isto? (força q o motor exerce

$+ \omega = 2\pi$



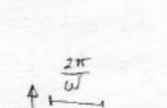
massa do motor concentrada no centro de massa

Só nos interessa a componente vertical da força q o motor exerce no sistema

$F_y = m a_y = q_y$

a_y: $\ddot{y}$ — quantid. de aceleração 2º y

$y = e \operatorname{sen}(\omega t)$



$\dot{y} = +e\omega \cos(\omega t)$

$\ddot{y} = -e\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) \Rightarrow q_y = -me\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t) = f(t)$

A eq. do mov fica então

$$\underbrace{(M+m)}_{m_{eq}}\ddot{x}(t) + \underset{c_{eq}}{c}\dot{x}(t) + \underset{K_{eq}}{K}x = \underbrace{-me\omega^2}_{F_{eq}}\operatorname{sen}(\omega t)$$

(!) $F_{eq}(\omega)$ por isso é preciso cuid/ pq nem sempre dá p/ usar as fórmulas diretas/

? como é q o prof. sabia q podia usar a da p. seguinte?

começa por ser pedido $Y(\omega) = \dfrac{Y_1}{\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]^{1/2}}$ (4.17) $\dfrac{F}{K} \Rightarrow \boxed{Y_1 = 4{,}63 \cdot 10^{-4}\ m}$

$(Y(\omega) = Y_1 \cdot \mu)$ (4.21)

$F \sim m e \omega^2$, $m = 1$, $e = 50 \cdot 10^{-3}$, $\omega \sim 70{,}686$; $K \sim 53\,955$

$\xi = 0{,}1$; $\dfrac{\omega}{\omega_n}$, $\omega \sim 675 \cdot \dfrac{\pi}{30}$ $\boxed{\omega = 70{,}686\ rad/s}$

$\boxed{\beta = 1{,}0093}$

$\Rightarrow \boxed{Y(\omega) = 2{,}2841 \cdot 10^{-3}}$

depois é pedido ϕ

$$\phi = tg^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right) \Rightarrow \phi = -1{,}4785\ rad \Leftrightarrow -84{,}7^\circ$$

($\xi = 0{,}1$; $\beta = 1{,}0093$)

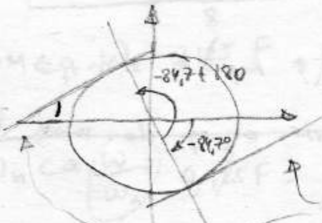
! $tg\,\phi = \dfrac{sen\,\phi}{cos\,\phi}$ apesar de $2\xi\beta$ n ser um seno nem $1-\beta^2$ ser um coseno têm de ter mesmo sinal. P. ex

$cos(-84{,}7) > 0 \Rightarrow 1-\beta^2 > 0 \Rightarrow \beta < 1$ mas $\beta = 1{,}...$

Então a solução n é $\phi = -84{,}7^\circ$ mas sim

$\phi = -84{,}7 + 180 = 95{,}28...$

$\boxed{\phi = 1{,}663}$



$tg(\phi) = tg(\phi + \pi)$

(se virmos para o seno tb o sinal estava ao contrário)

falta a $y_p(t) = Y(\omega)\, sen(\omega t - \phi)$ $\Rightarrow$ $y_p(t) = 2{,}284 \cdot 10^{-3}\, sen(70{,}686 t - 1{,}6...)$

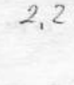
($Y(\omega) = 2{,}2841 \cdot 10^{-3}$, $\omega = 70{,}686$, $\phi = 1{,}663$)

! atenção a isto podemos ser induzidos a por coseno pq é assim está na fórmula, se a excitação é $(\dots)\,sen(\omega t)$ a resposta está desfazada ϕ $y_p = (\dots)\,sen(\omega t - \phi)$ ou $y_p = (\dots)\,cos...$

c) <u>Determinar</u> o tempo decorrido desde o ponto morto superior da massa excêntrica q a viga atinja a posição + elevada.

<u>Análise</u> velocid ser da massa : ω

$\omega t = 2\pi$ ou $sen(\omega t) = 1$



$\omega t = \dfrac{\pi}{2} + 2K\pi$

qdo é q a viga atinge o ponto + elevado

qdo é q máx $y_h + y_p$?

máx $\underbrace{Y(\omega)}_{cte}\, sen(\omega t - \phi) = 1$

? é esta?

isto acontece qdo

$\omega t - \phi = \dfrac{\pi}{2} + 2K\pi$

Chamando t_1 aos tempos em q a massa passa pelo PMS

" t_2 " " " q a viga " " ponto + alto

Como a resposta está atrasada $t_2 > t_1$ $\quad t_2 - t_1 = \left[\left(\dfrac{\pi}{2} + \phi + 2K\pi\right) - \left(\dfrac{\pi}{2} + 2K\pi\right)\right] \cdot \omega^{-1}$

$$t_2 - t_1 = \frac{\phi}{\omega} = 0{,}~~0532~~\ 02353\ s$$

($\phi \sim 1{,}663$, $\omega \sim 70{,}686$)

27

$$M_v = \rho V = \rho A l$$ with $\rho = 7800$, $l = 1,8$

$$i = \left(\frac{I}{A}\right)^{1/2}$$ anexo D1, $(1,4 \cdot 10^{-4})^{1/2}$

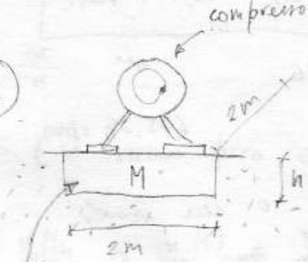
$$\boxed{A = 2,2248 \cdot 10^{-4}\ m^2} \Rightarrow \boxed{m_v = 3,12\ kg}$$

$$K = \frac{P}{\delta} = \frac{48EI}{l^3} \Rightarrow \boxed{I = 3,121}$$ with $K = 53955$, $E = 210 \cdot 10^9$, $l = 1,8$

$$\Rightarrow \omega_n = 65,5283 \Rightarrow \xi = 0,033666 \Rightarrow \beta_r = 1,00114 \Rightarrow \omega_r = 65,6027$$

? O prof usou o β_r anterior... pq?

(2)



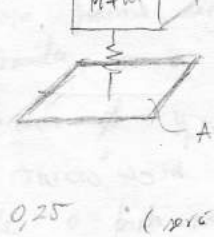
Dados
$m_{compressor} = 934\ kg$
$\omega = 1800\ rpm$
$\rho_{betão} = 2402\ kg/m^3$
$K_{solo} = 2,036 \cdot 10^7\ N/m^3$

(está-se a considerar o resto, sem ser o solo infinito/rígido)

Determinar "h" para q a transmitida para o solo se reduza 75% relativ/ a não ter o bloco betão.

! ñ confundir isto c/ transmis. do deslocam.

Análise Podemos modelar isto assim



$$k = K_s A = 8,144 \cdot 10^7\ N/m$$

A força transmitida será $1 - 1 \cdot 0,75 = 0,25$ (será 25% da força aplicada)

$$TR_{(força)} = \frac{F_T}{F}$$ ← amplitude da força transmitida; F ← amplitude da solicitação aplicada

$$(4.53)\quad TR = \frac{\left[1 + (2\xi\beta)^2\right]^{1/2}}{\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]^{1/2}} = \frac{1}{|1-\beta^2|}$$ ($\xi = 0$), $TR = 0,25$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 2,236}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow \boxed{\omega_n = 84,30\ rad/s}$$ with $\beta = 2,236$, $\omega = 1800 \cdot \frac{\pi}{30}$

$$\omega_n = \left(\frac{k_{eq}}{m_{eq}}\right)^{1/2} \Rightarrow m_{eq} = 1,146 \cdot 10^4\ kg \Rightarrow M = 10526$$ ($m_{eq} = M + m$)

$$M = \rho V = \rho A h \Rightarrow \boxed{h = 1,096\ m}$$ with $M = 10526$, $\rho = 2402$, $A = 4$

Ao ↑ a massa do betão, ↑ a inércia do conjunto e isso diminui a força p/ solo?...

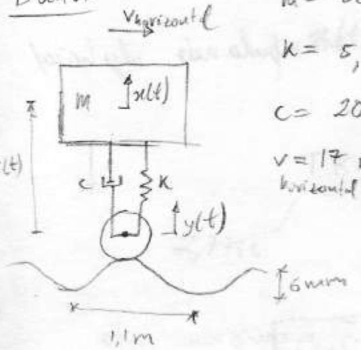
Dados

$m = 500\,kg$

$K = 5{,}25 \cdot 10^6\ N/m$

$c = 20 \cdot 10^3\ Ns/m$

$v = 17\ m/s$ horizontal



a) Determinar a equação do movimento do atrelado

[1] DCL na posição de eq. estático e determinação das forças nas molas que atuem nesta posição

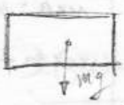
força da mola eq. estático, equilibra o peso

$K(y_0 - x_0) = F_{K,\text{estático}}$

! Nota relativa aos sinais: se dizemos $\uparrow(\ldots)$, qdo $(\ldots) > 0$ a força tem o sentido do desenho. No início $x(0) = x_0 < 0$ e $y_0 = 0$ e a força da mola é para cima. Para os 2 estarem de acordo $\rightarrow \underset{x_0}{\overset{+}{=}} K(y_0 - x_0)$

[2] escolher sentido positivo p/ deslocamento, velocidade e aceleração

[3] DCL durante deslocamento $\uparrow$ c positivo partir da posição de eq. estático



Mas ade for feito p/ desloc. negativo, mesmo deve ser o q é influencia ?

$\uparrow K[(y_0 - x_0) + y(t) - x(t)]$

$\uparrow c[\dot{y}(t) - \dot{x}(t)]$

Aplicando a 2ª Lei de Newton $\Sigma \underline{F} = \dot{\underline{Q}} = m\underline{a} = m\ddot{\underline{x}}(t)$

como é tudo 2º a direção vertical, em x de estar a escrever os vetores $\begin{bmatrix}0\\(\ldots)\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\(\ldots)\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\(\ldots)\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\(\ldots)\\0\end{bmatrix}$

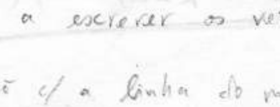
fica-se só c/ a linha do meio

$$\underbrace{\cancel{-mg} + \cancel{K(y_0 - x_0)}}_{=} + K(y - x) + c(\dot{y} - \dot{x}) = m\ddot{x} \qquad (1)$$

! Muitas vs nos enunciados é dito "o G.L. é referenciado à posição de equilíbrio estático", i.e. q $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$. Se não for dito nada, devemos assumir q assim é. Portanto p/ este caso teríamos saltado o passo [1] e chegava-se logo à eq. (1) sem mg e $K(y_0 - x_0)$, q podia ser retirado diretal da sebenta

? Na aula o prof. disse q n podíamos fazer isso se tivéssemos 1 carro ao alto isto é 1 caso em q temos mov harmónico da base

q dp rodava e ai ficava 1 momento e já n era a mola q equilibrava o peso ??



$y(t) = Y\cos\omega t$

$\dot{y}(t) = -Y\omega\,\text{sen}\,\omega t$

Re arranjando a eq. (1) p/ 1 forma q é + útil e substituindo $y(t)$ e $\dot{y}(t)$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = KY\cos\omega t - cY\omega\,\text{sen}\,\omega t$$

! só podemos considerar q o mov é harmónico pq a vecte e o xão é sinusoidal

? b
?
? A
?b.

Pode-se representar o termo da d.ª de (2) de forma + compacta manipulando alge

$$Y(k\cos\omega t - c\omega\,\text{sen}\,\omega t) \iff$$

$$\iff Y\left[\frac{k\cos\omega t}{(k^2+(c\omega)^2)^{1/2}} - \frac{c\omega\,\text{sen}\,\omega t}{(k^2+(c\omega)^2)^{1/2}}\right]\left[k^2+(c\omega)^2\right]^{1/2} \qquad (3)$$

A: este termo é amp ≤ 1 B: este termo é amp ≤ 1 (para k e $c\omega > 1$) ? prof. ñ mencionou isto

$A^2 + B^2 = 1$ Portanto comportam-se como coseno/seno. Para ficar igual aos apontados xame-se $\cos\gamma = \frac{k}{[k^2+(c\omega)^2]^{1/2}}$ $\text{sen}\,\gamma = \frac{c\omega}{[k^2+(c\omega)^2]^{1/2}}$

Nota: identid. trigon. $\cos a\cdot\cos b - \text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b = \cos(a+b)$

$\cos\omega t\cdot\cos\gamma - \text{sen}\,\omega t\,\text{sen}\,\gamma = \cos(\omega t+\gamma)$ (3) fica então

$Y(k+c^2\omega^2)^{1/2}\cos(\omega t+\gamma)$ e a equação do movito

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = Y(k^2+c^2\omega^2)^{1/2}\cos(\omega t+\gamma)} \qquad (7)$$

b) Determinar a frequência de excitação do sistema, ω

Análise $\left.\begin{array}{l}\lambda = 1{,}1\,m\\ v = 17\,m/s\end{array}\right\}$ $T = \frac{1{,}1}{17} = 0{,}06471\,s$ $T\omega = 2\pi \Rightarrow \boxed{\omega = 97{,}104\ \text{rad/s}}$

c) Determinar a transmissibilid. dos movitos absoluto (TR) e relativo (TR_{rel})

Análise $TR = \frac{[1+(2\xi\beta)^2]^{1/2}}{[(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2]^{1/2}} \Rightarrow \boxed{TR = 2{,}7786}$ $\xrightarrow{\text{NOTA:}}$ A amplitude do pavito é de 6mm de a pico e a da carr é quase 18mm ...

$\boxed{\xi = 0{,}19518} \Leftarrow \frac{c_{eq}}{c_c}$, $c_{eq} = 20\cdot10^3$, $c_c = 2m_{eq}\omega_n$, $m_{eq} = 500$ $\qquad \frac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow \boxed{\beta = 0{,}9476}$, $\omega = 97{,}104$

$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$, $k = 5{,}25\cdot10^6$ $\Rightarrow \boxed{\omega_n = 102{,}47\ \text{rad/s}}$

$$TR_r = \frac{\beta^2}{[(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2]^{1/2}} \Rightarrow \boxed{TR_r = 2{,}34}$$

útil p. ex. p/ transdutores de vi q ñ medem o deslocato relativo

? bo ?

? D

? Ar m

? b

? E para fazer o i) pelo caminho A?

$y = Y\cos\omega t \qquad \dot{y} = -Y\omega \operatorname{sen}\omega t$

$$f_T(t) = K\left(Y\cos(\omega t) - X(\omega)\cos(\omega t - \varphi)\right) + c\left(-\omega Y \operatorname{sen}\omega t - \omega X(\omega)\operatorname{sen}(\omega t - \varphi)\right)$$

f) <u>Determinar</u> a velocidade da carruagem correspondente à ressonância de amplitude deslocado.

$v_r = \frac{\lambda}{2\pi}\omega_r$ (!) Aqui podíamos ser tentados a usar $\omega_r = \omega_n(1-2\xi^2)^{1/2}$ (vin do capítulo "Regime harmónico", p/ o sistema c/ excitação passiva

mas se virmos a eq. do movimento, a amplitude da força F ñ depende de ω, aqui depen (e isso altera a 2ª fórmula)

(!) 1º, há ω_r para regime livre pq se um corpo vibrar à sua mercê, vibra sempre à

Para o capítulo desta matéria temos fórmula p/ $\beta_r = \frac{\omega_r}{\omega_n} \Rightarrow \boxed{\omega_r = 99{,}01 \text{ rad/s}} \Rightarrow \boxed{V_r = }$

ω_n = 102,47

$$\frac{1}{2\xi}\left[(1+8\xi^2)^{1/2} - 1\right]^{1/2} \Rightarrow \boxed{\beta_r = 0{,}9662}$$

É a esta v as molas vão s fora da carruag

Os amortecedores deixaram de funcionar

g) <u>Determinar</u> i) a velocidade a adotar p/ q a amplitude da resposta seja igual

ii) representação gráfica de TR

i) portanto $X(\omega) = cte = 8{,}3358 \cdot 10^{-3}$ m

$$\underbrace{TR \cdot \underbrace{Y}_{3\cdot 10^{-3}}}_{2{,}7786} \qquad \underbrace{TR}_{2{,}7786} = \frac{\left[1 + (\cancel{2\xi\beta})^2\right]^{1/2}}{\left[(1-\beta^2)^2 + (\cancel{2\xi\beta})^2\right]^{1/2}} \Rightarrow 2{,}7786 = \frac{1}{|1-\beta^2|}$$

$$2{,}7786 = \frac{1}{\pm(1-\beta^2)}$$

$\frac{1}{1-\beta^2}$, $(1-\beta^2 > 0 \Rightarrow \beta < 1) \rightarrow \beta = 0{,}8005 \Rightarrow v = 14{,}35$ m/s

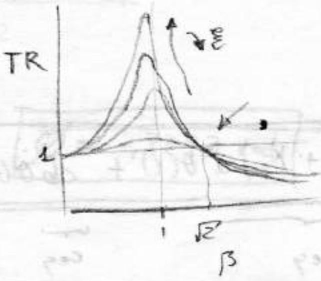
$\frac{1}{\beta^2 - 1}$, $(1-\beta^2 < 0 \Rightarrow \beta > 1) \rightarrow \beta = 1{,}16616 \Rightarrow v = 20{,}92$

h) Determinar a velocid a partir da qual a amplitude da resposta é inferior à do fraválo

Análise $X(\omega) < Y \Rightarrow TR = \frac{X(\omega)}{Y} < 1 \Rightarrow TR = \frac{1}{|1-\beta^2|} < 1$

$\cancel{\beta < -\sqrt{2}} \lor \beta > \sqrt{2}$

(!) também se pode ver isto pelo gráfico

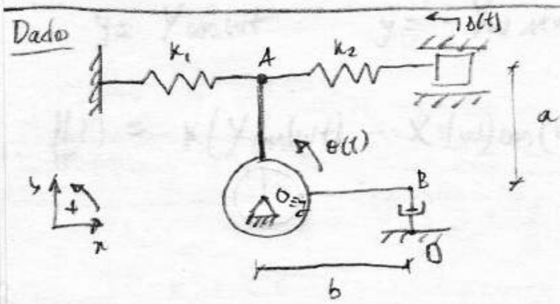


EXTRA: tempo q̄ passa desde $y(t)$ max até $x(t)$ max ou $z(t)$ max

AULA TP 12

25/MAR/2014

Dado



$k_1 = 800\ N/m$ $\quad J = 0{,}1\ kg\,m^2$

$c = 10\ Ns/m$ $\quad a = 0{,}25\ m$

$k_2 = 2400\ N/m$ $\quad b = 0{,}20\ m$

$s(t) = S\cos\omega t$ $\quad S = 8\ mm$

a) Determinar eq. do mov/o — Análise já foi feita na aula 19/02 mas faça-se no instante.

