MAPA CONCEITOS 2GL

~~X~~ assenta no princípio de $\Delta E_{mec} = 0$ portanto só p/ sistemas s/ ξ ou então tem de ser desprezado

$\omega_r^2 \approx R = \frac{v^T K v}{v^T m v}$ Quociente de Rayleigh ~~X~~ ← aproximada

podem ser determinadas de forma

exata

freq. fundamental

ordem crescente de valor

$\boxed{\text{Sistema c/ 2G.L.}}$ $\xrightarrow{\text{caraterizado por ter}}$ 2 modos de vibração q se caraterizam por

ω_1 e ω_2 ← freq. naturais de vibração

$\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ ← amplitudes ou formas naturais de vibração. Aos vetores q as contém chama-se vetores modais

q se determinam pelo determinante e prob. caraterístico

$|\underline{K} - \omega^2 \underline{m}| = 0 \Rightarrow \omega_i$

$[\underline{K} - \omega^2 \underline{m}]\underline{u} = 0$

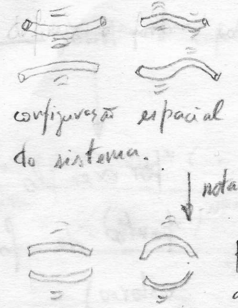
$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} (\dots) \\ 1 \end{bmatrix}$ $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} (\dots) \\ 1 \end{bmatrix}$

matriz modal $\underline{U}$ ← podemos agrupá-los

$\underline{U} = [\underline{u}_1 \;\; \underline{u}_2]$

$\underline{U} = \begin{pmatrix} (\dots) & (\dots) \\ (\dots) & (\dots) \end{pmatrix}$

podem ser normalizados sendo o geral/ p/



definem a forma ou configuração espacial da vibração do sistema.

notar q

podemos ↑ ou ↓ as 2 amplitudes do vetor na mesma proporção

$\boxed{K \underline{u}_i}$

não altera a forma natural pois as proporções entre as componentes de cada u_i fica =

no fundo estamos a fazer isto

$\frac{1}{(\underline{u}_i^T \underline{m}\, \underline{u}_i)^{1/2}} \cdot \underline{u}_i$ ← fazendo massas modais (M_i) unitárias $M_i = 1$

|| de q resulta

$\underline{\phi}_i$ ← vetor modal ($\underline{u}_i$) normalizado p/

tal como os ñ normalizados

podemos agrupá-los numa matriz

$\underline{\Phi} = [\underline{\phi}_1 \;\; \underline{\phi}_2]$

$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$

verifica a eq.

$\underline{\phi}_i^T \underline{m}\, \underline{\phi}_i = M_i = 1$

ñ confundir!

resposta em regime: livre $\underline{x}(t) = \underline{u}_i \cos(\omega_i t - \phi)$ ← freq. natural

forçado $\underline{x}(t) = \underline{X}(\omega) \cos \omega t$ ← freq. da solicitação harmónica

periódico

discreto

s/ amortecedor $\xi = 0$ → a eq. do mov. pode-se escrever

$\underline{m}\, \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{K}\, \underline{x}(t) = \underline{f}(t)$

se $f(t)$ ñ for harmónico faz-se transformação de coordenadas q permite desacoplar dos termos elásticos e de inércia

$\begin{bmatrix} (\dots) & (\dots) \\ (\dots) & (\dots) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} (\dots) & 0 \\ 0 & (\dots) \end{bmatrix}$

$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}\, \eta(t)$

geral/ usa-se esta como matriz de transf.

$\ddot{\eta}(t) + \omega_i^2 \eta(t) = N_i(t)$

eq. do mov. na base modal

é uma função do tempo analítica?

Não → MDF

Sim ↓

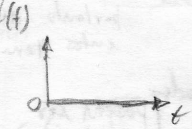
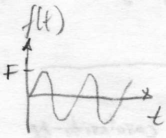
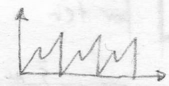
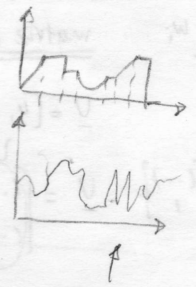
$\eta_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \operatorname{sen} \omega_i (t-\tau)\, d\tau$

transforma-se de volta

p. 49 pq ñ foi preciso desacoplar?

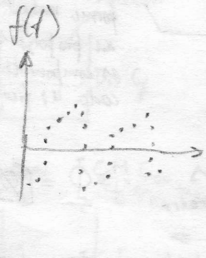
ME3: INTRODUÇÃO AO MDF

Conhecemos a fórmula analítica de $f(t)$?