[1] Em eq. estática ñ há forças a atuar

[2] (+)

[3] $\Sigma M_O = K_O \Rightarrow -F_{k_1}a - F_{k_2}a - F_c b = J\ddot{\theta}$

$-a^2 \operatorname{sen}\theta - a(-a\operatorname{sen}\theta + s(t)) - b^2\operatorname{sen}\dot{\theta} = J\ddot{\theta}$

(quando isto é positivo F_{k_1} tem sentido contrário ao convencionado positivo)

re arranjando fica

$$\boxed{\underbrace{(k_1+k_2)a^2}_{K_{eq}}\theta(t) + \underbrace{cb^2}_{c_{eq}}\dot{\theta}(t) + \underbrace{J_O}_{m_{eq}}\ddot{\theta}(t) = \underbrace{k_2\, a\, S\cos\omega t}_{F_{eq}}}$$

b) Determinar w_n, w_d, ξ — Análise

$w_n = \left(\frac{K_{eq}}{m_{eq}}\right)^{1/2}$, $(k_1+k_2)a^2 \Rightarrow \boxed{K_{eq} = 200\ N/m}$, $J_O \sim 0{,}1$ $\Rightarrow \boxed{w_n = 44{,}72\ rad/s}$

$w_d = w_n(1-\xi^2)^2$

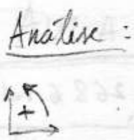
$\frac{c_{eq}}{c_c}$: $cb^2 \Rightarrow \boxed{c_{eq} = 0{,}4\ Ns/m}$; $2m_{eq}w_n \Rightarrow \boxed{c_c = 8{,}9\ Ns/m}$

$\Rightarrow \boxed{\xi = 0{,}04472} \Rightarrow \boxed{w_d = 44{,}677\ rad/s}$

c) Determinar a expressão p/ o movi/o linear estacionário (regime permanente) do ponto quando $\omega = 8\ Hz$

(!) Notas: neste exercício podíamos ser tentados a usar as expressões do v.q p/ frente. Mas se compararmos esta eq. do mov. c/ a desse capítulo, vê-se q são mto diferentes. Apesar de serem ambos de excitação passiva, aqui $F_{eq} \neq f(\omega)$ (ñ é função de ω) o altera as expressões.

Análise: $x_A(t) = -a \operatorname{sen}\theta \simeq -a\,\theta(t)$ Como é q o θ varia c/ o tempo?



→ quando a excitação é harmónica, a resposta é harmónica tb c/ a mesma frequência.

$\theta(t) = (\ldots)\cos(\omega t - \phi)$

? prof ñ pôs.

amplitude da resposta $= \Theta(\omega)$ então $\boxed{x_A(t) = -a\,\Theta(\omega)\cos(\omega t - \phi)\ \text{m}}$ (eq. 4.20)

Θ_1, μ

$\dfrac{F_{eq}}{K_{eq}} \Rightarrow \boxed{\Theta_1 = 0{,}024 \text{ rad}}$ (4,8 / 200)

$\boxed{\mu = 3{,}548}$

$\dfrac{1}{\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]^{1/2}}$

0,04472

$\boxed{\Theta(\omega) = 0{,}085 \text{ rad}}$

$8 \cdot \dfrac{2\pi}{1} \Rightarrow \boxed{\omega = 50{,}265 \text{ rad/s}}$

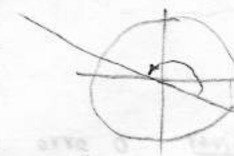
$\dfrac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow \boxed{\beta = 1{,}12397}$ (ω_n = 44,72)

$tg^{-1}\dfrac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \Rightarrow \phi = -0{,}36$ rad

≈ −20°

$tg = \dfrac{\operatorname{sen}}{\cos}$

$\boxed{\phi = 2{,}7797 \text{ rad}}$



−20° sen<0 mas $2\xi\beta > 0$ ⟸ $\phi = -0{,}36 + \pi$

A expressão fica então

$\boxed{x_A(t) = -0{,}0213\cos(50{,}265t - 2{,}7797)}$

d) Determinar a força transmitida pela mola ao apoio C

Análise $f_{K_1}(t) = -K_1\,a\,\theta(t)$ (K_1 = 800; $\theta(t) = \Theta(\omega)\cos(\omega t - \phi)$, $\Theta(\omega)$ = 0,085, ω = 50,265, ϕ = 2,7797) $\Rightarrow \boxed{f_{K_1}(t) = -17{,}03\cos(50{,}265t - 2{,}7797)}$

? prof ñ pôs (−)

e) Determinar a força transmitida pelo amortecedor ao apoio D

Análise $f_c(t) = c\,b\,\dot\theta(t) \Rightarrow \boxed{f_c(t) = -8{,}56\operatorname{sen}(50{,}265t - 2{,}7797)}$

$\dfrac{d}{dt}\left(\Theta(\omega)\cos(\omega t - \phi)\right) \Rightarrow \dot\theta(t) = -\omega\,\Theta(\omega)\operatorname{sen}(\omega t - \phi)$

f) Determinar i) a amplitude máx de resposta no ponto A e ii) a freq a q ocorre

Análise a amplitude máx ocorre à freq. ressonância ω_r

ii) (4.32) $\omega_r = \omega_n(1 - 2\xi^2)^{1/2} \Rightarrow \boxed{\omega_r = 44{,}676 \text{ rad/s}}$

É esta a eq. q corresponde à nossa eq. do movi/o, i.e. a eq. do mov para a qual a 4.32 foi deduzida é semelhante à nossa.

i) $X_A(\omega_r) = \overset{0{,}25}{a}\,\Theta(\omega_r)$ — $\Theta_s\,\mu_{máx}$

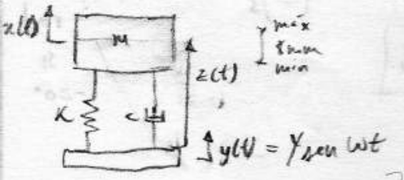
amplitude máx ocorre a ω_r

$0{,}024$ — $\dfrac{1}{\left[(1-\beta_r^2)^2 + (2\xi\beta_r)^2\right]^{1/2}} \Rightarrow \boxed{\mu_{máx} = 11{,}188}$ $\Rightarrow \boxed{\Theta(\omega_r) = 0{,}2686 \text{ rad}}$

$\Rightarrow \boxed{X_A(\omega_r) = 0{,}06715 \text{ m}}$

$0{,}04472$ — $\dfrac{\omega_r}{\omega} \Rightarrow \boxed{\beta_r = 0{,}9989}$

(2) Dados



$\omega_n = 8$ rad/s
$\xi = 0{,}2$
$\omega = 40$ rad/s

a) Determinar Y

$Z(\omega) = 4$ mm — $\frac{40}{8} \Rightarrow \beta =$

$TR_r = \dfrac{Z(\omega)}{Y} = \dfrac{\beta^2}{\left[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2\right]^{1/2}}$

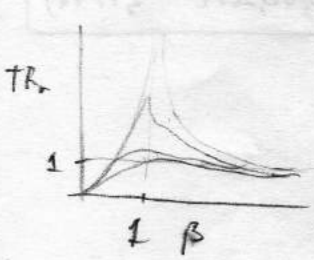
$\boxed{TR_r = 1{,}038}$

$\boxed{Y = 3{,}853 \text{ mm}}$

b) Determinar o erro cometido ao considerar Y como sendo $Z(\omega)$

$\dfrac{|4 - 3{,}85|}{4} \Rightarrow 3{,}85\ \%$

c) Determinar o procedimento p/ atenuar ~~esse~~ erro $\Rightarrow TR_r = 1$ Figura [illegible]



$\uparrow \beta = \dfrac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow \downarrow \omega_n = \left(\dfrac{k_{eq}}{m_{eq}}\right)^{1/2}$ $\downarrow k$ $\uparrow m_{eq}$ $\Rightarrow \beta$

(Notar que o objetivo é alterar apenas o transdutor de vibrações que mede as vibrações c/ < erro. Não faz muito sentido alterar o ω do motor ou o que for só para o transdutor que tenha [illegible])

*' então é melh usar um transdutor c/ mola + flexível e + pesado (+ [illegible] + espaço). É por isso que este tipo de transdutor de vibrações [illegible] Em eng. mec "é" + acelerómetros.

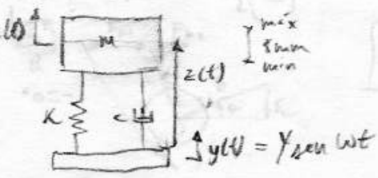
i) $X_A(\omega_r) = \overset{0{,}25}{a}\,\widetilde{\Theta(\omega_r)}$ $\Theta_s\,\mu_{máx}$ $\left\{ \dfrac{1}{\left[(1-\beta_r^2)^2 + (2\overset{0{,}024}{\xi}\beta_r)^2\right]^{1/2}} \right.$ $\Rightarrow \boxed{\mu_{máx} = 11{,}188}$ $\Rightarrow \boxed{\Theta(\omega_r) = 0{,}268}$

amplitude máx ocorre a ω_r

$\Rightarrow \boxed{X_A(\omega_r) = 0{,}067}$

$0{,}04472$ $\dfrac{\omega_r}{\omega} \Rightarrow \boxed{\beta_r = 0{,}9989}$

(2) Dados



$\omega_n = 8 \text{ rad/s}$
$\xi = 0{,}2$
$\omega = 40 \text{ rad/s}$

a) Determinar Y

$Z(\omega) = 4 \text{ mm}$

$\dfrac{40}{8} \Rightarrow \beta$

$TR_r = \dfrac{Z(\omega)}{Y} = \dfrac{\beta^2}{\left[(1-\beta^2)^2 + (2\,\xi\beta)^2\right]^{1/2}}$ $\quad 0{,}2$

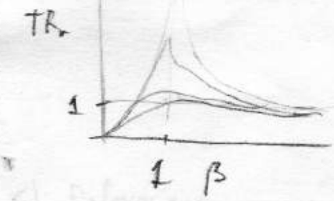
$\boxed{TR_r = 1{,}038}$

$\boxed{Y = 3{,}853 \text{ mm}}$

b) Determinar o erro cometido ao considerar Y como sendo $Z(\omega)$

$\dfrac{|4 - 3{,}85|}{4} \Rightarrow 3{,}85\,\%$

c) Determinar o procedim. p/ diminuir esse erro $\Rightarrow TR_r \approx 1$ Figura 4.22

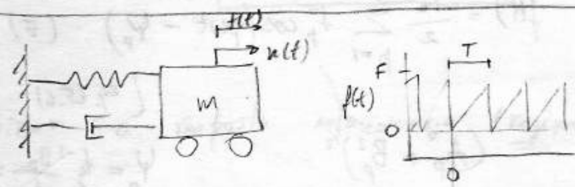


$\nearrow \beta = \dfrac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow \searrow \omega_n = \left(\dfrac{K_{eq}}{m_{eq}}\right)^{1/2} \begin{matrix}\searrow K \\ \nearrow m_{eq}\end{matrix} \Rightarrow$ *'

(Notar q o objetivo é alterar apenas o transdutor de maneira q as vibrações c/ < erro. Ñ faz muito sentido alterar o ω do ... ou o q for só para o transdutor q temos medir melhor)

*' então é melh usar um transdutor c/ mola + flexível e + pesado (→ ocupa + espaço). É por isso q este tipo de transdutor de vibrações se usa + em civil. Em eng. é + acelerómetros.

Dados



a) Determinar i) a solicitação periódica em série de Fourier

ii) o respetivo espetro

Análise i) Relembrar AM3

valor médio da função

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \overset{ME3}{\Longrightarrow} f(t) = \frac{F_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos(p\omega t) + B_p \operatorname{sen}(p\omega t) \quad (1)$$

$$\boxed{a_0} = \frac{1}{T}\int_{Li}^{LS} f(x)\,dx \overset{ME3}{\Longrightarrow} \boxed{F_0} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt \quad (2)$$

$$\boxed{a_n} = \frac{2}{T}\int_{Li}^{LS} f(x)\cos(mx)\,dx \overset{ME3}{\Longrightarrow} \boxed{A_p} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(p\omega t)\,dt \quad (3)$$

$$\boxed{b_n} = \frac{2}{T}\int_{Li}^{LS} f(x)\operatorname{sen}(mx)\,dx \overset{ME3}{\Longrightarrow} \boxed{B_p} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(p\omega t)\,dt \quad (4)$$

função par $f(x) = f(-x)$ $\boxed{b_n = 0}$

função ímpar $f(x) = -f(-x)$ $\boxed{a_0, a_n = 0}$

ME3 $a_0 = \frac{F_0}{2}$

$n, m = p\omega$

$x = t$

$$f(t) = \frac{F-0}{T-0}\cdot t$$

$$(2)\quad F_0 = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{F}{T} t\,dt \Rightarrow \frac{2F}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=T} \Rightarrow F_0 = \frac{2F}{T^2}\left[\frac{T^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] \Rightarrow F_0 = \frac{2F}{2} \Rightarrow \boxed{F_0 = F}$$

(Bastava olhar p/ gráfico p/ ver q o valor médio era $\frac{F}{2}$

$$(3)\quad \boxed{A_p} = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{F}{T} t\cos(p\omega t)\,dt = \frac{2F}{T^2}\left[\frac{\cos(p\omega t) + p\omega t \operatorname{sen}(p\omega t)}{p^2\omega^2}\right]_{t=0}^{t=T} =$$

$$= \frac{2F}{T^2p^2\omega^2}\left[\cos(p\omega t) + p\omega T \operatorname{sen}(p\omega T) - 1 - 0\right] \underset{T\omega = 2\pi}{=} \frac{2F}{4\pi^2p^2}\Big(\underbrace{\cos(2\pi p)}_{1} + 2\pi p \underbrace{\operatorname{sen}(2\pi p)}_{=0} - 1\Big) \Rightarrow \boxed{A_p = 0}$$

$$(4)\quad \boxed{B_p} = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{F}{T} t \operatorname{sen}(p\omega t)\,dt = \frac{2F}{T^2p^2\omega^2}\left[\operatorname{sen}(p\omega t) - p\omega t\cos(p\omega t)\right]_{t=0}^{t=T} = \frac{2F}{T^2p^2\omega^2}\left(\operatorname{sen} p\omega T - p\omega T\cos p\omega T - 0 - 0\right)$$

$$\underset{T\omega = 2\pi}{=} \frac{\cancel{T}\,2F}{\cancel{T^2}p^2 4\pi^2}\Big(\cancel{\operatorname{sen}(2\pi p)}^{=0} - 2\pi p \underbrace{\cos(2\pi p)}_{1}\Big) = \frac{-\cancel{4\pi} pF}{p^2 \cancel{4}\pi^2} = \frac{-F}{p\pi}$$

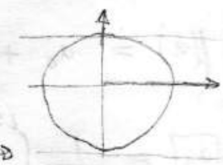
A equação (1) pode ser expressa de outra forma $f(t) = \frac{F_0}{2} \sum_{p=1}^{\infty} F_p \cos(p\omega t - \varphi_p)$ (5)

(eq. (5.6)

$$\boxed{F_p = \frac{F}{p\pi}} \Leftarrow (A_p^2 + B_p^2)^{1/2}, \quad A_p = 0 \qquad \varphi_p = tg^{-1}\frac{B_p}{A_p} \Rightarrow ?, \quad A_p = 0$$

$$tg\,\varphi = \frac{sen\,\varphi}{cos\,\varphi} = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}} \Leftarrow B_p = sen\,\varphi < 0$$



A (5) fica então $\boxed{f(t) = \frac{F}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{F}{\pi p}\cos(p\omega t + \frac{\pi}{2})}$

ii) Para definir o espectro de magnitude é preciso saber a magnitude de cada harmónico (p

A magnitude de cada harmónico é dada por $F_p (= \frac{F}{\pi p})$

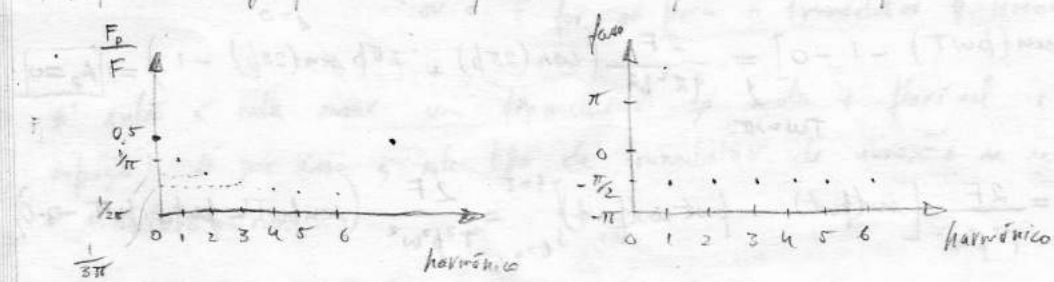
A fase é dada por $\varphi_p (= -\frac{\pi}{2})$ * do harmónico p

p	amplitude/ magnitude*	fase*
0	$F/2$	—
1	F/π	$-\pi/2$
2	$F/2\pi$	$-\pi/2$
⋮	⋮	⋮

↑ notar q está a decrescer

b) Representar a série de Fourier c/ dif. nº de harmónicos (o termo de (TC) está sempre p

c) Representar gráfico/ o espectro de magnitude e de fase



d) Determinar a eq. diferencial do movimento

A eq. diferencial de movimento para uma solicitação periódica f(t) escreve-se na forma (eq. 5.7)

$$m_{eq}\ddot{x}(t) + c_{eq}\dot{x}(t) + K_{eq}x(t) = \frac{F_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} F_p \cos(p\omega t - \varphi_p)$$

Qe para aqi fica $\boxed{m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \frac{F}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{F}{p\pi}\cos(p\omega t + \frac{\pi}{2})}$

e) Determinar a resposta estacionária (regime permanente) do sistema

(eq. 5.13) $$x(t) = \frac{F}{2K} + \sum_{p=1}^{\infty} X_p(\omega)\cos(p\omega t - \psi_p - \phi_p)$$

$p\beta$

$\operatorname{tg}^{-1}\frac{2\xi\beta_p}{1-\beta_p^2}$

$$X_{sp}\cdot\mu \qquad \frac{1}{\left[(1-\beta_p^2)^2 + (2\xi\beta_p)^2\right]^{1/2}}$$

$\frac{F}{p\pi}$

$\frac{F_p}{K_{eq}}$

$$x(t) = \frac{F}{2K} + \underbrace{\frac{F}{1\cdot\pi}\cdot\frac{1}{(\dots)}\cos(1\cdot\omega t + \frac{\pi}{2} - (\dots))}_{p=1} + \underbrace{\frac{F}{2\pi}\cdot\frac{1}{(\dots)}\cos(2\cdot\omega t + \frac{\pi}{2} - (\dots))}_{p=2} + \dots$$

$\beta_p(p=1)$ $\beta_p(p=1)$ $\beta_p(p=2)$ $\beta_p(p=2)$

Note: nós normal/ só usamos uns poucos termos. O desprezar ou não certos termos depende da sua amplitude F_p no caso da força e $X_p(\omega)$ no caso da resposta. No caso da força $p\uparrow \Rightarrow F_p\downarrow$. Para $X_p(\omega)$, $p\uparrow \Rightarrow X_{sp}\downarrow$. μ é $\uparrow\uparrow$ quando $\beta_p\approx 1$ isto é quando $p\cdot\omega$ está próximo da de ressonância.

No exame costumam pedir a resposta usando só 1 termo função do tempo, o que quer dizer q temos de calcular F_0 (p/ termo cte), o 1º harmónico e o harmónico para o qual $\beta_p\approx 1$. Comparar as magnitudes dos 2 e escolher o q tem >.

f) Representar grafica/ para os 1ºs 6 harmónicos $\frac{F_p}{F}$, $\frac{X_p}{X_s}$ — amplitude do harmónico p da resposta

i) $\omega_n = 0{,}8\omega$; $\xi = 0{,}05$

ii) $\omega_n = 4{,}1\omega$; $\xi = 0{,}05$

$$\frac{F_p}{F} = \frac{1}{p\pi} \qquad \frac{X_p}{X_s} = \frac{1}{p\pi}\frac{1}{\left[(1-p^2\beta^2)^2 + (2\xi p\beta)^2\right]^{1/2}}$$

$\boxed{X_{sp} = \frac{F}{p\pi K}}$ $\quad \frac{F}{K}\ X_s \quad \frac{X_p}{X_s} = \frac{1}{p\pi}\cdot\mu$

1, 2, 3, 4, 5, 6

$0{,}05$ i) $\frac{1}{0{,}8}$ ii) $\frac{1}{4{,}1}$

Qual o p p/ o qual $p\omega\approx\omega_r$?