- Sim — regime
  - livre: $f(t) = 0$ 
  - forçado
    - harmónico: $f(t) = F\cos\omega t$ 
    - periódico: $f(t) = \begin{cases} (\dots) & \text{se} \\ (\dots) & \text{se} \end{cases}$  ← Fourier
    - qualqer: $f(t) = (\dots)$  ∫ Duhamel
- Não — MDF

difícil de integrar?

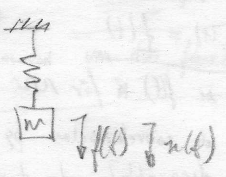
por exemplo só conhecemos pontos da força (medindo valores)

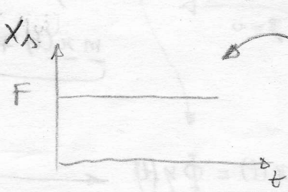


O q é o deslocam estático?

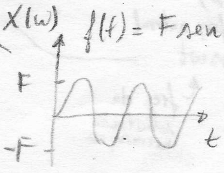
Deslocam sofrido se a força aplicada n fosse ... ou ... ou ... mas sim estática.

$$X_1 = \frac{F_{eq}}{K_{eq}}$$



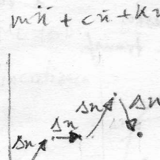


$X(\omega)$ $f(t) = F\,\text{sen}\,\omega t$



PRESSUPOSTOS DA ∫INTEGRAÇÃO DIRETA DA $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku$

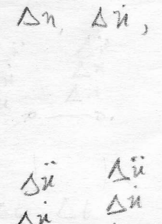
$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku$ real



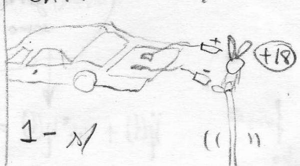
respeita

1- verifica $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku$ em instantes discretos separados p/ Δt (= cte)

2- p/ cada instante de tempo estabelece o tipo de Δu, $\Delta \dot{u}$, $\Delta \ddot{u}$



CARATERIZAÇÃO DO MDF



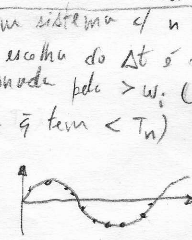
1- p/ arrancar próprio: $x(t_i)$ precisa de $x(t_0)$ e $x(t_0 - \Delta t)$ ← ñ existe

2- método explícito (calcula $x(t_i + \Delta t)$ por $m\ddot{x}(t_i) + Kx(t_i) = (\dots)$ (eq. do mov. em $t = t_i$)

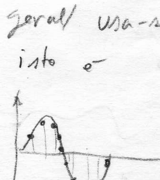
3- condicional/ estável se $\Delta t > \Delta t_{cr}$ ⇒  ⇓ instável

$\frac{T_n}{\pi}$

Num sistema c/ n G.L. a escolha do Δt é condicionada pelo $> \omega_i$ i.e. a q tem $< T_n$



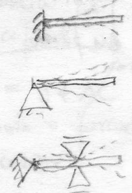
geral/ usa-se $\Delta t_{cr} = \frac{T_n}{10}$ isto é



assim a função fica bem definida c/ a discretização

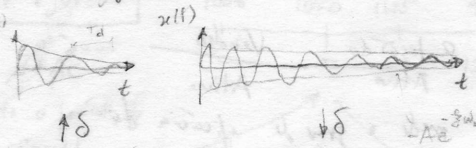
CONDIÇÕES FRONTEIRA
- Geométricas : dizem respeito a como o corpo está ligado ao exterior. △□○
- Naturais : são as q se verificam natural/ em qq situação.

Ex:



para $x=l$, as C.F. são naturais e são =s p/ qq maneira q se prenda o corpo.

δ: decremento logarítmico - veloc// (taxa) c/ q a amplitude de vibração de um sistema subamortecido diminui.

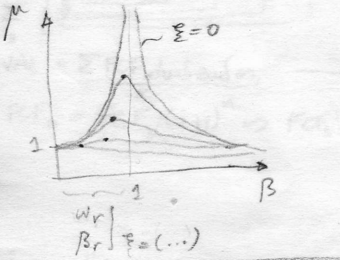


$$\delta = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{N} \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)}$$

$t_2 = t_1 + NT$

μ: fator de amplificação dinâmica - diz-nos qtas xs o desloc. estático é amplificado p/ o sist. estar a vibrar.

μ é máx qdo $\omega = \omega_r$.



← No caso do copo $\omega_n = \omega_r$ ($\xi = 0$)

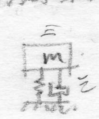
tocar no copo e medir ω_n → o copo irá partir a uma freq. um pouco menor, se ele for forçado a vibrar.

ϕ: desfasamento da resposta em relação à excitação

excitação	resposta
$\cos(\omega t)$	$\cos(\omega t - \phi)$
$\text{sen}(\omega t)$	$\cos(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2})$
$\cos(\omega t + \gamma)$	$\cos(\omega t - \phi + \gamma)$

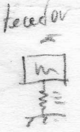
excitação	resposta
$\cos(p\omega t - \psi)$	$\cos(p\omega t - \phi - \psi)$

ω_d: freq. à qual um sistema c/ amortecedor vibra se deixado à sua mercê. O sistema c/ amortecedor vibra ligeira/ + devagar do q s/ amortecedor natural//. $\boxed{\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$



FREQ. NAT. AMORTECIDA

ω_n: freq. à qual um sistema s/ amortecedor vibra ou c/ amortecedor vibraria sem ele natural/.



$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}}$ FREQ. NAT.

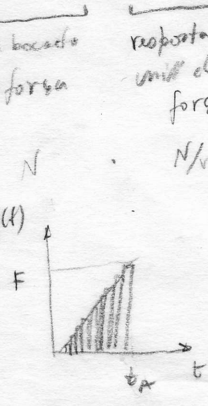
ω_r: freq. de excitação p/ a qual μ é máximo. FREQ. RESSONÂNCIA

⇓

$\beta_r = \frac{\omega_r}{\omega_n}$ se $f(t) = F\cos(\omega_r t)$

$$\underbrace{f(\tau)\,d\tau}_{\text{um bocado de força}} \cdot \underbrace{h(t-\tau)}_{\text{resposta p/ unid. de força}} = \underbrace{dx}_{\text{um bocado de resposta}} \Rightarrow \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = x(t)$$

N · N/m = m



$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

a posição do sistema no instante t é devida a todos os impulsos até esse instante

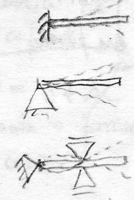
se $t > t_A$ a posição no instante t depende da contribuição toda da força (i.e. dos impulsos toda)

$$\int_0^{t_A} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

CONDIÇÕES FRONTEIRA

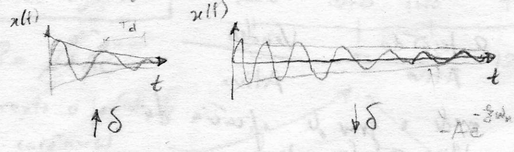
- Geométricas: dizem respeito a como o corpo está ligado ao exterior. △□○
- Naturais: são as q̃ se verificam natural/ em qq situação.

Ex:



para $x = l$, as C.F. são naturais e são = s p/ qq maneira q̃ se prenda o corpo.

δ: decremento logarítmico – veloc/// (taxa) c/ q̃ a amplitude de vibração de um sistema subamortecido diminui.



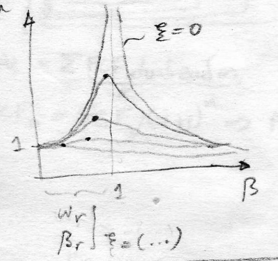
$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{N}\ln\frac{x(t_1)}{x(t_2)}$$

$t_1 + NT$

$\uparrow\delta \qquad \downarrow\delta \qquad e^{-\xi\omega_n t}$

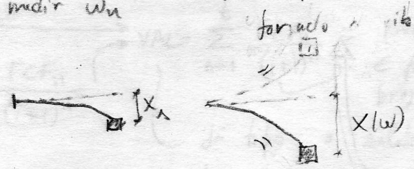
μ: fator de amplificação dinâmica – diz-nos q̃tas xs o desloc. estático é amplificado p/ o sist. estar a vibrar.

μ é máx qdo $\omega = \omega_r$.



← No caso do copo $\omega_n = \omega_r$ $(\xi = 0)$

tocar no copo e medir ω_n → o copo irá partir a uma freq. um pouco menor, se ele for forçado a vibrar.



ϕ: desfasado da resposta em relação à excitação

excitação	resposta
$\cos(\omega t)$	$\cos(\omega t - \phi)$
$\text{sen}(\omega t)$	$\cos(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2})$
$\cos(\omega t + \gamma)$	$\cos(\omega t - \phi + \gamma)$

excitação	resposta
$\cos(p\omega t - \psi)$	$\cos(p\omega t - \phi - \psi)$

ω_d: freq. à qual um sistema c/ amortecedor vibra se deixado à sua mercê. O sistema c/ amortecedor vibra ligeira/ + devagar do q̃ s/ amortecedor natural/. $\boxed{\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ FREQ. NAT. AMORTECIDA

ω_n: freq. à qual um sistema s/ amortecedor vibra ou c/ amortecedor vibraria sem ele natural/.

$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}}$ FREQ. NAT.