$\omega_r = \omega_n(1-2\xi^2)^{1/2}$ $\Rightarrow$ i) $\omega_r = 0{,}8\omega\cdot 0{,}9975 = 0{,}798\omega$

$\xi = 0{,}05$, $(1-2\xi^2)^{1/2} = 0{,}9975$

ii) $\omega_r = 4{,}1\omega\cdot 0{,}9975 = 4{,}09\omega$ ← freq. de ressonância muito próxima da do 4º harmónico

para $\omega_r\approx p\omega$, o harmónico de ordem p cria condições de ressonância no sistema $\Rightarrow$ a amplitude X_p pode ser predominante (comparar c/ o 1º)

p	1	2	3	4	5	6
F_p/F	0,318	0,159	0,106	0,0796	0,0637	0,0531
i) X_p/X_s	0,5524	0,0303	0,0051	0,0033	0,0017	0,0010
ii) X_p/X_s	0,8383	0,2084	0,2256	0,7313	0,1268	0,0461

← podemos c/ alguma segurança [dizer] q̄ uma boa aproximação é dada pelo termo cte e pelo 1º harmónico (ver q̄ a amplitude $X_2 \approx \frac{1}{10} X_1$, o 2 e os seguintes já quase não influenciam)

amplitude do 4º harmónico da resp é o + importante

(para uma boa aproximação p/ este caso se calhar precisávamos do termo cte e dos 5 1ºs harmónicos, (sendo q̄ a partir do 4º decai sempre)

ver p. 104 sebenta

os harmónicos a partir da freq. de ressonância costumam ser pouco importantes

Então se no exame for pedida a resposta faz-se

$$x(t) = \frac{F}{2K} + \sum_{p=1}^{\infty} X_p(\omega) \cos\left(p\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi_p\right)$$

e agora escolhe-se o harmónico q̄ + influencia a resposta (caso ii)

veríamos q̄ o $p\omega \approx 4{,}09\,\omega_n$ $p=4$

$\beta_1 = p \cdot \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{1}{4{,}1} = 0{,}2438$

Então comparar $X_1(\omega)$ e $X_4(\omega)$. O harmónico q̄ tiver > amplitude é o q̄ vai ser apresentado na resposta.

$\beta_4 = 4 \cdot \frac{1}{4{,}1} = 0{,}975$

$$X_1(\omega) = \frac{F}{1 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_1^2)^2 + (2\xi\beta_1)^2}} = 0{,}344\,F$$

$$X_4(\omega) = \frac{F}{4 \cdot \pi} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_4^2)^2 + (2\xi\beta_4)^2}} = 0{,}7313\,F$$

é o maior

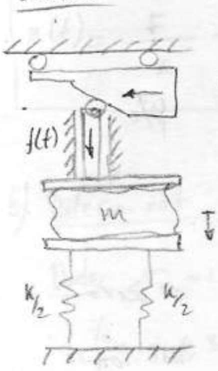
$\phi_4 = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$ sen > 0, cos > 0

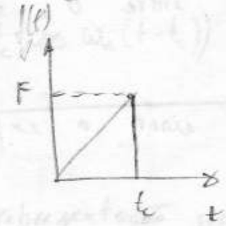
= 1,

$$x(t) \approx \frac{F}{2K} + 0{,}7313\,F \cos\left(4\omega t + \frac{\pi}{2} - 1{,}119\right)$$

//

Dados





a) Determinar resposta $x(t)$ à solicitação para

i) $0 < t < t_c$

ii) $t > t_c$

Análise O q nós fizemos até agora

$m_{eq}\ddot{x}(t) + c_{eq}\dot{x}(t) + k_{eq}x(t) = 0$ regime livre

$= f(t)$ harmónica ($F\cos\omega t$)

$= f(t)$ periódica ← séries de Fourier

$= f(t)$ qualquer ← integral de Duhamel

A expressão (6.18) dá-nos a resposta do sistema c/ qq cond. iniciais e sujeito a qq força.

Como não são dadas as condições iniciais ⟹ assumir q são zero ⟹ $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$

como o sistema ñ tem amortecedor ⟹ $\xi = 0$, $\omega_d = \omega_n(1-\xi)^{1/2} \Rightarrow \omega_d = \omega_n$ e a (6.18) fica

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{sen}\,\omega_n(t-\tau)\,d\tau \quad (1)$$

tempo p/ analisar a força*

tempo p/ analisar a resposta*

$$f(\tau) = \begin{cases} \dfrac{F-0}{t_c-0}\,\tau, & 0 \le t \le t_c \quad i) \\ 0, & t > t_c \quad ii) \end{cases}$$

i) $x(t) = \dfrac{F}{t_c m\omega_n}\displaystyle\int_0^t \tau\,\mathrm{sen}[\omega_n(t-\tau)]\,d\tau \quad (2)$

$\mathrm{sen}\,\omega_n t \cdot \cos\omega_n\tau - \mathrm{sen}\,\omega_n\tau \cdot \cos\omega_n t$

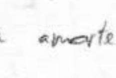
$\mathrm{sen}(a \pm b) = \mathrm{sen}(a)\cos(b) \pm \mathrm{sen}(b)\cos(a)$
$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b)$

(2) fica então

$$x(t) = \frac{F}{t_c\omega_n m}\int_0^t \tau\cos\omega_n\tau\,\mathrm{sen}\,\omega_n t - \tau\,\mathrm{sen}\,\omega_n\tau\,\cos\omega_n t\,d\tau$$

Fazendo assim dá grandes combóios. A tentar integração p/ partes

nós queremos poder analisar a resposta p/ qq t. Se nós puséssemos t_c já ñ podíamos saber a resposta em t_1 por exemplo pq integravamos até t_c



$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ onde $u = \tau$ $\quad du = d\tau$

$dv = \mathrm{sen}\,\omega_n(t-\tau) \quad v = \dfrac{1}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\tau)$ então,

$$\left[\frac{\tau}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\tau)\right]_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t \frac{1}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\tau)\,d\tau = (\ldots) + \frac{1}{\omega_n^2}\Big[\mathrm{sen}\,\omega_n(t-\tau)\Big]_{\tau=0}^{\tau=t} = \quad (4)$$

$$= \left(\frac{t}{\omega_n}\underbrace{\cos\omega_n\cdot 0}_{=1}\right) - \left(\frac{0}{\omega_n}\cos(\ldots)\right) + \left(\frac{1}{\omega_n^2}\,\mathrm{sen}\,\omega_n\cdot 0\right) - \frac{1}{\omega_n^2}\,\mathrm{sen}\,\omega_n t = \frac{t}{\omega_n} - \frac{\mathrm{sen}\,\omega_n t}{\omega_n^2}$$

* nós podemos ter resposta depois da força ter acabado. Por isso é como se precisássemos de 1 escala temporal ∀ cada 1.

introduzindo em (1) $\boxed{x(t) = \frac{F}{m\omega_n^2 t_c}\left(t - \frac{sen\,\omega_n t}{\omega_n}\right)}$ ← (3) esta expressão permite sa[ber a] posição da massa p/ qq t entre 0 e tc.

ii)

Métodos de resolução

$\boxed{1}$: como aqui passamos a estar em regime livre podemos usar a expressão p/ resposta em regime livre sistema ñ amortecido (3.24)

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi)$$

$$A = \left[x^2(0) + \left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \phi = tg^{-1}\left(\frac{\dot{x}(0)}{x(0)\,\omega_n}\right)$$

Mas p/ o nosso caso o zer[o] corresponde a tc, isto é, nós ra[...]

- buscar $x(t_c)$ à (3) $\Leftrightarrow x(0)$
- derivar (3) e fazer $\dot{x}(t_c) \Leftrightarrow \dot{x}(0)$

Portanto estas fórmulas são p/ $x(t=0)$ mas no nosso caso está $x(t=t_c)$, então o q[ue] queremos é ter algo q seja zero qdo $t = t_c \Rightarrow x(t-t_c) = A\cos[\omega_n(t-t_c) - \phi]$

Assim o tempo t_c é o novo zero

$$A = \left[x^2(t_c) + \left(\frac{\dot{x}(t_c)}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \phi = tg^{-1}\left(\frac{\dot{x}(t_c)}{x(t_c)\ldots}\right)$$

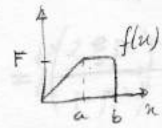
? $\boxed{2}$ (6.18)

$$x(t) = x(t_c)\cos\omega_n(t-t_c) + \frac{\dot{x}(t_c)}{\omega_n}\,sen\,\omega_n(t-t_c) + 0$$

? podíamos fazer assim certo?

$\boxed{3}$ aplicar a (1)

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t f(\tau)\,sen\,\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$ ← p/ resolver isto pensar



$$\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^a \frac{F}{a}x\,dx + \ldots + \int_b^x 0\,dx$$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^{t_c}\frac{F}{t_c}\cdot\tau\,sen\,\omega_n(t-\tau)\,d\tau + \int_{t_c}^t 0\cdot \cancel{sen\,\omega_n(t-\tau)}^{=0}\,d\tau$$

Aqui dá p/ ver a necessid de 2 espaços temporais. Nós temos uma resposta em t m[as a] força já acabou em t_c.

O integral faz-se da mesma maneira q o anterior exceto os limites de integração

Pegando em (4) mas c/ os limites $\begin{smallmatrix} t_c \\ 0 \end{smallmatrix}$

$$\left\{\left[\frac{\tau}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\tau)\right]_{\tau=0}^{\tau=t_c} + \frac{1}{\omega_n^2}\left[sen\,\omega_n(t-\tau)\right]_{\tau=0}^{\tau=t_c}\right\}\cdot\frac{F}{m\omega_n t_c} = x(t)$$

$$x(t) = \frac{F}{m\omega_n t_c}\left[\left(\frac{t_c}{\omega_n}\cos\omega_n(t-t_c)\right) - \left(\frac{0}{\omega_n}\overset{\delta=0}{\cos(\ldots)}\right) + \left(\frac{1}{\omega_n^2}\cdot \operatorname{sen}\omega_n(t-t_c)\right) - \left(\frac{1}{\omega_n^2}\cdot \operatorname{sen}\omega_n t\right)\right]$$

?

$$\boxed{x(t) = \frac{F}{k}\,\frac{1}{t_c}\left[\left(t_c\cos\omega_n(t-t_c)\right) + \frac{1}{\omega_n}\operatorname{sen}\omega_n(t-t_c) - \frac{1}{\cancel{\omega_n}}\operatorname{sen}\omega_n t\right]} \quad (5)$$

b) Determinar a representação gráfica da resposta adimensional $\frac{x(t)}{\frac{F}{k}}$ do sistema até $t=5\,s$

resposta adimensional

Dados $T_n = 1\,s$ (período natural)

i) $\frac{t_c}{T_n} = 0{,}3$ ii) $\frac{t}{T_n} = 3$

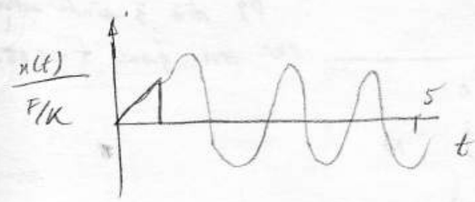
$$\left.\begin{aligned}\omega_n &= \frac{2\pi}{T_n}\\ \omega_n^2 &= \frac{k}{m}\end{aligned}\right\}$$ substituindo em (3) e (5) $x(t) = \frac{F}{k}\,\frac{1}{t_c}\left(t - \frac{T_n}{2\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{T_n}t\right)$

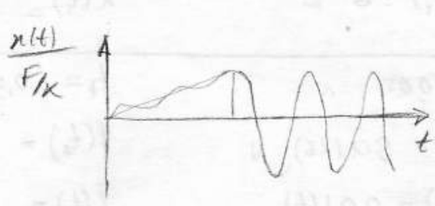
para $0 \le t \le t_c$ $$\boxed{\frac{x(t)}{F/k} = \frac{1}{t_c}\left(t - \frac{T_n}{2\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{T_n}t\right)}$$

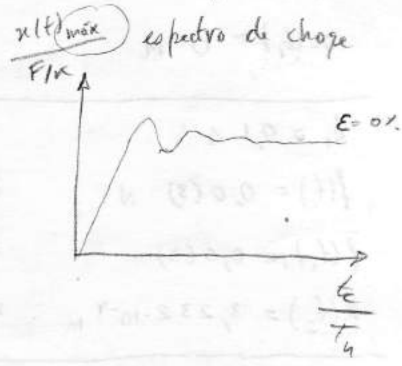
$$\boxed{\frac{x(t)}{F/k} = \frac{1}{t_c}\left(t_c\cos\frac{2\pi}{T_n}(t-t_c) + \frac{T_n}{2\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{T_n}(t-t_c) - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{T_n}t\right)}$$ para $t > t_c$

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,8	1
$\frac{x(t)}{F/k}$								

é uma representação da resposta máxima em função da freq. ou do tempo





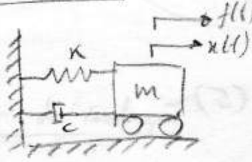


ver p. 127

2/ABR/2014

AULA TP 15

Dado



$m = 1\,kg$

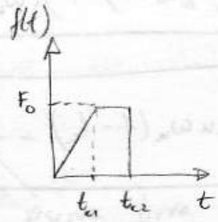
$T_n = 1\,s$

$\xi = 0{,}05$

$F_0 = 1\,N$

$t_{c_1} = 3\,s$

$t_{c_2} = 6\,s$



a) Determinar a resposta do sistema até $t = 12\,s$ usando método da integração directa da eq. movi. por diferenças finitas.

Análise aplicar o algoritmo do MDF (p. 138)

- Condições iniciais em $t=0$. Ñ é dito nada logo $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$
- cálculo de $\ddot{x}(0) = \frac{1}{m}\left(\overset{=0}{f(0)} - c\overset{=0}{\dot{x}(0)} - k\overset{=0}{x(0)}\right) = 0$
- seleccionar o passo de integração $\Delta t < \Delta t_{cr}$ → normal/ usa-se $\Delta t = \frac{T_n}{10} \Rightarrow \Delta t = 0{,}1\,s$

Vamos usar 3 Δt diferentes

$\Delta t = 0{,}1\,s$	$\Delta t = 0{,}05\,s$	$\Delta t = 0{,}5\,s$
$a_0 = 100$	$a_0 = 400$	$a_0 = 4$
$a_1 = 5$	$a_1 = 10$	$a_1 = 1$
$a_2 = 200$	$a_2 = 800$	$a_2 = 8$
$a_3 = 0{,}005$	$a_3 = 0{,}00125$	$a_3 = 0{,}125$
$\bar{m} = 100 + \pi$	$\bar{m} = 400 + 2\pi$	$\bar{m} = 4 + 0{,}2\pi$
$t_0 = 0\,s$	$t_0 = 0\,s$	$t_0 = 0\,s$
$f(t_0) = 0\,N$	$f(t_0) = 0\,N$	$f(t_0) = 0\,N$
$\bar{f}(t_0) = 0$	$\bar{f}(t_0) = 0$	$\bar{f}(t_0) = 0$
$x(t_1) = 0\,m$	$x(t_1) = 0\,m$	$x(t_1) = 0\,m$
$t_1 = 0{,}1\,s$	$t_1 = 0{,}05\,s$	$t_1 = 0{,}5\,s$
$f(t_1) = 0{,}0(3)\,N$	$f(t_1) = 0{,}01(6)\,N$	$f(t_1) = 0{,}1(6)\,N$
$\bar{f}(t_1) = 0{,}0(3)$	$\bar{f}(t_1) = 0{,}01(6)$	$\bar{f}(t_1) = 0{,}1(6)$
$x(t_2) = 3{,}232 \cdot 10^{-4}\,m$	$x(t_2) = 4{,}102 \cdot 10^{-5}$	$\bar{x}(t_2) = 0{,}03601$
$t_2 = 0{,}2$	$t_2 = 0{,}1$	$t_2 = 1$
$f(t_2) = 0{,}0(6)\,N$	$f(t_2) = 0{,}0(3)\,N$	$f(t_2) = 0{,}(3)$
$\bar{f}(t_2) = 0{,}1185$	$\bar{f}(t_2) = 0{,}0645$	$\bar{f}(t_2) =$
$x(t_3) = 0{,}00115\,m$	$x(t_3) = 1{,}588 \cdot 10^{-4}\,m$	$x(t_3) =$
$t_3 = 0{,}3$	$t_3 = 0{,}15$	$t_3 = 1{,}5$
$f(t_3) = 0{,}1$	$f(t_3) = 0{,}05$	$f(t_3) = 0{,}5$
$\bar{f}(t_3) =$	$\bar{f}(t_3) =$	$\bar{f}(t_3) =$
$x(t_4) =$	$x(t_4) =$	$x(t_4) =$

$\bar{f}(t) = f(t) - (k - a_2 m)\,x(t) - (a_0 m - a_1 c)\,x(t - \Delta t)$

$x(t + \Delta t) = \frac{\bar{f}(t)}{\bar{m}}$

$f(t) = \frac{F_0}{t_{c_1}} \cdot t \quad t < 3\,s$

? Prof disse que só estamos em t... o erro do Δt... < pq diz que ... em zero quando

$$\xi = \frac{c}{c_{eq}} = \frac{c}{2m\omega_n} \Rightarrow \boxed{c = 0{,}2\pi \ Ns/m} \qquad \omega_n^2 = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{K = 4\pi^2 \ N/m}$$

$\xi = 0{,}05$, $\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$, $m = 1$, $T_n = 1$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{F_1}{t_{c_1}} \cdot t & \text{para } 0 \le t \le t_{c1} \\ F_0 & \text{para } t_{c1} < t \le t_{c2} \\ 0 & \text{para } t > t_{c2} \end{cases}$$

como não vamos passar do t_{c1} no algoritmo

1 $\boxed{f(t) = \frac{1}{3} \cdot t}$

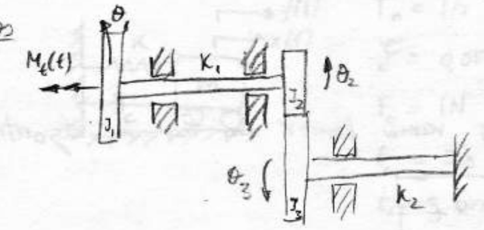
$$\bar{f}(t) = f(t) - (K - a_2 m)\,x(t) - (a_0 m - a_1 c)\,x(t+\Delta t)$$

2 $\boxed{\bar{f}(t) = f(t) - (4\pi^2 - a_2)\,x(t) - (a_0 - 0{,}2\pi a_1)\,x(t - \Delta t)}$

3 $\boxed{x(t+\Delta t) = \frac{\bar{f}(t)}{\bar{m}}}$

AULA TD16 / SISTEMAS c/ 2 G.L.: EQS LAGRANGE; MODOS NAT. VIBRAÇÃO | 8/ABR/

Dados



$J_1 = 0{,}2\ kg\,m^2$

$J_2 = 0{,}05\ kg\,m^2$

$J_3 = 0{,}1\ kg\,m^2$

$K_1 = K_2 = 20\ Nm$

$\frac{r_2}{r_3} = n = 4$

a) Determinar as eqs do movimento do sistema utilizando a mecânica Lagrangiana

Análise: As equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i \quad (1)$$

i: G.L a considerar

Q_i: forças ñ-conservativas a atuar no sistema (alteram a $E_{mec.}$). Se ñ houver atritos são forças e momentos aplicados 2: os G.L.

q_i: coordenada q̄ descreve o G.L

para um sistema c/ n G.L. temos n equações ($i = 1, 2 \ldots n$)

Estas equações permitem-nos chegar às eq. de mov. de qq sistema c/ qq nº de G.L.

Para MEJ:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_{G,i}^2 + \frac{1}{2} J_i \dot{\theta}_i^2\right)$$

(se existir um ponto fixo (0)

$$E_c = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2$$

$$E_p = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2} K_i \Delta l_i^2 + \frac{1}{2} K_{t_i} \theta_i^2\right)$$

trab. virtual de uma força / momento

$\delta W = \underline{F} \cdot \delta\underline{r}$

$\delta W = \underline{M} \cdot \delta\underline{\theta}$

prod. escalar

Para chegar às forças ñ conservativas a melh forma é escrever o trab. virtual

Para este caso fica então

$$E_c = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} K_1 (\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2} K_2 \theta_3^2$$

Mas só há 2 G.L. pq θ_2 depende de θ_3

e se eu pusesse $\theta_2 - \theta_1$?

$E_p \geq 0$

→ é indiferente aqui para este método das Eqs de Lagrange

$\theta_2 r_2 = \theta_3 r_3$

$\theta_3 = n\theta_2$

$\dot{\theta}_3 = n\dot{\theta}_2$

(ñ dá p/ rodar 1 c/ o outro parado, a/ isto partir)

$\theta_1^2 - 2\theta_1\theta_2 + \theta_2^2$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 (J_2 + n^2 J_3)}$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} K_1 (\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2} K_2 n^2 \theta_2^2}$$

expandir p/ ajudar

$$E_p = \frac{1}{2} K_1 \theta_1^2 - K_1\theta_1\theta_2 + \frac{1}{2} K_1 \theta_2^2 + \frac{1}{2} K_2 n^2 \theta_2^2$$

A (1) fica então

$$Q_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta_1} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta_1}$$

$$M_1 = J_1 \ddot{\theta}_1 + K_1(\theta_1 - \theta_2)$$

$$Q_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta_2} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta_2}$$

$$0 = (J_2 + n^2 J_3)\ddot{\theta}_2 \qquad -K_1\theta_1 + K_1\theta_2 + K_2 n^2 \theta_2$$

pq a roda 2 ñ tem nenhum momento aplicado a ela, e houvesse um momento aplicado à roda 3?

As 2 eq. do movimento ficam então (agrupando-as pelas coordenadas p/ depois ser + fácil por isto na forma matricial)

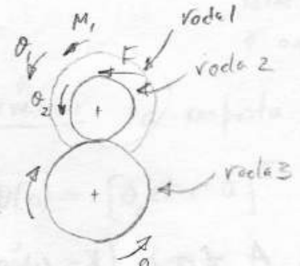
$$J_1\ddot{\theta}_1 + \theta_1 K_1 - \theta_2 K_2 = M_1 \quad (1) \qquad \ddot{\theta}_2(J_2+J_3 n^2) - K_1\theta_1 + \theta_2(K_1+K_2 n^2)$$

na forma matricial fica

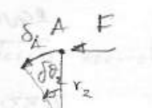
$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2+J_3n^2 \end{bmatrix}}_{\underline{M}}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} +K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1+K_2n^2 \end{bmatrix}}_{\underline{K}}\begin{bmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

(!) $\underline{M}$ e $\underline{K}$ são sempre simétricas

Exemplo extra sobre a determinação das forças ñ conservativas



Como ficavam os trabalhos virtuais?



→ Para forças: $\delta W = F \cdot \delta A$

→ Para momentos: $\delta W = M_1\,\delta\theta_1 - M_3\,\delta\theta_3$

$F \cdot \delta A$
$\delta A = r_2\,\delta\theta_2$

→ escrever as eq. em funções das coordenadas generalizadas q estamos a usar

(A: ponto de aplicação da força F)

$$\delta W = F \cdot \delta A = F r_2\,\delta\theta_2 \quad = N \cdot m \cdot rad \checkmark$$

$$\delta W = M_1\,\delta\theta_1 - M_3\, n\,\delta\theta_2 \quad = Nm \cdot rad = Joules \checkmark$$

→ Juntar os 2 e por em evidência as coordenadas generalizadas

→ O q aparecer a multiplicar pelas variações das coordenadas generalizadas são as forças generalizadas respetivas

$$\delta W = \underbrace{M_1}_{Q_1}\,\delta\theta_1 + \underbrace{(F r_2 - M_3 n)}_{Q_2}\,\delta\theta_2 \ ,$$

---

b) Determinar os modos naturais de vibração.

Análise: modo de vibração i caracteriza-se por
- freq. natural de vibração ω_i
- forma natural de vibração u_{ji} — forma de vibrar do GL j no modo de vibração i

Os modos de vibração tiram-se da eq. do movimento para o regime livre. Caso geral:

vetor q tem as

(3) $\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} = \underline{0}$ eq. diferencial homogénea de solução $\underline{x} = \underline{u}\cos(\omega t - \emptyset)$

Daí vamos tentar obter $\underline{u}_i$ e ω_i

$$\dot{\underline{x}} = -\omega\underline{u}\,\mathrm{sen}(\omega t - \emptyset)$$
$$\ddot{\underline{x}} = -\omega^2\underline{u}\cos(\omega t - \emptyset)$$

pondo em (3)

$$-\omega^2\underline{M}\,\underline{u}\cos(\omega t - \emptyset) + \underline{K}\,\underline{u}\cos(\omega t - \emptyset) = 0$$

(5) $\underbrace{(-\omega^2\underline{M} + \underline{K})}_{C}\underbrace{\underline{u}}_{B}\underbrace{\cos(\omega t - \emptyset)}_{A} = 0$ • tem de ser válido p/ qq t logo $A \neq 0$

• $\underline{u} = 0$ é uma solução mas é qdo estão parados ⇒ $B \neq 0$

• ⇒ $|\underline{K} - \omega^2\underline{M}| = 0$ (4) ← este determinante é tão importante q lhe deram 1 nome: "determinante caraterístico" e o símbolo $\Delta(\omega)$

Dados $J_1 = 0{,}2\ kg\,m^2$ $J_2 = 0{,}05\ kg\,m^2$ $J_3 = 0{,}1\ kg\,m^2$ $K_1 = K_2 = 20\ Nm$ $n=4$

Pondo os valores em (2) as eq. do mov. ficam

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 1{,}65 \end{bmatrix}}_{\underline{m}}\begin{bmatrix} \ddot\theta_1(t) \\ \ddot\theta_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 340 \end{bmatrix}}_{\underline{K}}\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo em (4) a $\underline{m}$ e $\underline{k}$ obtém-se

$$\begin{vmatrix} 20 - 0{,}2w^2 & -20 \\ -20 & 340 - 1{,}65w^2 \end{vmatrix} = 0$$

(na máquina ñ é preciso fazer isto, escreve-se só $\det(\underline{k} - \underline{m}w^2)$ (serve o solve, =0) para ele mostrar a

equação caraterística: (fazer "expand")

$$0{,}33w^4 - 101w^2 + 6400 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_1 = 9{,}4653\ rad/s} \quad \boxed{\omega_2 = 14{,}713\ rad/s}$$

Agora calcular as formas de vibração pela (5) onde $A \neq 0$ $\quad (\underline{K} - \omega_i^2\underline{m})\underline{u}_i = \underline{0}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 20 - 0{,}2w^2 & -20 \\ -20 & 340 - 1{,}65w^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{problema caraterístico}} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1(20 - 0{,}2w^2) - 20u_2 = 0 \\ -20u_1 + (340 - 1{,}65w^2)u_2 = 0 \end{array}$$

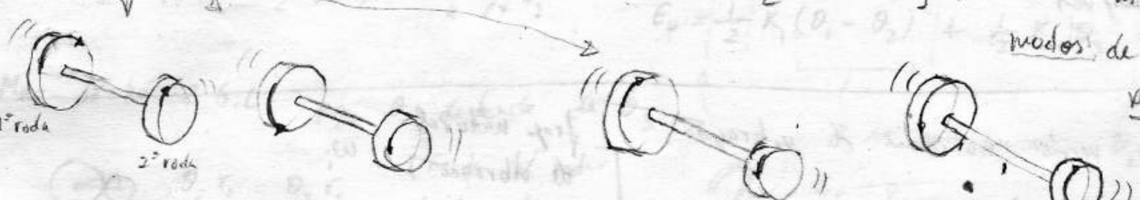
$w = w_1$, $u_2 = 1$ $(u_{21} = 1)$ $\Rightarrow u_1 = 9{,}6086$ (u_{11})

$\Rightarrow u_1 = -0{,}85878$ (u_{12}); $w = w_1$, $u_2 = 1$ $(u_{22} = 1)$

Para a 1ª forma natural de vibração $\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 9{,}6086 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para a 2ª forma natural de vibração $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}85878 \\ 1 \end{bmatrix}$

aos vetores q têm as formas / amplitude dos modos de vibração chama-se vetores modais



A 1ª roda gira quase 10x mais q a 2ª, mas no mesmo sentido

As rodas giram ± o mesmo mas em sentidos opostos.

Lembrar q podemos variar a amplitude, mas estas proporções mantêm-se sempre ctes.

Os modos de vibração ficam final/ dados por: (ver eq. 8.31)

$$\boxed{\underline{\theta}_1(t) = \begin{bmatrix} 9{,}6086 \\ 1 \end{bmatrix}\cos(9{,}4653t - \phi_1)} \qquad (6)$$

$$\boxed{\underline{\theta}_2(t) = \begin{bmatrix} -0{,}85878 \\ 1 \end{bmatrix}\cos(14{,}713t - \phi_2)}$$

c) Determinar a forma normalizada das formas naturais, para massas modais unitárias.
isto é dos vetores modais

Análise

(8.49) $$\underline{\phi}_i = \frac{1}{(\underline{u}_i^T \, \underline{m} \, \underline{u}_i)^{1/2}} \cdot u_i \quad \forall i = 1,2$$

$$\underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 2,1424 \\ 0,22297 \end{bmatrix} \qquad \underline{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -0,64042 \\ 0,74588 \end{bmatrix}$$ Repare-se q $\frac{2,1424}{0,22297} = 9,6086$ $\frac{-0,64054}{0,74587} = -0,85878$ isto é as proporções continuam a ser as mesmas

estes vetores têm exata/ o mesmo significado q os $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$. Só se representa c/ letra dif para distinguir o estarem normalizados.

d) Determinar a resposta livre ou natural do sistema à perturbação inicial

i) $\theta(0) = [0,25 \quad 0]^T \qquad \dot{\theta}(0) = [0 \quad 0]^T$

ii) $\theta(0) = \underline{\phi}_1$ e $\dot{\theta}(0) = [0 \quad 0]^T$

Análise

i) a roda 1 tem uma rotação inicial de 0,25 rad $(\theta_1(0) = 0,25)$ a outra não e estão ambas inicial/ paradas

Não se pode simplesmente substituir $t=0$ e $\theta(0)$ nas (6) pq as equações resultantes de cada uma das expressões dependem entre si. A resposta em regime livre resulta da sobreposição dos dois modos naturais de vibração.

$\underline{\theta}(t) = c_1 \underline{\theta}_1(t) + c_2 \underline{\theta}_2(t)$ É preciso então determinar c_1, c_2, ϕ_1 e ϕ_2 (da eq. (6)) das (8.42a e b) e (8.43 a e b). Nas fórmulas tem U's pq são válidas p/ qq U, mas nós vamos usar p/ a forma normalizada (mas tb podíamos usar os n normalizados só q tínhamos q multiplicar p/ α?)

$$c_1 = \frac{1}{\det \underline{U}} \left[\left(\underbrace{u_{22}}_{0,74587} \underbrace{\theta_1(0)}_{0,25} - \cancel{u_{12}\theta_2(0)}^{=0} \right)^2 + \cancel{\text{termo q depende da veloc}}^{=0} \right]^{1/2} \Rightarrow c_1 = 0,10712$$

$u_{22} = 1$
$0,02388$

$$c_2 = \frac{1}{\det \underline{U}} \left[\left(\cancel{u_{11}\theta_2(0)}^{=0} - \underbrace{u_{21}}_{0,22297} \theta_1(0) \right)^2 + \cancel{\text{termo q depende da veloc}}^{=0} \right]^{1/2} \Rightarrow c_2 = 0,03202$$

$u_{21} = 1$
$0,02348$

$$\begin{bmatrix} 2,1424 & -0,64054 \\ 0,22297 & 0,74587 \end{bmatrix}$$

$$\phi_1 = tg^{-1}\left(\frac{u_{22}\dot{\theta}_1(0) - \cancel{u_{12}\dot{\theta}_2(0)}}{\underbrace{\omega_1 (u_{22}\theta_1(0) - \cancel{u_{12}\theta_2(0)})}_{>0}} \right) \Rightarrow \phi_1 = 0$$

$tg \frac{sen}{cos} > 0$

$$\phi_2 = tg^{-1}\left(\frac{u_{11}\dot{\theta}_2(0) - u_{21}\dot{\theta}_1(0)}{\underbrace{\omega_2 (\cancel{u_{11}\theta_2(0)} - u_{21}\theta_1(0))}_{<0}} \right) \Rightarrow \phi_2 = \pi$$

$tg \frac{sen}{cos} < 0$

A resposta $\overset{\text{regime livre}}{\vee}$ aquelas condições iniciais fica então dada por

$$\theta(t) = 0{,}10712 \begin{bmatrix} 2{,}1424 \\ 0{,}22297 \end{bmatrix} \cos(9{,}465t - 0) + 0{,}05202 \begin{bmatrix} -0{,}64042 \\ 0{,}74588 \end{bmatrix} \cos(14{,}713t -$$

Dados igual ao anterior c/ a diferença $M_1 = M_0 \cos\omega t$

d) Determinar a resposta estacionária do sistema a uma solicitação $M_1(t) = M_0 \cos\omega t$ em função da freq. de excitação

Análise

A equação do movim/o é

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 1{,}65 \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \begin{bmatrix} \ddot\theta_1(t) \\ \ddot\theta_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 340 \end{bmatrix}}_{\underline{K}} \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{M_1}^{M_0\cos\omega t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

(ñ há amortecim/o)

da eq. (9.10)

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_1(\omega) \\ \Theta_2(\omega) \end{bmatrix} \cos\omega t \quad (2) \qquad \frac{Z_{22} \overbrace{F_1}^{M_0} - \cancel{Z_{12} F_2}}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}} \qquad , \ \underline{Z}(\omega) = \underline{K}_{rs} - \omega^2 \underline{M}_{rs} + \cancel{j\omega \underline{C}_{rs}}$$

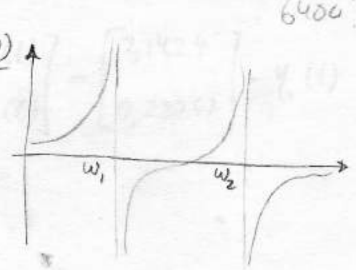
(9.19)

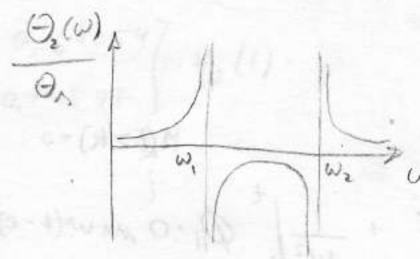
$$\frac{\cancel{Z_{11} F_2} - Z_{12} F_1}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}} \qquad \underline{Z}(\omega) = \begin{bmatrix} \overbrace{20 - \omega^2 \cdot 0{,}2}^{Z_{11}} & -20 \\ -20 & 340 - 1{,}65\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\Theta_1(\omega) = \frac{(340 - 1{,}65\omega^2) M_0}{0{,}33\omega^4 - 101\omega^2 + 6800} = \frac{-5 M_0}{\omega^2 - 100} \qquad \Theta_2(\omega) = \frac{20 M_0}{0{,}33\omega^4 - 101\omega^2 + 6800}$$

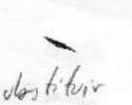
substituir em (2)

6400?





e) Determinar i) a resposta do sistema p/ um momento motor transiente



ii) evidenciar a contribuição dos modos naturais para a resposta

Análise

A vantagem de usar a $\underline{\Phi}$ em vez da $\underline{U}$ é q a $\underline{M}$ se transforma na $\underline{I}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e a K numa matriz diagonal c/ ω_i^2 o q simplifica as contas.

$\underline{m}\ddot{\underline{\theta}}(t) + \underline{K}\,\underline{\theta}(t) = \underline{f}(t)$ fazendo a transf. de coordenadas $\underline{\theta}(t) = \underline{\Phi}\,\underline{\eta}(t)$

$\underline{m}\underline{\Phi}\ddot{\underline{\eta}}(t) + \underline{K}\underline{\Phi}\,\underline{\eta}(t) = \underline{f}(t)$ multiplicando tudo por $\underline{\Phi}^T$

$\underbrace{\underline{\Phi}^T m \underline{\Phi}}_{\underline{1}}\ddot{\underline{\eta}}(t) + \underbrace{\underline{\Phi}^T K \underline{\Phi}}_{\text{matriz c/ os } \omega_i^2}\underline{\eta}(t) = \underline{\Phi}^T \underline{f}(t)$ pondo na forma matricial p/ se ver melh

$$\overbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}}^{\text{nova } \underline{m}}\begin{bmatrix}\ddot{\eta}_1(t)\\ \ddot{\eta}_2(t)\end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{bmatrix}}^{\text{nova } \underline{K}}\begin{bmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_2(t)\end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix}\phi_{11} M_1(t)\\ \phi_{12} M_1(t)\end{bmatrix}}^{\text{nova } N_i(t)} \quad (3)$$

Nota: $\underline{\Phi}$ é a matriz q̃ tem os $\underline{\phi}$'s, i.e., os vetores das formas naturais normalizados p/ massa modal unitária.

Aqi as equações estão desacopladas. Temos 1 eq. só p/ η_1 e outra só p/ η_2, enquanto na (1) tínhamos na mesma 2 eq. mas em ambas aparecia θ_1 e θ_2 p/ causa da $\underline{K}$. Agora calcula-se η_1 e η_2 pelo ∫Duhamel, cap. 6 (IG.L.) Depois andamos p/ trás e calculamos os θ's.

• Para $0 < t < t_c$

$$\eta_i(t) = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t \overbrace{N_i(\tau)}^{\phi_{ii} M_0} \operatorname{sen}\omega_i(t-\tau) = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t \phi_{ii} M_0 \operatorname{sen}\omega_i(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{\phi_{ii} M_0}{\omega_i}\int_0^t \operatorname{sen}(\omega_n t - \omega_n \tau)\, d\tau = \frac{\phi_{ii} M_0}{\omega_i}\left[\cos\omega_i(t-\tau)\right]_0^t =$$

$$\boxed{\eta_i(t) = \frac{\phi_{ii} M_0}{\omega_i^2}(1-\cos\omega_i t)} \quad (4)$$

• Para $t > t_c$

$$\eta_i(t) = \frac{1}{\omega_i^2}\int_0^{t_c} N_i(\tau)\operatorname{sen}\omega_i(t-\tau)\, d\tau + \frac{1}{\omega_i^2}\int_{t_c}^t \phi_{ii}\cdot \underbrace{0}_{M(t>t_c)=0} \operatorname{sen}\omega_i(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{\phi_{ii} M_0}{\omega_i^2}\left[\cos\omega_n(t-\tau)\right]_0^{t_c} \Rightarrow \boxed{\eta_i(t) = \frac{\phi_{ii} M_0}{\omega_i^2}\left[\cos\omega_i(t-t_c) - \cos(\omega_i t)\right]} \quad (5)$$

De (4) ficamos c/ pondo os valores

$$\eta_1(t) = \frac{\overset{2{,}1424}{\phi_{11}} M_0}{\omega_1^2}(1-\cos\overset{9{,}4653}{\omega_1} t) \qquad \eta_1(t) = 0{,}02393\,(1-\cos 9{,}4653t)\, M_0$$

$$\eta_2(t) = \frac{\overset{-0{,}64042}{\phi_{12}} M_0}{\omega_2^2}(1-\cos\underset{14{,}713}{\omega_2} t) \qquad \eta_2(t) = -0{,}002959\,(1-\cos 14{,}713t)\, M_0$$

Mas nós ñ queremos a resposta nas coordenadas modais ($\eta_i(t)$) mas sim nas físicas $\theta_i(t)$

$$\begin{bmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_2(t)\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}\theta_1(t) &= \phi_{11}\eta_1(t) + \phi_{12}\eta_2(t)\\ \theta_2(t) &= \underbrace{\phi_{21}\eta_1(t)}_{1^\circ\text{ modo}} + \underbrace{\phi_{22}\eta_2(t)}_{2^\circ\text{ modo}}\end{aligned}$$

~ contribuição do 2º modo de vibração p/ a resposta do 2º G.L.

Pondo isto de 1 maneira + compacta

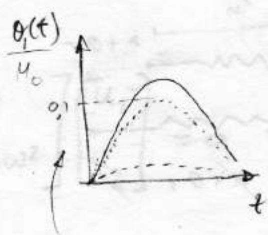
$$\begin{bmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{21}\end{bmatrix}\eta_1(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix}\phi_{12}\\ \phi_{22}\end{bmatrix}\eta_2(t)}$$

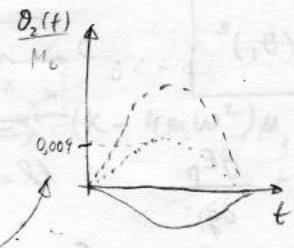
pondo valores

para $0 \le t \le t_c$

$$\boxed{\begin{bmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}2{,}1424\\ 0{,}22297\end{bmatrix} 0{,}02393(1-\cos 9{,}4653t)M_0}_{\text{contribuição do 1º modo}} - \underbrace{\begin{bmatrix}-0{,}64054\\ 0{,}74587\end{bmatrix} 0{,}002959(1-\cos 14{,}713)M_0}_{\text{contribuição do 2º modo}}}$$

— 1º modo
--- 2º modo
..... total



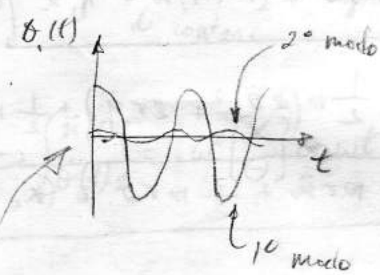


A roda 1 roda + q a roda 2

Mesma lógica aplica-se p/ $t > t_c$

$$\eta_1(t) = 0{,}02393\left[\cos(9{,}4653(t-t_c)) - \cos(9{,}4653t)\right]M_0$$

$$\eta_2(t) = -0{,}002959\left[\cos(14{,}713(t-t_c)) - \cos(14{,}713t)\right]M_0$$



$$\begin{bmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2{,}1424\\ 0{,}22297\end{bmatrix}\cdot\eta_1(t) + \begin{bmatrix}-0{,}64054\\ 0{,}74587\end{bmatrix}\cdot\eta_2(t)$$

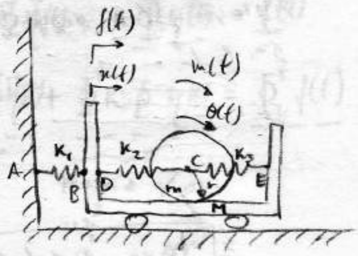
? aqui é zero ou a solução estática?

AULA TP18

22/ABR/2014

a) Determinar eqs do movito utilizando o formalismo de Lagrange.

Dados



Análise

calcular
- as energias cinética e potencial
- trabalho das forças e momentos virtuais
- Q_i's

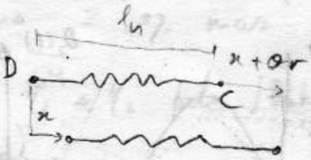
$$E_c = \frac{1}{2} m(\dot{\theta} r + \dot{x})^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}^2$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m(\dot{\theta}^2 r^2 + 2\dot{\theta} r \dot{x} + \dot{x}^2) + \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{4} m r^2 \dot{\theta}^2}$$

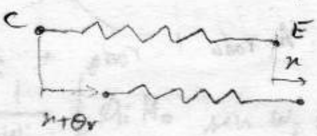
! aquele corpo tem E_c rotação e E_c rotação 2ar. Se nós pegássemos e arrastássemos pelo chão, e depois levantássemos, ainda continuava a rodar

E_c rotação $= \frac{1}{2} m r^2$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} K_1 x^2 + \frac{1}{2}(K_2 + K_3)(\theta r)^2}$$



$\Delta l = \cancel{x} + \theta r - \cancel{x}$



$\Delta l = x - (x + \theta r)$

$\Delta l = -\theta r$

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i}$$

Mas em termos energéticos se uma mola comprime a sua E_p ↗ (daí uma vantagem deste método, ñ temos q̃ nos preocupar c/ sinais)

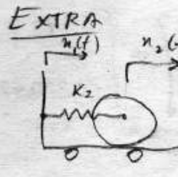
$$Q_1 = \frac{1}{2} m(2\ddot{\theta} r + 2\ddot{x}) + M\ddot{x} + \frac{2}{2} K_1 x$$

$$\boxed{Q_1 = m r \ddot{\theta} + (m+M)\ddot{x} + K_1 x}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} m(2\ddot{\theta} r^2 + 2 r \ddot{x}) + \frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta} + \frac{2}{2}(K_2 - K_3)\theta r^2$$

$$\boxed{Q_2 = m r \ddot{x} + \frac{3}{2} m r \ddot{\theta} + (K_2 - K_3)\theta r^2}$$

EXTRA



$\Delta l = x_2 - x_1$

! $E_p = \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2$

x_i coordenada absoluta

$$\delta W = F \cdot \delta r = f(t) \cdot \delta D = \underbrace{f(t)}_{Q_1} \cdot \delta x$$

$$\delta W = M \cdot \delta \theta = \underbrace{m(t)}_{Q_2} \cdot \delta\theta$$

Pondo tudo na forma matricial

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} m+M & mr \\ mr & \frac{3}{2} m r^2 \end{bmatrix}}_{\underline{m}} \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & (K_2 - K_3) r^2 \end{bmatrix}}_{\underline{K}} \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}} \quad (1)$$

? como é q̃ é tem acoplado rigidez?
e porq̃ é q̃ tem de massa?

b) Dados

$K_1 = K$

$K_2 = 2K$

$K_3 = 3K$

$M = 3m$

$r = 1$

Determinar i) as frequências naturais de vibração ω_1 e ω_2

ii) as formas naturais de vibração

Análise i) usar o determinante caraterístico

$$|\underline{K} - \omega^2 \underline{m}| = 0 \quad (2)$$ olhando pr (1) a (2) fica

$$\left| K\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - m\omega^2 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow 5m\omega^4 - 21{,}5\,Km\omega^2 + 5K^2 = 0$$ (eq. caraterística)

$$\Rightarrow \omega_1 = 0{,}49670\left(\frac{K}{m}\right)^{1/2} \quad e \quad \omega_2 = 2{,}0133\left(\frac{K}{m}\right)^{1/2}$$

ii)

$$\begin{bmatrix} K - 4m\omega^2 & -m\omega^2 \\ -m\omega^2 & 5K - \frac{3}{2}m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (K - 4m\omega^2)u_1 - (m\omega^2)u_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = \omega_1 \\ u_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow u_1 = 18{,}766 \Rightarrow \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 18{,}766 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \omega = \omega_2 \\ u_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow u_1 = -0{,}26643 \Rightarrow \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}26643 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(!) Quase (sempre) deve-se dar 1 forma c/ os 2GL em fase e outra em oposição. Se ñ der em princípio haverá algum erro de contas.

(O prof fez de 1 maneira ligeira/ diferente:

$$K\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix}\cos\omega t \rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = -\omega^2\begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix}\cos\omega t$$

$$\left(K\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \underbrace{\frac{m\omega^2}{K}}_{\text{chamar a isto } \lambda}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix}\cancel{\cos\omega t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-4\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 5-\frac{3}{2}\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

geralmente válido p/ todo o t

i) $$\begin{vmatrix} 1-4\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 5-\frac{3}{2}\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0{,}24671 \\ \lambda_2 = 4{,}0533 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \omega_1 = \\ \omega_2 = \end{matrix} \text{(igual)}$$

ii) $$(1-4\lambda)X - \lambda\Theta = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \lambda_1 \\ \Theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{X}{\Theta} = 18{,}766 \rightarrow \underline{u}_1 = \text{igual}$$

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_2 \\ \Theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{X}{\Theta} = -0{,}26643 \Rightarrow \underline{u}_2 = \text{igual}$$

c) Dados solicitação harmónica $f(t) = \begin{bmatrix} F\cos\omega t & 0 \end{bmatrix}^T$

$m = 1\,kg$

$k = 1\,N/m$

Determinar i) a resposta estacionária / regime permanente em função de ω

ii) a representação gráfica das amplitudes $X(\omega)$ e $\Theta(\omega)$

(9.10) e (9.14)

$$z_{rs} = -\omega^2 m_{rs} - k_{rs} \qquad Z(\omega) = \begin{bmatrix} 1-4\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 5-1,5\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$X(\omega) = \frac{z_{22} \overbrace{F_1}^{F} - z_{12}\overbrace{F_2}^{=0}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} = \frac{-0,3F(\omega^2 - 3,(3))}{\omega^4 - 4,3\omega^2 + 1} \qquad \Theta(\omega) = \frac{z_{11}\overbrace{F_2}^{=0} - z_{12}F_1}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} = \frac{0,2F\omega^2}{\omega^4 - 4,3\omega^2 + 1}$$

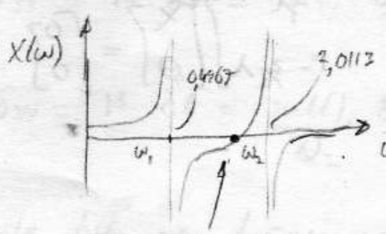
A resposta fica então dada por

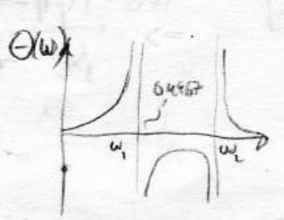
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-0,3F(\dots)}{(\dots)} \\ \dfrac{0,2F\omega^2}{(\dots)} \end{bmatrix} \cos\omega t$$

Em vez de andar a por os z's todos uma maneira + rápida poderá ser usar a regra de Cramer.

$$\begin{bmatrix} 1-4\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 5-1,5\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(\omega) \\ \Theta(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X(\omega) = \frac{\begin{vmatrix} F & -\omega^2 \\ 0 & 5-1,5\omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-4\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 5-1,5\omega^2 \end{vmatrix}} \qquad \Theta(\omega) = \frac{\begin{vmatrix} 1-4\omega^2 & F \\ -\omega^2 & 0 \end{vmatrix}}{}$$

$\longleftarrow$ igual

ii) 



freq. de excitação p/ a qual a amplitude da carruagem $(X(\omega))$ é 0. O cilindro está a funcionar como absorsor de vibrações

d) para q o cilindro funcione como absorsor de vibrações

Determinar i) $\frac{K}{m}$

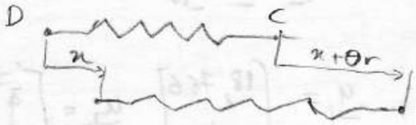
ii) força exercida pelo cilindro em D

Análise queremos q $X(\omega)=0 \overset{i)}{\Rightarrow} \frac{Z_{22} F_1}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2} = 0 \Rightarrow Z_{22} F = 0 \Rightarrow Z_{22} = 0 \ \forall F \neq 0$

isto é

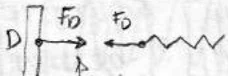
$\boxed{\frac{K}{m} = 0{,}3\omega^2} \Leftarrow \frac{3}{2} m\omega^2 - 5K = 0 \xleftarrow{\text{ou seja}} -m_{22}\omega^2 - K_{22} = 0$

(ou pelo determinante de Cramer)

ii) 

$F_D = \overset{2K}{K_1} r\theta(t) \Rightarrow \underline{F}_D = \begin{bmatrix} 2Kr\theta(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ se $\theta > 0$, $F_D > 0$ ✓

Em D



dai estar positivo

estão a ser pedida esta

falta dizer q o vale $\theta(t)$

$\theta(t) = \Theta\left(\sqrt{\frac{K}{0{,}3m}}\right)\cos(\omega t - \phi)$

$\frac{\overset{=0}{Z_{11}}F_2 - \overset{-\omega^2}{Z_{12}}F_1}{Z_{11}\cancel{Z_{22}} - \underbrace{Z_{12}Z_{21}}_{Z_{12}^2}} \Rightarrow \Theta(\omega) = \frac{F}{-m\omega^2} = \frac{-F \cdot 0{,}3}{K}$

$Z_{22} = 0 \longrightarrow = 0$ do i)

$\omega^2 = \frac{K}{m \cdot 0{,}3}$

$F_D = \begin{bmatrix} -0{,}6F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\omega t - \phi)$

isto significa q se $F = 1N$ a F_D no "sentido" $0{,}6 N$ $TR_{força} = 0{,}6$

$(f(t) = F\cos\omega t)$

Se empurrarmos a carruagem p/ frente o disco anda p/ trás, comprimindo a mola K_2 e anulando o efeito da força q fizemos e daí ela mantém-se parada.

Extra

$f_T(t) = F_{K_2} + F_{K_3} + T$ *'

$F_{K_2} = F_D$, $F_{K_3} = \begin{bmatrix} -0{,}9F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\cos\omega t$

$\Sigma M_c = -T \cdot r = \overbrace{\frac{1}{2}mr^2}^{J_c}\ddot{\theta}(t)$

$T = -\frac{1}{2}\cancel{m}\frac{F \cdot 0{,}3}{\cancel{K}} \cdot \omega^2 \cos\omega t$

$T = -0{,}15F\cos\omega t$

$f_T(t) = -\begin{bmatrix} -0{,}6 - 0{,}9 - 0{,}15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F\cos\omega t \qquad f_T(t) = \begin{bmatrix} +1{,}65F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\cos\omega t$

*' Determinar a força transmitida ao carro

AULA TP19 29/ABR/2019

Dados igual ao da aula anterior; $f(t) = [F \;\; 0]^T \mu(t)$ transiente; cond. iniciais nulas; $m = 1 = K$

c) Determinar as eqs do movimento do sistema na base modal.

Análise

Temos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1,5 \end{bmatrix}}_{\underline{m}} \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\underline{K}} \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \mu(t)$$ passar isto p/ base modal

eq. (3) da p. $\boxed{17}$ (ver a dedução tb)

$$\underline{\phi_i} = \frac{1}{(\underline{u_i}^T \, \underline{m} \, \underline{u_i})^{1/2}} \cdot \underline{u_i}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} F \\ \phi_{12} F \end{bmatrix} \mu(t)$$

$$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 18,766 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} -0,26643 \\ 1 \end{bmatrix}$$

substituindo ↓ valores

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,24671 & 0 \\ 0 & 4,0533 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,49321 F \\ -0,23820 F \end{bmatrix} \mu(t)$$

$$\underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 0,49299 \\ 0,026282 \end{bmatrix} \quad \underline{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -0,2382 \\ 0,89404 \end{bmatrix}$$

(!) verificar q

$\underline{\phi}_1^T \, \underline{m} \, \underline{\phi}_2 = 0$ ✓

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0,49299 & -0,2382 \\ 0,026282 & 0,89404 \end{bmatrix}$$

d) Determinar a resposta do sistema evidenciando a contribuição de cada forma natural.

Análise $\mu(t)$ representa função em degrau

para determinar as resposta q n seja de regime livre ou forçado harmónica → ∫Duhamel. Como a matriz $\underline{m}$ n é diagonal tem q se usar a eq. do mov. modal onde $\underline{m}$ e $\underline{k}$ o são.

$$\eta_i(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \phi_{ii} F \frac{1}{m\omega_i} \operatorname{sen} \omega_i (t-\tau)\, d\tau = \frac{\phi_{ii} F}{m\omega_i^2} (1 - \cos \omega_i t)$$

$\phi_{ii} F$

$\phi_{11} = 0,49299$

$\phi_{12} = -0,2382$

$$\eta_i(t) = \frac{\phi_{ii} F}{m\omega_i^2} (1 - \cos \omega_i t)$$

ω_i: 0,49670; 2,0133

$\eta_1(t) = 1,9991\, F (1 - \cos 0,49670 t)$

$\eta_2(t) = -0,058768\, F (1 - \cos 2,0133 t)$

Da transformação de coordenadas sabemos $\begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix}$

Então $x(t) = \phi_{11}\eta_1(t) + \phi_{12}\eta_2(t)$

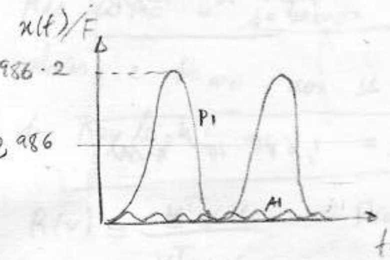
$\theta(t) = \underbrace{\phi_{21}\eta_1(t)}_{1^a \text{ forma}} + \underbrace{\phi_{22}\eta_2(t)}_{2^a \text{ forma}}$ para evidenciar a contribuição de cada forma natural

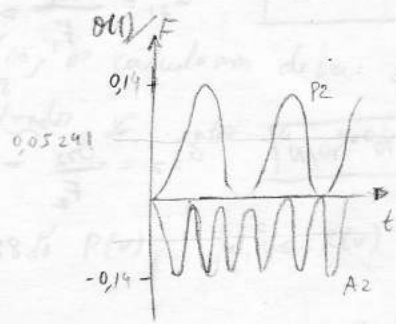
contribuição da

$x(t) = \overset{P1}{0,986F(1-\cos 0,4967t)} + \overset{A1}{0,01399F(1-\cos 2,0133t)}$? Qdo pede p/ evidenciar a contribuição das formas naturais é assim ou p. 53 ?

$\theta(t) = \underset{P2}{0,05241F(1-\cos 0,4967)} - \underset{A2}{0,05241F(1-\cos 2,0133t)}$

e) Determinar representação gráfica da resposta do sistema e a contribuição das formas naturais.





o 2° modo (A1) contribui muito pouco para $x(t)$

f) Determinar o limite para o valor máximo de resposta de $x(t)$ $\quad x(t)_{max} \leq \Phi\, \eta(t)_{max}$

$x(t) = \phi_{11}\eta_1(t) + \phi_{12}\eta_2(t)$

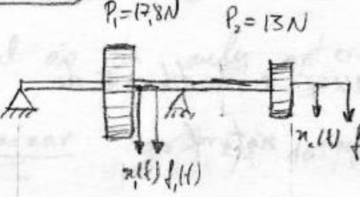
os modos de vibração ($w_i; u_i \to \phi_i$) só dependem das propriedades do sistema (como as coisas estão ligadas entre si) e dos valores das massas e rigidezes). Como estes são as mesmas ϕ's ñ variam (são inerentes ao sistema). Então $x(t)$ é max qdo $\eta_1(t)$ e $\eta_2(t)$ forem max. $x(t)_{max} \leq |\phi_{11}\eta_1(t)_{max}| + |\phi_{12}\eta_2(t)_{max}|$ (isto é o limite mas pode ñ acontecer na prática)

$\eta_i(t) = \underbrace{\frac{\phi_{1i} F}{m w_i^2}}_{cte}\left(1 - \overbrace{\underbrace{\cos(w_i t)}_{cte}}^{variável}\right)$ Qdo $\cos(w_i t) = -1$ $\eta_i(t)$ é max

limite p/ $x(t)_{max} \leq 0,986F \cdot (1 - -1) + 0,01399F(1 - -1) = 2,000F$

AULA TP20 29/ABR/2019

Dados



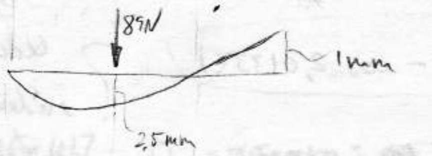
a) Determinar a matriz de flexibilid. do sistema

Análise. eq.(10.13)

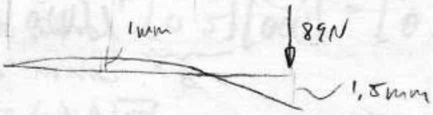
$\delta_{ij} = a_{ij} F_j$ — coeficiente de flexibilid.

δ_{ij}: deslocado no G.L i devido a 1 força unitária aplicada no G.L. j

Daqui se forma a matriz de flexibilid. $\underline{f}$



Assume-se q estes deslocam. são apenas devido à força i.e. c/o peso $\delta_i = 0$.



$a_{11} = \dfrac{\delta_{11}}{F_1} \Rightarrow \boxed{a_{11} = 0,2809 \cdot 10^{-4}\ m/N}$ ($\delta_{11} = 2,5\cdot10^{-3}$, $F_1 = 89$)

$a_{21} = \dfrac{\delta_{21}}{F_1} \Rightarrow \boxed{a_{21} = -1,124 \cdot 10^{-5}\ m/N}$ ($\delta_{21} = 1\cdot10^{-3}$, $F_1 = 89$)

$a_{12} = \dfrac{\delta_{12}}{F_2} \Rightarrow \boxed{a_{12} = -1,124 \cdot 10^{-5}\ m/N}$ ($\delta_{12} = 1\cdot10^{-3}$, $F_2 = 89$)

$a_{22} = \dfrac{\delta_{22}}{F_2} \Rightarrow \boxed{a_{22} = 1,685 \cdot 10^{-5}\ m/N}$ ($\delta_{22} = 1,5\cdot10^{-3}$, $F_2 = 89$)

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 0,2809 & -0,1124 \\ -0,1124 & 0,1685 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

b) Determinar a matriz rigidez

$F = a \cdot \delta \Rightarrow \dfrac{F}{\delta} = a \Rightarrow \dfrac{\delta}{F} = \dfrac{1}{a}$ ~ K

$$\underline{K} = \underline{a}^{-1} \Rightarrow \underline{K} = \begin{bmatrix} 4,8545 & +3,2364 \\ +3,2364 & 8,0909 \end{bmatrix} \cdot 10^{4}$$

c) Determinar as equações do mov. do sistema

Análise serão do tipo $\underline{m}\,\underline{\ddot{x}}(t) + \underline{K}\,\underline{x}(t) = \underline{f}(t)$

Como é a matrix m?

Por Lagrange

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right)}_{m\ddot{x}\ \text{verdadqi}} + (\ldots)$$

$E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2$

$\Rightarrow Q_1 = m_1 \ddot{x}_1$

$Q_2 = m_2 \ddot{x}_2$

Por Newton

$\Sigma F_i = \dot{q}_i = m_i \ddot{x}_i$

$\dot{q}_1 = m_1 \ddot{x}_1$

$\dot{q}_2 = m_2 \ddot{x}_2$

q: usa-se muito p/ quantid. de movto (mv)

$\dot{q} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$

Portanto $\underline{m}$ é diagonal $\begin{bmatrix} \frac{17,8}{9,8} & 0 \\ 0 & \frac{13}{9,8} \end{bmatrix} = \underline{m}$

Fica então $\begin{bmatrix} 1,8163 & 0 \\ 0 & 1,3265 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4,8545 & -3,2364 \\ -3,2364 & 8,0909 \end{bmatrix} \cdot 10^{4} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$

d) Determinar estimativa da freq. natural fundamental

Análise Para determinar os ω_i fizemos $|\underline{K} - \underline{m}\omega^2|\underline{u} = 0$

se fizermos $\underline{K}\underline{u} = \underline{m}\omega^2\underline{u} \xRightarrow{\cdot \underline{u}^T} \underline{u}^T\underline{K}\underline{u} = \underline{u}^T\underline{m}\omega^2\underline{u} \xRightarrow[\text{ordem } a\, \omega^2]{\text{pondo em}} \omega^2 = \frac{\underline{u}^T\underline{K}\underline{u}}{\underline{u}^T\underline{m}\,\underline{u}}$

Mas como não sabemos $\underline{u}$ (nós os calculamos depois de saber ω_i) então arbitramos valores e chamamos aos $\underline{u}$ arbitrados $\underline{v}$ então o quociente passa-se a chamar de Rayleigh

$R(v) = \frac{\underline{v}^T\underline{K}\underline{v}}{\underline{v}^T\underline{m}\,\underline{v}}$ Propriedades do $R(v)$ $\omega_1^2 \leq R(v) \leq \omega_2^2$

menor e maior dos valores de $R(v)$ para ω_1 e ω_2 respetivamente

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R(v_1) = 6,1785 \cdot 10^{4}$ $\quad *^1$

$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow R(v_2) = 2,0595 \cdot 10^4$

$v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow R(v_3) = \underline{1,6951} \cdot 10^4 \Rightarrow \omega_1 \approx 130,2$

$v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2,7 \end{bmatrix} \Rightarrow R(v_4) = \underline{7,077} \cdot 10^4 \Rightarrow \omega_2^2 \approx 266,86$

(!) Comentários A forma + fácil de deformar o veio será  portanto $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} +(\dots) \\ -(\dots) \end{bmatrix}$ ou $\begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$

$*^1$ $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ têm os mesmos sinais $\Rightarrow$ + difícil de deformar $\Rightarrow \nearrow \omega$

e) Determinar i) as freq. e as ii) formas naturais

i) $|\underline{K} - \underline{m}\omega^2| = 0 \Rightarrow \omega_1 = 129,9$ rad/s $\quad \omega_2 = 266,26$ rad/s

$\text{erro}_1 = \frac{130,2 - 129,9}{129,9} = 0,2\%$ ✓

$\text{erro}_2 = \frac{266,26 - 266,86}{266,26} = 0,07\%$ ✓

ii) $(\underline{K} - \underline{m}\omega^2)\underline{u} = 0 \Rightarrow$ pegando apenas numa das eq. p. ex. a 1.ª

$(48562 - 1,8163\omega^2)u_1 + 32394\, u_2 = 0$ $\quad \begin{cases} \omega = \omega_1 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow u_2 = -0,553$

$\begin{cases} \omega = \omega_2 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow u_2 = 2,476$

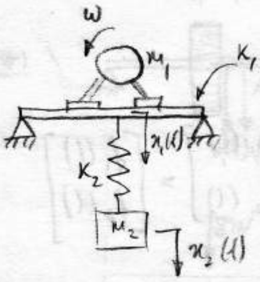
$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,533 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2,476 \end{bmatrix}$

comparar c/ v_3 $\quad$ comparar c/ v_4

AULA : TP21

30

Dados



$m_1 = 300\,kg$

massa da viga desprezível

$\omega = 1500 \cdot \frac{\pi}{30}$ rad/s

$\omega = 157{,}08$ rad/s

$\omega = \omega_p$

a) Determinar m_2 e K_2 para eliminar completa/ a vibração do motor e reduzir a freq. fundamental do novo sistema a 75% da freq. de excitação.

Análise

A resposta de 1 sistema c/ 2 G.L. s/ amortecimento em regime forçado harmónico é do tipo

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{bmatrix} \cos \omega t$$

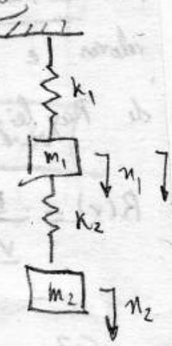
ou $\sin \omega t$ conforme a força

Nós queremos m_2 e K_2 tal q

1. $X_1(\omega) = 0$

2. $\omega_1 = 0{,}75\,\omega$

Modelo



$$|\underline{K} - \underline{M}\omega^2| \begin{bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer $X_1(\omega) = \dfrac{\begin{vmatrix} f & \\ 0 & \end{vmatrix}}{|\quad|} = 0$

Para completar isto preciso da eq. de movimento.

Eq. de movim. por Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i$$

$E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\cancel{\dot{x}_1} + \dot{x}_2)^2$!

A coordenada x_2 é absoluta

$E_p = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2$

$\Delta l = x_2 - x_1$

$f(t) = m_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 - K_2 x_2 + K_2 x_1$

$0 = m_2 \ddot{x}_2 + K_2 x_2 - K_2 x_1$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

(igual à 20.15)

Fazendo a regra de Cramer s/ igualar a zero dá a (20.18)

(na máquina)

Ao igualar a zero dá $\omega^2 = \frac{K_2}{m_2}$, .. ou seja para podermos ter o m_2 a anular a vibração do m_1 a sua freq. natural tem de coincidir c/ a freq de excitação. (isto está de acordo c/ a (20.25))

A partir de agora é + fácil de deixar de fazer na máquina e fazer umas manipulações algébricas ver eqn 20.20 e adiante

O objetivo é q $X_1(\omega) = 0$, logo da eq. (20.20) vem $\alpha = \beta$

$\omega_r = \left(\frac{K_2}{m_2}\right)^{1/2} = \omega = 157{,}08$ ← freq. natural do sistema secundário isolado → $\frac{\omega_1}{\omega_p} = \frac{\omega}{\omega_p}$ (1)

freq. de excitação

freq. natural do sistema principal isolado (i.e. se estivesse sozinho, a sua freq. natural era ω_p)

Nota: eu mudei os índices pp como está na sebenta pode induzir em erro. Repare-se

Regime forçado	Regime livre
$\underline{m}\ddot{\underline{x}}(t) + \underline{K}\underline{x}(t) = \underline{F}\,\text{sen}\,\omega t$	$\underline{m}\ddot{\underline{x}}(t) + \underline{K}\underline{x}(t) = 0$
$\underline{x}(t) = \underline{X}(\omega)\,\text{sen}\,\omega t$	$x(t) = X(\omega)\,\text{sen}\,\omega t$
ω = freq. de excitação $(=\omega)$	ω = freq natural $(=\omega_n)$

e como p/ este caso $\omega = \omega_p$,

Continuando, de (1) resulta q $\boxed{\alpha = 1}$ para q $X(\omega) = 0$;

Por outro lado o denominador da (20.20) é $|\underline{K} - \omega^2\underline{M}|$ p/t $= 0$ temos a eq. caraterística onde o ω dentro do β agora é freq natural.

$$(1-\underbrace{\beta^2}_{1})(\alpha^2 - \underbrace{\beta^2}_{0{,}75}) - \varepsilon\alpha^2\beta^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon = 0{,}34028} \qquad \varepsilon = \frac{m_2}{\underbrace{m_1}_{300}} \Rightarrow \boxed{m_2 = 102{,}08 \text{ kg}}$$

$\omega_1 = 0{,}75\,\omega_e^{\,\omega_p}$

$\frac{\omega_1}{\omega_p} = \beta = 0{,}75$

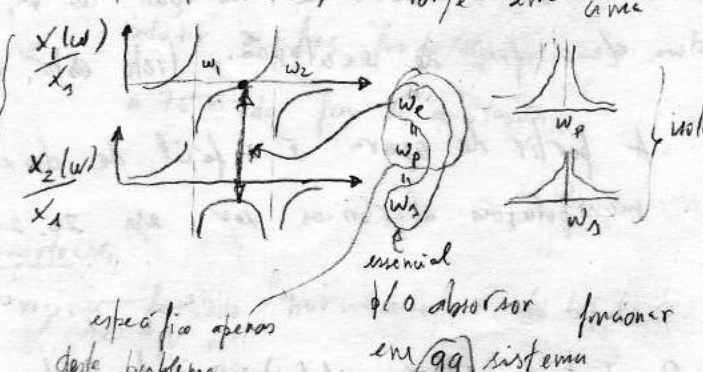
$$\text{como } \left(\frac{K_2}{\underbrace{m_2}_{102{,}08}}\right)^{1/2} = \omega_n = \omega_e \sim 157{,}08 \Rightarrow \boxed{K_2 = 2{,}51 \cdot 10^6 \text{ N/m}}$$

Nota: faz sentido $\omega_e = \omega_A$. Para o absorsor de vibrações absorver o máx. de energia isso acontece se ele vibrar à sua freq. natural.

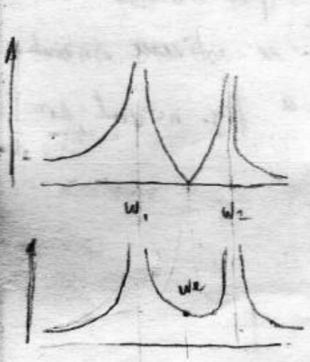
Nota 2: 1º disse q $\alpha = \beta$ mas depois usei $\alpha = 1$ e $\beta = 0,75$ porquê? Porque em cima $\beta = \frac{\omega_e}{\omega_p}$ e em baixo $\beta = \frac{\omega_1}{\omega_p}$

para o sistema c/ absorsor

(1 = principal, 2 = secundário)



b) Determinar a representação gráfica da razão $\frac{X_1(\omega)}{X_A}$ em função da freq. de excitação antes e depois da montagem do absorsor.



Parecido c/a fig 2.08 da p 410 mas no nosso caso ñ pode estar a dividir p/ X_A $(= \frac{F}{k})$ porque o nosso F depende de ω^2

ω_e $\boxed{F = m e \omega^2}$ ou seja ñ é uma constante q nós possamos por a dividir

13 Maio

c) Determinar as freq. naturais do novo sistema

Análise $(1-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2) - \underbrace{\varepsilon}_{0,34028} \underbrace{\alpha^2}_{1} \beta^2 = 0 \Rightarrow \beta = 0,75 \vee \beta = 1,(3)$

$\beta = \frac{\omega_i}{\omega_p}$, $\omega_p = 157,08$ $\Rightarrow \omega = 117,81 \vee \omega = 209,43$

$\boxed{\omega_1 = 117,81 \text{ rad/s}}$ $\boxed{\omega_2 = 209,43 \text{ rad/s}}$

(2) Dados

$m_p = 350$ kg

(1) $\omega = 400$ rpm $= \omega_{ressonância}$ (sem o m_2) na vertical

$I_{barra_{AB}} = 2{,}043 \cdot 10^{-8}\ m^4$

$E_{barra_{AB}} = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Pa

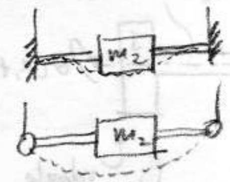
$l_{AB} = 1{,}52$ m

Esquema

a) Determinar m_s e ω_1 e ω_2 considerando os apoios A e B

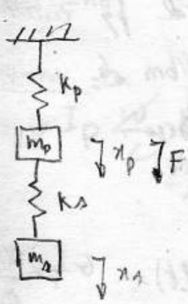
i) encastrados

ii) rótulas



Análise

Podemos modelar isto assim p: principal s: secundário



$=$

$K = \frac{192\, EI}{l^3}$

$=$

$K = \frac{48\, EI}{l^3}$ para este problema apenas

ω_r do m_1 isolado $= \overset{\varepsilon = 0}{\omega_p} = \overset{(1)}{\omega} \longrightarrow \boxed{\omega = \omega_p} \to \beta = 1 \to \boxed{\alpha = 1}$

$\beta = \frac{\omega}{\omega_p}$

$\boxed{\alpha = \beta} \Rightarrow \frac{\omega_s}{\omega_p} = \frac{\omega}{\omega_p}$

Para q $X_1(\omega) = 0$

Agora p/ regime livre o denominador da (20.21) dá-nos a eq. caraterística onde $\beta = \frac{\omega_i}{\omega_p}$ freq. natural do sistema e não de excitação como em cima, mas o α continua $=1$

$$\boxed{(1-\beta)^2(\alpha^2 - \beta^2) - \varepsilon\alpha^2\beta^2 = 0} \quad (4)$$

$\varepsilon = \frac{m_s}{m_p}$ (3) sempre verdade

$k_{i)} = 2{,}37 \cdot 10^5$ N/m

$k_{ii)} = 0{,}5864$ N/m

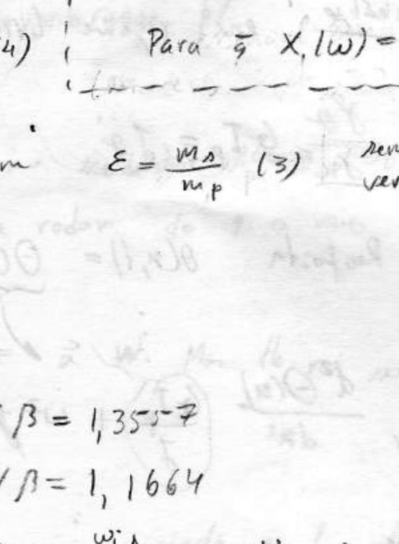
$$\overset{400 \cdot \frac{\pi}{30}}{\omega} = \omega_s = \left(\frac{\overset{k_{i)}, k_{ii)}}{k_s}}{m_s}\right)^{1/2} \quad (2)$$

$\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ i) $m_s = 133{,}68$ kg $\overset{(3)}{\Rightarrow} \varepsilon = 0{,}382 \overset{(4)}{\Rightarrow} \beta = 0{,}7376 \vee \beta = 1{,}3557$

ii) $m_s = 33{,}4$ kg $\Rightarrow \varepsilon = 0{,}0955 \Rightarrow \beta = 0{,}8574 \vee \beta = 1{,}1664$

$\beta = \frac{\omega_i}{\omega_p} \Rightarrow$ i) $\boxed{\omega_1 = 30{,}898 \text{ rad/s}}$ $\boxed{\omega_2 = 56{,}766 \text{ rad/s}}$

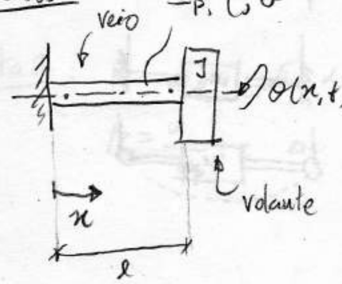
ii) $\boxed{\omega_1 = 35{,}913 \text{ rad/s}}$ $\boxed{\omega_2 = 48{,}857 \text{ rad/s}}$



c) a solução de encastrado p/ um lado é melh pq as freq. nat. estão + afastadas, e assim ao $\uparrow$ a ω_e ñ se corre o risco de passar pelas 2 de seguida.
por outro lado é preciso 1 massa de 130 kg para parar a vibração de um motor de 350 kg. a de rótulas só precisa de 30 kg.

AULA TP22 — SISTEMAS CONTÍNUOS: VEIO À TORÇÃO — 20/MAI/2014

Dados I_p, l, G

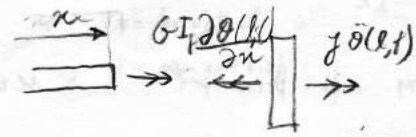


a) Determinar as condições fronteira

b) Análise

$x=0 \Rightarrow \theta(0,t)=0$ (1) $\boxed{\text{C.F. geométrica}}$

$x=l$



$M(l,t) = -GI_p \frac{\partial\theta(l,t)}{\partial x} = J\ddot{\theta}(l,t)$ (2)

$\boxed{\text{C.F. Natural}}$ (natural pq resulta de equilíbrio de momentos ou forças.

Nota: $J = [kg\,m^2]$ se estiver em kgm, porque está por unid. de comprimento kgm^2/m

Nota 2: se o veio estivesse livre do lado dto (ñ existisse o volante) ficava $M(l,t) = GI_p \frac{\partial\theta(l,t)}{\partial x} = 0$

b) Determinar a eq. de freq. naturais de torção

Análise em regime livre a eq. do movim. da torção de 1 veio é

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} GI_p = J_{veio}\ddot{\theta}$$

Resposta $\theta(x,t) = \underbrace{\Theta(x)}\, \underbrace{g(t)}$ $\quad \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \omega^2 g(t) = 0 \Rightarrow g(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$

$$\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2}\overbrace{\left(\frac{GI_p}{J}\right)}^{c} + \omega^2 \Theta(x) = 0 \quad \text{eq. caraterística}$$

$$\Theta(x) = A\cos\frac{\omega}{c}x + B\,\text{sen}\frac{\omega}{c}x$$

(5) $$\boxed{\theta(x,t) = \underbrace{\left(A\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B\,\text{sen}\left(\frac{\omega}{c}x\right)\right)}_{\text{C.F.}}\underbrace{\left(C\cos\omega t + D\,\text{sen}\,\omega t\right)}_{\text{C. iniciais}}}$$

Fórmula geral da resposta de um veio de secção constante em movim. livre

Aplicando (1)

$$\theta(0,t) = \underbrace{\left(A\overset{1}{\cos(0)} + B\overset{=0}{\text{sen}(0)}\right)}_{=0}\ \vee\ \underbrace{\left(C\cos\omega t + D\,\text{sen}\,\omega t\right)}_{=0} \quad (3)$$

se $g(t)=0$, $\theta(x,t)$ ñ depende do tempo $\Rightarrow$ solução estática

A (3) fica então

$\boxed{0 = A}$

P/ aplicar a (2) é preciso ter algumas derivadas

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(B\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t + D\,\mathrm{sen}\,\omega t\right) = \left(\frac{\omega}{c}B\cos\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t + D\,\mathrm{sen}\,\omega t\right)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\dots) = \left(B\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega}{c}x\right)\right)\left(-\omega^2 C\cos\omega t - \omega^2 D\,\mathrm{sen}\,\omega t\right) = -\omega^2 B\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega}{c}x\right)(\dots)$$

Aplicando (2) c/ essas 2 lá metidas (e para $x = l$)

$$+GI_p\frac{\omega}{c}\cancel{B}\cos\left(\frac{\omega}{c}l\right)\cancel{(\dots)} = +J\omega^{\cancel{2}}\cancel{B}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega}{c}l\right)\cancel{(\dots)} \Rightarrow \boxed{\frac{GI_p}{\omega Jc} = tg\left(\frac{\omega}{c}l\right)} \quad (4)$$

eq. cuja única incógnita é o ω

c) Dados $\lambda = \frac{J}{J_{veio}}$ (do volante) Determinar freq. naturais de vibração p/

chame-se

i) $\lambda = 1$

ii) $\lambda = 100$ ← i.e. se custar 100x mais por o volante a rodar do q o veio

Análise

Então nós sabemos q é da (4) q se obtém os ω_n. Então o objetivo é resolvê-la em ordem a ω. Mas tb vai ser preciso por o λ lá dentro... ⇒ manipulá-la

$J = \rho I_p l$

$c = \left(\frac{G}{\rho}\right)^{1/2}$

$$\frac{GI_p\rho l}{\omega Jc\rho l} = \frac{c^2 J_v}{\omega J \cancel{c} l} = tg\left(\frac{\omega}{c}l\right)$$

J_v, c^2, λ^{-1}

máquina ainda ñ faz isto

manipular +

$$\frac{1}{\frac{\omega l}{c}\lambda} = tg\left(\frac{\omega}{c}l\right)$$

chame-se a isto α ⇒ $\frac{1}{\alpha\lambda} = tg\,\alpha$

Para determinar α → nsolve
→ gráfica

→ nsolve(função, var, limite inferior, limite superior)

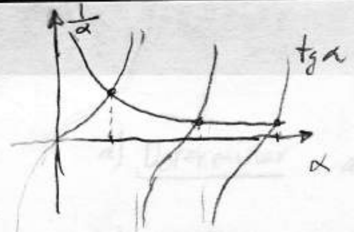
nsolve →

$$\text{nsolve}\left(\frac{1}{\alpha\lambda} = tg\,\alpha, \alpha\right) \Rightarrow \alpha_1 = (\dots)$$

100

$$\hookrightarrow \text{nsolve}\left(\frac{1}{\alpha\lambda} = tg\,\alpha, \alpha, (\dots)\right) \Rightarrow \alpha_2 =$$

método gráfico →



$\boxed{\lambda = 1}$ ⇒ $\alpha_1 = 0,86033$ ⇒ $\omega_1 = 0,86033\ \frac{c}{l}$

$\alpha_2 = 3,4256$ ⇒ $\omega_2 = 3,4256\ \frac{c}{l}$

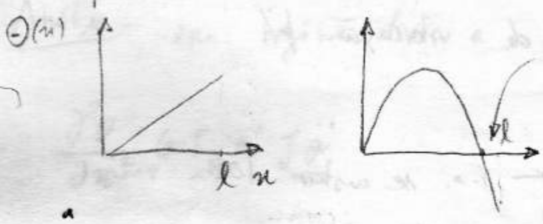
$\boxed{\lambda = 100}$ ⇒ $\alpha_1 = 0,09983$ ⇒ $\omega_1 = 0,09983\ \frac{c}{l}$

$\alpha_2 = 3,1448$ ⇒ $\omega_2 = 3,1448\ \frac{c}{l}$

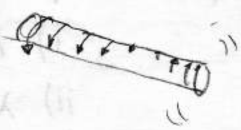
Extra O prof explicou como a partir da (5) se obtinha as formas de vibração

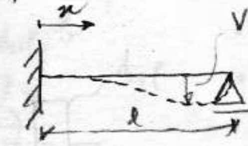
? como ?

1ª forma



nodo neste ponto o veio ñ roda (portanto convém evitar por 1 medidor de vibrações lá)



Dados  $V(x,t) = V(x)\,g(t)$

a) Determinar i) as condições fronteira e ii) classificá-las

Análise

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} V(0,t) = 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial V(0,t)}{\partial x} = 0 \quad (2) \end{cases} \qquad x = l \Rightarrow \begin{cases} V(l,t) = 0 \quad (3) \text{ geométrica} \\ M(l,t) = 0 = EI\dfrac{\partial^2 V(l,t)}{\partial x^2} \quad (4) \text{ natural } (17.6) \end{cases}$$

geométricas

b) Determinar a eq. de freqs naturais

Análise Para lá seguirmos 1º é preciso pensar na resposta q é dada p/

$$V(x,t) = V(x) \cdot g(t)$$

$g(t)$: $C\cos\omega t + D\cos\omega t$

(17.34) $A_1\cosh(\beta x) + A_2\,\mathrm{senh}(\beta x) + A_3\cos(\beta x) + A_4\,\mathrm{sen}(\beta x)$

Substituindo as C.F. determina-se as ctes. Como todas as C.F. estão igualadas a zero vai dar sempre algo do género $V(x) \cdot g(t) = 0 \Rightarrow V(x) = 0 \;\vee\; g(t) = 0$

então p/ aqui basta apenas considerar a 17.34 ← corresponde à viga estar parada q n é o q nos interessa

(1) → $V(0,t) = 0 = A_1 + A_3 \Rightarrow A_1 = -A_3$

(2) → $\dfrac{\partial V(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial V(0)}{\partial x} = 0 = A_2 + A_4 \Rightarrow A_2 = -A_4$

$(\cosh u)' = u'\,\mathrm{senh}\,u$
$(\mathrm{senh}\,u)' = u'\cosh u$
$\cosh(0) = 1$
$\mathrm{senh}(0) = 0$

(3) → $V(l,t) = 0 = A_1(\cosh\beta l - \cos\beta l) + A_2(\mathrm{senh}\beta l - \mathrm{sen}\beta l)$ (5)

(4) → $EI\dfrac{\partial^2 V(l,t)}{\partial x^2} = 0 = A_1(\cosh\beta l + \cos\beta l) + A_2(\mathrm{senh}\beta l + \mathrm{sen}\beta l)$ (6)

Lembrando, o objetivo continua o ~~ser~~ ter 1 eq. apenas em função do β, mas p/ isso é preciso determinar A_1 e A_2. Para tal temos 2 hipóteses

(A) por p. ex. a (5) em ordem a A_1 e substituir na (6)

(B) por na forma matricial (é assim q o regente prefere, mas a verdade é q dá das 2 maneiras. De qq das formas, há logo 1 solução óbvia q é dizer q A_1 e $A_2 = 0$ mas + 1 vez isso representa ausência de movimento. Então ficamos c/ 1 sistema indeterminado. Vamos ver

$$\begin{bmatrix} \cosh\beta l - \cos\beta l & \mathrm{senh}\beta l - \mathrm{sen}\beta l \\ \cosh\beta l + \cos\beta l & \mathrm{senh}\beta l + \mathrm{sen}\beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

P/ os sistemas indeterminado o seu determinante é zero, faça-se isso ent. (a ele tb se chama determinante caraterístico)

$$(\cosh\beta l - \cos\beta l)(\mathrm{senh}\beta l + \mathrm{sen}\beta l) - (\cosh\beta l + \cos\beta l)(\mathrm{senh}\beta l - \mathrm{sen}\beta l) = 0 \Rightarrow$$

$$2\cosh\beta l\,\mathrm{sen}\beta l - 2\cos\beta l\,\mathrm{senh}\beta l = 0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{tg}(\beta l) = \mathrm{tgh}(\beta l)}$$

$*^1$ chama-se a isto modo rígido.

p. ex

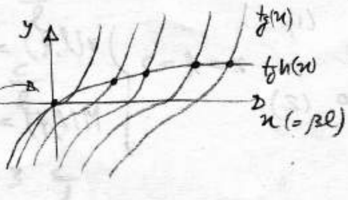
c) Determinar as 2 1^{as} freq. naturais de vibração

Análise

$$\omega = \beta^2\left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{1/2} \quad (5)$$

Da eq. de freq. naturais podemos calcular os βl q verificam a eq.

$$\underbrace{tgh(\beta l)}_{x} = tg(\beta l)$$



nsolve $(\tan(x) = \tanh(x), x, 0{,}001)$ ← Lim inferior

aqui o $\beta = 0$ mas se $\beta = 0 \Rightarrow \omega = 0$. Para podermos admitir esta solução as C.F tinham de ser tais q a viga se pudesse mexer s/ se deformar$*^1$. Como neste caso isto é impossível, descarta-se esta solução matemática. ⇒ Então as 1^{as} ω_n são as 2 seguintes

⇓

$\beta_1 l = 3{,}9266$

nSolve $(\tan(x) = \tanh(x), x, 3{,}93)$

⇓

$\beta_2 l = 7{,}0686$

Para se poder usar a (5)
$$\omega = \beta^2\frac{l^2}{l^2}\left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{1/2} = (\beta l)^2\left(\frac{EI}{\rho A l^4}\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\omega_1 &= 3{,}9266^2\left(\frac{EI}{\rho A l^4}\right)^{1/2} \text{ rad/s}\\ \omega_2 &= 7{,}0686^2\left(\frac{EI}{\rho A l^4}\right)^{1/2} \text{ rad/s}\end{aligned}}$$

d) Determinar a expressão das formas naturais de vibração

Análise pegamos numa das eq. do (7) i.e. a (5) ou a (6). Pegando na (5) p.ex c/ $\beta_1 l$ (como fazemos antes)

$$A_1(\cosh(3{,}9266) - \cos(3{,}9266)) + A_2(\operatorname{senh} 3{,}9266 - \operatorname{sen} 3{,}9266) = 0 \qquad A_2 = 1 \Rightarrow A_1 = \dots$$ e substitui-se na 17.34

ou seja em termos gerais ficava (prof fez assim)

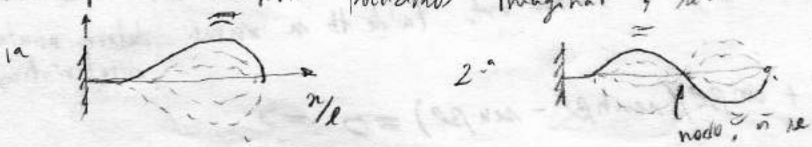
$$A_2 = -A_1\frac{\cosh\beta_n l - \cos\beta_n l}{\operatorname{senh}\beta_n l - \operatorname{sen}\beta_n l} \Rightarrow \dots \Rightarrow V_n(x) = A_1\left(\cosh\beta_n x - \cos\beta_n x\right) - \frac{\cosh\beta_n l - \cos\beta_n l}{\operatorname{senh}\beta_n l - \operatorname{sen}\beta_n l}\cdot\left(\operatorname{senh}\beta_n x - \operatorname{sen}\beta_n x\right)$$

o A_1 controla a amplitude pft o valor ñ importa, podemos fazer =1 p/ simplificar

e) Determinar a representação das 2 1^{as} formas nat. de vibração

por na máq. $V_1(x) = (\dots)$, $A_1 = 1$, $l = 1$

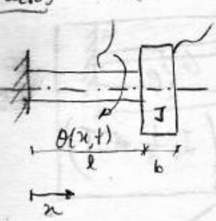
sem por na máquina podíamos imaginar q será



qto > energia precisa p/ se deformar maior o nº do modo.

Dados d_1, l, G

d_2, l



- utilizar o método da energia de Rayleigh
- admitir como aproximação da forma natural fundamental de torção uma deformada $\Theta(x)$ linear

a) Determinar se a função de aproximação proposta (linear) é aplicável

Análise Ora 1 função linear = reta $\Rightarrow y = mx + b$ Neste caso $\Theta(x) = mx + b$

Nós sabemos q em $x=0$ está encastrado e ñ roda portanto a função pode já ficar simplificada por $\Theta(x) = mx$

Função de aproximação — tem de satisfazer os requisitos
- ser derivável no min 1/2 das vezes da ordem do mov. i.e. $\frac{d(..)}{d(..)} \neq 0$ contínua
- respeitar C.F. geométricas

e deve aproximar o mlh possível a forma natural de vibração

[torção veio é 2.ª ordem → derivável min 1x
[flexão de vigas é 4.ª ordem → derivável min 2x

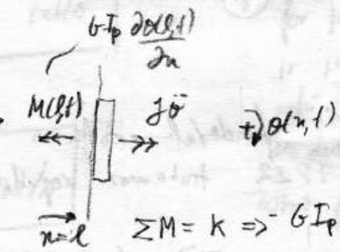
Das q respeitarem essas condições, p/ minimizar o erro, deve-se escolher a q se aproxima + da 1.ª forma natural

$\frac{d\Theta(x)}{dx} = m$ ✓ é derivável 1x, a ver se respeita as C.F. geom.

$x = 0 \Rightarrow \theta(0,t) = 0$ C.F. geométrica

$\Theta(0) = 0$ ✓ respeita e portanto é aplicável

$x = l \Rightarrow$



$\Sigma M = k \Rightarrow -GI_p \frac{\partial\theta(l,t)}{\partial x} = J\ddot{\theta}$

C.F. natural

b) Dados
$d_1 = 10$ mm
$d_2 = 20$ mm
$l = 40$ mm
$b = 5$ mm
$\rho = 7800$ kg/m³
$G = 82$ GPa

Determinar uma estimativa p/ freq. funda/al do sistema

Análise p. 376

$$E_{P_{max}} = \frac{1}{2}\int_0^l GI_p\left(\frac{d\Theta(x)}{dx}\right)^2 dx + \underbrace{E_{P_{fqu}}}_{=0}$$

E. potencial devido a c.f. naturais

(o veio é rígido, ñ há molas, ...)

$$\boxed{E_{P_{max}} = \frac{1}{2} G I_p m^2 l}$$

$$E_{c_{max}} = \omega^2 \frac{1}{2}\int_0^l J\,\Theta^2(x)\,dx + E_{c_{qu\,max}}$$ ~ E_c volante max

$$E_{c\,volante} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2(l,t) \qquad \theta(x,t) = \Theta(x)\cos(\omega t - \phi)$$

desprezar aqui nem é fado, $\phi \approx 0$

$$\dot{\theta}(x,t) = -\Theta(x)\,\omega\,\text{sen}(\omega t - \phi)$$

$$= \frac{1}{2} J\,\Theta^2(l)\,\omega^2\,\text{sen}^2\omega t$$

$$E_{c\,volante\,max} = \frac{1}{2} J m^2 l^2 \omega^2$$

$$\boxed{E_{c\,máx} = \omega^2 \frac{1}{2} J_{veio} m^2 \frac{l^3}{3} + \frac{1}{2} m^2 l^2 \omega^2 J}$$

$$E_{p\,máx} = E_{c\,máx} \Rightarrow \frac{1}{2} G I_p m^2 l = \underbrace{\omega^2 \frac{1}{2} J m^2 \frac{l^3}{3} + \frac{1}{2} m^2 l \omega^2 J_v}_{\omega^2 l \left(\frac{J_v}{3} + J\right)} \Rightarrow \boxed{\omega_r^2 = \frac{G I_p}{l\left(J_v \frac{1}{3} + J\right)}} \quad (3)$$

o "r" foi introduzido p/ destacar q se trata de 1 aproximação

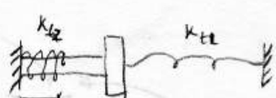
veio $J_v = \rho I_{p_v} l \Rightarrow J_v = 3{,}0631 \cdot 10^{-7}$ kg m²

$\rho = 7800$; $I_{p_v} = \frac{1}{2}\pi r^4 \Rightarrow I_{pv} = 9{,}817 \cdot 10^{-10}$ m⁴

volante $J = \rho \cdot I_p\, b \Rightarrow J = 6{,}126 \cdot 10^{-7}$ kg m²

(3) → $\boxed{\omega_r = 53\,065 \text{ rad/s}}$

Extra e se tivéssemos



$$E_{p\,c/m} = \frac{1}{2} k_{t2}\, \theta^2\left(\frac{l}{4}, t\right) + \frac{1}{2} k_{t1}\, \theta^2(l, t)$$

$$E_{p\,c/m\,máx} = \frac{1}{2} k_{t2}\, \Theta^2\left(\frac{l}{4}\right) \underbrace{\cos^2 \omega t}_{1} + \frac{1}{2} k_{t1}\, \Theta^2(l) \underbrace{\cos^2 \omega t}_{1}$$

$$\boxed{E_{p\,c/m\,máx} = \frac{1}{2} k_{t2}\, m \frac{l}{4} + \frac{1}{2} k_{t1}\, m l}$$

c) Determinar a freq. fund. exata

Análise da aula TP22 tínhamos chegado à eq. das freq. nat. de torção

$$tg\,\alpha = \frac{1}{\lambda \alpha} \Rightarrow \alpha_1 = 0{,}653$$

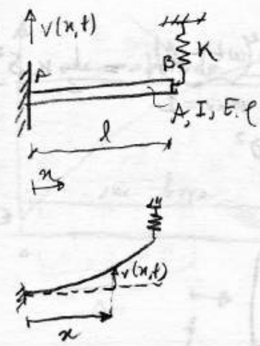
λ: $2 = \frac{J}{J_v}$; $\alpha = \frac{\omega l}{c}$; $c = \left(\frac{G}{\rho}\right)^{1/2}$ $\Rightarrow \boxed{\omega_1 = 52\,953 \text{ rad/s}}$

d) Determinar uma comparação dos resultados e cálculo do erro relativo p/ freq. estimada

$$\varepsilon = \frac{|\omega_1 - \omega_r|}{\omega_1} \cdot 100 = 0{,}2\% \Rightarrow \text{boa estimativa}$$

verifica-se q ω_r é uma aproximação p/ valores superiores

<u>Dados</u>



a) <u>Determinar</u> as condições fronteira e a sua classificação

<u>Análise</u>

C.F.

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} v(0,t)=0 & \text{geom.} \\ \dfrac{\partial v(0,t)}{\partial x}=0 & \text{geom.} \end{cases} \qquad x=l \Rightarrow \begin{cases} K\,v(l,t) = EI\dfrac{\partial^3 v(l,t)}{\partial x^3} & (3) \\ EI\dfrac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{nat.} & (4) \end{cases}$$

$$EI\frac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2}$$

$Q \uparrow \boxed{m} \downarrow K\,v(l,t)$ (dx)

$$\Sigma F = ma \Rightarrow Q - K\,v(l,t) = \overset{\approx 0}{\cancel{m}}\ddot{v}(l,t) \Rightarrow \frac{\partial M(l,t)}{\partial x} = K\,v(l,t)$$

$$\frac{dM}{dx} \qquad \Rightarrow EI\frac{\partial^3 v(l,t)}{\partial x^3} = K\,v(l,t)$$

$M \uparrow \boxed{J} \uparrow K$ ($x=l$)

$$\Sigma M = K = J\alpha$$

$$M(x,t) = EI\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \Rightarrow M(l,t) = EI\,\frac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2} = \overset{\approx 0}{\cancel{J}}\alpha \Rightarrow M(l,t) = EI\frac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2} = 0$$

$J \approx 0$

b) <u>Determinar</u> o valor da freq. fund/al exata p/ $K=0$ e $K=\infty$

<u>Análise</u> p.332 temos várias soluções exatas, freq. e formas naturais p/ dif. cond. fronteira

<u>K=0</u>

enc. livre

$$\beta_1 l = 1{,}8751 \Rightarrow \boxed{w_1 = 3{,}1566\left(\frac{EI}{\rho A l^4}\right)^{1/2} \text{ rad/s}}$$

$$w_1 = (\beta_1 l)^2\left(\frac{EI}{\rho A l^4}\right)^{1/2}$$

<u>K=∞</u>

enc. apoio duplo

$$\beta_1 l = 3{,}9266 \Rightarrow \boxed{w_1 = 15{,}418\left(\frac{EI}{\rho A l^4}\right)^{1/2} \text{ rad/s}}$$

(!) Nota: sempre q̃ no exame for pedida a solução exata ir 1º à tabela ver se lá está. Se ñ estiver tem q̃ se deduzir a eq. da freq. como fizemos na TP22 e TP23

c) <u>Dados</u>

- utilizar método da energia de Rayleigh
- admitir como aproximação da forma natural fund/al a função $\psi(x) = \delta\left(\frac{x}{l}\right)^2$

<u>Determinar</u> se a função é ou ñ aplicável

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{2\delta x}{l^2} \qquad \psi(0) = 0$$

respeita as C.F. geom. ✓

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2\delta}{l^2} \quad \checkmark \text{ é derivável 2x} \qquad \frac{2\delta 0}{l^2} = 0$$

⇒ é aplicável

d) Determinar estimativa da freq fundamental   Dados considerar $K = \alpha \frac{EI}{l^3}$

Análise $E_{p_{max}} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right)^2 dx + E_{p_{efun\,max}} \simeq \frac{1}{2}K v^2(l,t) = \frac{1}{2}K V^2(l)\underbrace{\cos^2(\omega t - \phi)}_{max=1} = \frac{1}{2}K\delta^2$

$\Leftrightarrow \varphi^2(l) = \delta^2$

$E_{p_{max}} = \frac{EI}{2}\int_0^l \frac{4\delta^2}{l^4}dx + \frac{1}{2}K\delta^2$, $K \simeq \frac{\alpha EI}{l^3}$

$= \frac{\cancel{2}\cancel{K}EI\delta^2}{\cancel{2}\,l^{\cancel{4}3}}\cancel{l} + \frac{1}{2}\alpha\frac{EI}{l^3}\delta^2 = \boxed{\frac{EI\delta^2}{l^3}\left(2+\frac{\alpha}{2}\right) = E_{p_{max}}}$

$E_{c_{max}} = \omega^2\frac{1}{2}\int_0^l \rho A\,\varphi^2(x)\,dx + E_{c_{efun\,max}}^{\,=0} = \omega^2\frac{1}{2}\rho A\frac{\delta^2}{l^4}\int_0^l x^4 dx = \frac{\omega^2}{2}\rho A\frac{\delta^2}{\cancel{l^4}}\frac{l^5}{5}$

$\boxed{E_{c_{max}} = \frac{\omega^2}{10}\rho A\delta^2 l}$

$E_{p_{max}} = E_{c_{max}} \Rightarrow \frac{EI\delta^2}{l^3}\left(2+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\omega^2}{10}\rho A\delta^2 l \qquad (5)$

e) Determinar a valid. da solução p/ os valores limites i) $\alpha \to 0$ é ou ñ válida
Análise   ii) $\alpha \to \infty$

i) $\alpha \to 0 \Rightarrow$ s/ rigidez, $K \to 0$

$\frac{\alpha EI}{l^3} = K \Rightarrow \alpha = \frac{l^3 K}{EI}$

ao fazer isto é como a mola desaparecesse ent. a cond. fronteira (3) passa a ser $EI\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(l,t) = 0$ mas como é uma C.F. natural a função ñ tem de a respeitar e ptt ñ importa q se altera.

Vamos só calcular o erro,

de (5)

$\cancel{\delta}\frac{EI}{l^4}(2+\alpha) = \frac{\omega_1^2}{10}\rho A\cancel{\delta^2}\cancel{l} \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{10EI}{\rho A l^4}\left(2+\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \omega_1^2 = \left(\underbrace{\frac{EI}{\rho A l^4}}_{a}\right)^{1/2}\left((4+\alpha)\cdot 5\right)^{1/2}$ isolar o a

$\frac{3{,}5166 - 20^{1/2}}{3{,}5166}\cdot 100 = 27\%$

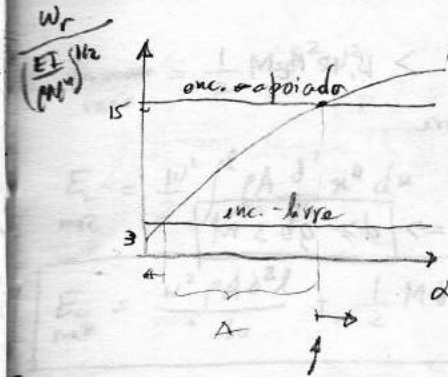
ii) $\alpha \to \infty \Rightarrow K \to \infty$

para C.F. geométrica q a função $\varphi(x)$ deve respeitar p/ ser aplicável

$\varphi(l) = \delta^2 \neq 0 \Rightarrow$ ñ respeita $\Rightarrow$ a função

$\varphi(x) = \delta\left(\frac{x}{l}\right)^2$ ñ é válida se $\alpha \to \infty$

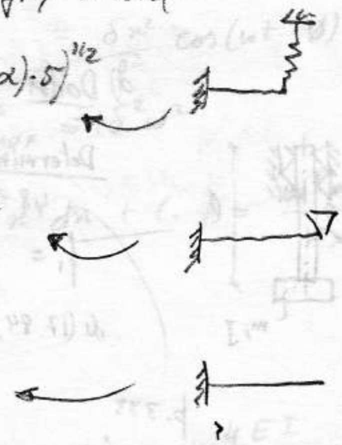
1) Determinar representação gráfica da variação da freq. natural



$$w_r = \left(\frac{EI}{\rho A l^4}\right)^{1/2}\left((4+\alpha)\cdot 5\right)^{1/2}$$

$$15,418\left(\frac{EI}{\rho A l^4}\right)^{1/2}$$

$$3,156\left(\frac{EI}{\rho A l^4}\right)^{1/2}$$

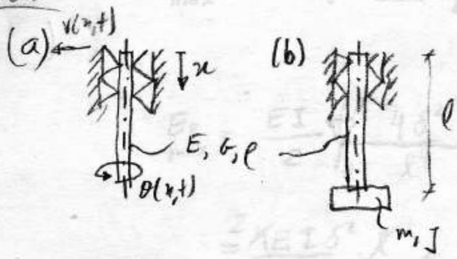


daqui p/ frente,

por muito rígida q seja a mola, ñ é + rígida q um apoio e ptt é preferível usar a do meio (q é a solução exata). Para valores na zona A é melh usar a função de aproximação p/ estimar w_r

AULA TP 26 — SIST. CONTÍNUOS: MÉTODO DA ENERGIA DE RAYLEIGH — 3/JUN/2014

Dados



$E = 210$ GPa
$\rho = 7800$ kg/m³
$l = 1,2$

a) Dados freq. fundamental de flexão deve ser $> 15,12$ Hz

Determinar o diâmetro da árvore

$$f_1 = \frac{(\beta_1 l)^2}{2\pi}\left(\frac{EI}{\rho A l^4}\right)^{1/2} \text{Hz} \Rightarrow \boxed{d \geq 9{,}03\text{ m}}$$

$\beta_1 l = 1{,}875$, $E = 210\cdot10^9$, $I = \frac{\pi d^4}{64}$, $\rho = 7800$, $A = \frac{\pi d^2}{4}$, $l = 1,2$

de (17.84) p.333

b) Dados $M = \alpha \rho A l$

considerar o método da energia de Rayleigh

usar funções de aproximação da família de funções $V_i(x) = \delta\left(\frac{x}{l}\right)^i \quad i = 1, \dots, \infty$

Determinar uma função adequada p/ estimar a freq natural de flexão do sistema

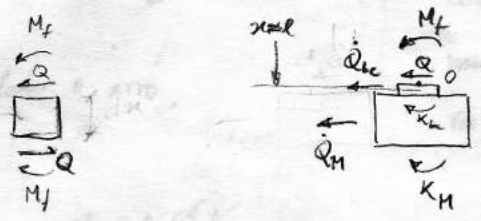
Para poder ser aplicável tem de ser derivável pelo - 2x e respeitar as C.F. E das f respeitam isso, devemos escolher a f se aproxima + da 1ª forma natural.

$$V_2(x) = \delta\left(\frac{x}{l}\right)^2$$

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = EI\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} v(0,t) = 0 & (1)\ \text{geom} \\ \dfrac{\partial v(0,t)}{\partial x} = 0 & (2)\ \text{geom}\end{cases}$$

$$x = l \Rightarrow \begin{cases} EI\dfrac{\partial^3 v(l,t)}{\partial x^3} = M\ddot{v}(l,t) & \text{do } \Sigma F \\ M_f(l,t) = \dfrac{\partial^3 v(l,t)}{\partial t^2 \partial x}\left(J_{bc}^{\approx 0} + J_{massa}^{\approx 0}\right) & \text{do } \Sigma M\end{cases}$$



$$\Sigma F = \dot{Q} \Rightarrow Q = \cancel{Q_{bc}}^{\approx 0} + Q_M \sim M\ddot{v} \quad (m \neq 0)$$

$$\Sigma M_0 = K_0 \Rightarrow M_f = \cancel{K_{bc}}^{\approx 0} + \cancel{K_M}^{\approx 0} \quad \text{(n é dada info sobre } J_0 \text{ } J_M\text{)}$$

$V_2(0) = 0$ ✓

$\frac{\partial V_2(0)}{\partial x} = 0$ ✓

} é uma função admissível

c) Determinar uma expressão p/ freq. natural de flexão (Rayleigh)

$$E_{P_{max}} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + E_{P_{glob\ max}}^{\ \approx 0} \qquad E_{C_{max}} = \omega^2\frac{1}{2}\int_0^l \rho A V^2(x)\,dx + E_{C_{ign\ max}}$$

$$V(x) \simeq \frac{\delta}{l^2}x^2 \qquad E_{P_{max}} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{2\delta}{l^2}\right)^2 dx = \frac{\cancel{4}2\delta^2\cancel{l}}{\cancel{2}l^{\cancel{4}3}} \Rightarrow \boxed{E_{P_{max}} = \frac{2\delta^2 EI}{l^3}}$$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{2\delta}{l^2}$$

$$\underset{massa}{E_c} = \frac{1}{2} M \dot{v}^2(l,t) + \frac{1}{2} \int_{massa}^{A} \left(\frac{\partial \dot{v}(x,t)}{\partial x}\right)^2 =$$

$$v(x,t) = V(x)\, g(t) = \frac{\delta x^2}{l^2}\cos(\omega t - \phi)$$

$$\underset{máx}{E_{c\,massa}} = \frac{1}{2} M \delta^2 \omega^2 \qquad \dot{v}^2_{máx} = +\delta^2\omega^2$$

$$\underset{máx}{E_c} = \frac{\omega^2}{2}\int_0^l \rho A \frac{\delta^2}{l^4} x^4\, dx + (\ldots) = \frac{\omega^2 \rho A \delta^2}{2 l^4}\int_0^l x^4\, dx + (\ldots) = \frac{\omega^2 \rho A \delta^2 l^5}{2 l^4 5} + (\ldots)$$

$$\boxed{\underset{máx}{E_c} = \frac{\omega^2 \rho A \delta^2 l}{10} + \frac{1}{2} M \delta^2 \omega^2}$$

$$\underset{máx}{E_p} = \underset{máx}{E_c} \Rightarrow \frac{2\delta^2 EI}{l^3} = \frac{\omega^2 \rho A l \delta^2}{10} + \frac{1}{2} M \delta^2 \omega^2 \Rightarrow \omega_r^2 = \frac{4EI}{l^3\left(\frac{\rho A l}{5} + \underbrace{M}_{\alpha \rho A l}\right)} = \left(\frac{EI}{\rho A l^4}\right)\left(\frac{4}{\frac{1}{5}+\alpha}\right) \quad \text{eq. (4)}$$

d) Determinar a velocid. crítica do sistema árvore ferrata. Dado $\alpha = 0{,}5$

Análise: A árvore está a rodar e o q nós queremos dimensionar isto de maneira q nenh. das freq. nat. coincida c/ a v. rotação

$$\omega_r^2 = \frac{\overbrace{E}^{210\cdot 10^9}\overbrace{I}^{\frac{\pi d^4}{64},\ 0{,}03}}{\underbrace{\rho}_{7800}\underbrace{A}_{\frac{\pi d^2}{4}}\underbrace{l^4}_{1{,}2}}\ \frac{4}{\underbrace{\frac{1}{5}+\alpha}_{0{,}5}} \Rightarrow \boxed{\omega_r = 64{,}601\ rad/s}$$

esta é aproximadamente a 1ª velocid. crítica. Isto é, se puserem a árvore a rodar a esta velocid. vai começar a fletir descontroladamente.

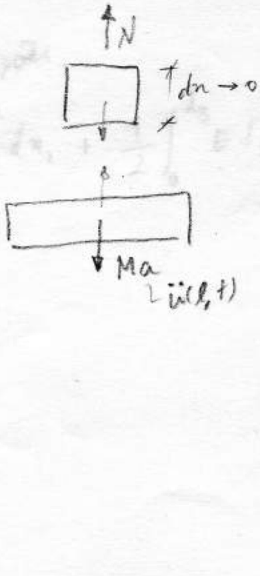
e) Determinar a eq. de freq. naturais de vibração axial do sistema

Análise: a sol. exata, é dada por

$$u(x,t) = \left(A\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)\right)\left(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)\right)$$

P/ determinar as ctes é preciso determinar as C.F.

$x = 0 \Rightarrow u(0,t) = 0 \qquad x = l \Rightarrow$



$$N(x) = EA\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$\Sigma F = ma \Rightarrow -N = M\ddot{u}(l,t)$$

$$\Rightarrow -N(l,t) = -EA\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = M\ddot{u}(l,t)$$

$u(0,t) = 0 \implies 0 = A$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \left(B\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}x \right)(\dots) \qquad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \left(B \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}x \right)\left(\cancel{-\omega^2} C\cos\omega t - \omega^2 D \operatorname{sen}\omega t \right)$$

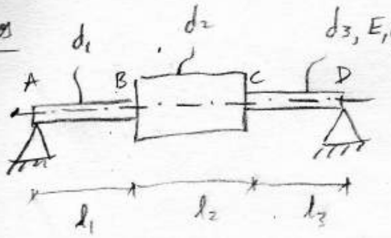
$$-EA\left(B\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}l \right)(\cancel{\dots}) = -M\omega^2\left(B \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}l \right)(\cancel{\dots}) \implies +\frac{EA}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}l\right) = +M\omega \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{c}l\right)$$

$$\implies \boxed{tg\left(\frac{\omega}{c}l\right) = \frac{EA}{cM\omega}}$$

<u>Notas:</u> • na p. 242 estão alguns casos de eq. de freq. Se no exame fosse pedido um desses casos bastava ir à tabela...

• Este caso c/ forrula na ponta n é muito diferente da situação fixa - livre, p/ isso se n tivesse sido dada 1 função de aproximação podíamos usar essa.

<u>Dados</u>



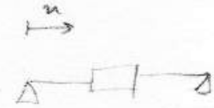
a) <u>Dados</u>

- Usar método de Rayleigh
- considerar funções sinusoidais p/ AB e CD

<u>Determinar</u> a freq. natural de flexão do veio

<u>Análise</u>

O 1° passo é escolher 1 função de aproximação $\bar{\varphi}$



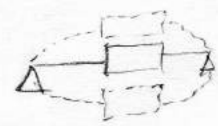
2 - respeite as C.F geométricas

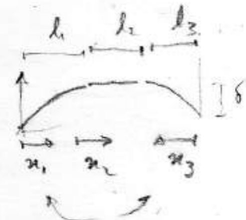
1 - seja derivável 2x

- se aproxime o máx possível à forma nat. vibração
- seja função sinusoidal

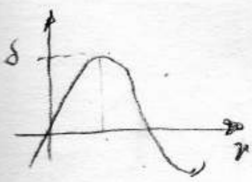
C.F. $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} v(0,t) = 0 & \text{geom.} \\ M(0,t) = \dfrac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$ $\quad x = l \Rightarrow \begin{cases} v(l,t) = 0 & \text{geom.} \\ M(l,t) = \dfrac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$

A 1° forma nat. de vibração será algo do género





assim usamos a mesma função nas 2



gero $\bar{\varphi}$ pelo $x = l$ de

$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow sen\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{l}\right)$

Xame-se às funções de aproximação, F_i

1 - $F_1(x) = \delta \, sen\left(\frac{\pi}{2} \frac{x_1}{l_1}\right)$ $\quad F_2 = \delta \quad$ $F_3(x_3) = \delta \, sen\left(\frac{\pi}{2} \frac{x_3}{l_3}\right)$

$\frac{d^2 F_1}{dx^2} = -\delta \left(\frac{\pi}{2 l_1}\right)^2 sen\left(\frac{\pi}{2} \frac{x_1}{l_1}\right)$ ✓

2 - $x = 0$, $x_1 = 0 \Rightarrow F_1(0) = \delta \, sen(0) = 0$ ✓ $\quad x = l \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow F_3(0) = 0$ ✓

Pode-se usar estas funções.

(massa ñ se deforma)

$$E_{p_{máx}} = \frac{1}{2}\int_0^{l_1} E I_1 \left(\frac{d^2 F_1}{d x_1^2}\right)^2 dx_1 + \frac{1}{2}\int_0^{l_3} E I_3 \left(\frac{d^2 F_3}{d x_3^2}\right)^2 dx_3 + \cancel{E_{p_{m}}}^{=0}$$

$=$