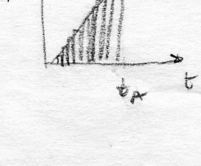
ω_r: freq. de excitação p/ a qual μ é máximo. FREQ. RESSONÂNCIA

$\Downarrow$ se $f(t) = F\cos(\omega_r t)$

$\beta_r = \frac{\omega_r}{\omega_n}$

$$\underbrace{f(\tau)\,d\tau}_{\text{um bocado de força}} \cdot \underbrace{h(t-\tau)}_{\text{resposta p/ unid. de força}} = \underbrace{dx}_{\text{um bocado de resposta}} \Rightarrow \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = x(t)$$

N · N/m = m



$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

a posição do sistema no instante t é devida a todos os impulsos até esse instante

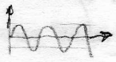
se $t > t_A$ a posição no instante t depende da contribuição toda da força (i.e. dos impulsos todos)

$$\int_0^{t_A} f(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

1GL

REGIME LIVRE $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$

→ N̄-amortecido ($\xi = 0$)



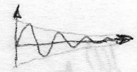
$$\blacksquare\ x(t) = A\cos(w_n t - \phi)$$

$$\phi = tg^{-1}\left(\frac{\dot{x}(0)}{x(0)\,w_n}\right)$$

$$A = \left(x^2(0) + \left(\frac{\dot{x}(0)}{w_n}\right)^2\right)^{1/2} \qquad w_n = \left(\frac{K_{eq}}{m_{eq}}\right)^{1/2}$$

Para haver movimento é preciso q $\left[\begin{array}{l} x_0 \neq 0 \\ \dot{x}_0 \neq 0 \end{array}\right.$

→ sub-amortecido ($0 < \xi < 1$)



$$\blacksquare\ x(t) = A e^{-\xi w_n t}\cos(w_d t - \phi)$$

$$w_d = w_n(1-\xi^2)^{1/2} \qquad \phi = tg^{-1}\ \frac{\dot{x}(0) + \xi w_n x(0)}{w_d\, x(0)}$$

$$A = \left(\left(\frac{\dot{x}(0) + \xi w_n x(0)}{w_d}\right)^2 + x^2(0)\right)^{1/2}$$

$$\blacksquare\ \dot{x}(t) = A e^{-\xi w_n t}\, w_n \cos(w_d t - \phi - \psi)$$

$$\psi = tg^{-1}\ \frac{(1-\xi^2)^{1/2}}{\xi}$$

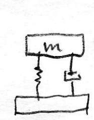
REGIME FORSADO $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f(t)$

$x = x_h + x_p$ ~ w excitação

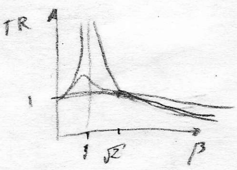
→ HARMÓNICO — solicitação

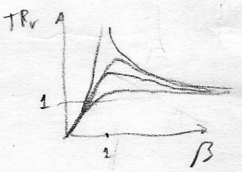
forsa-se o sistema a mecer de maneira harmónica

- ativa
  - $f(t) = F\cos wt$
  - $\blacksquare\ x(t) = X(w)\cos(wt - \phi)$ $\quad \mu = \dfrac{X(w)}{X_0} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$ $\quad \phi = tg^{-1}\left(\dfrac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$
  - $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F\cos wt$
- passiva
  - $y(t) = Y\cos wt$
  - $m\ddot{x} = -c(\dot{x} - \dot{y}) - K(x - y)$ $\quad \gamma = tg^{-1}(2\xi\beta) \quad \psi = \phi - \gamma$
  - $\blacksquare\ x = X(w)\cos(wt - \psi)$



$$TR_{força} = \frac{F_T}{F_{eq}} = \quad \rightarrow TR = \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}\cdot\mu = \frac{X(w)}{Y} \qquad TR_r = \beta^2\cdot\mu = \frac{Z(w)}{Y}$$





- massa desiquilibrada

aproxima-se a solicitação (e a resposta) p/ soma de cosenos cada x c/ > freq. (séries de Fourier)

→ PERIÓDICO

forsa-se o sistema a mecer de maneira periódica

$$f(t) = \frac{F_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} F_p\cos(pwt - \psi_p)$$

$\frac{F_0}{2}$: valor médio de função; $(\ldots)\cdot p$

$\psi_p = tg^{-1}\left(\dfrac{B_p}{A_p}\right)$

$F_p = \sqrt{A_p^2 + B_p^2}$ ~ representa a amplitude de cada harmónico da força $f(t)$

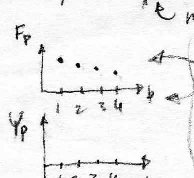
$$\left.\begin{array}{l} F_0 = \\ A_p = \\ B_p = \end{array}\right. \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ \begin{array}{l} \\ \cos pwt \\ \text{sen}\, pwt \end{array}\ dt$$

$$\blacksquare\ x(t) = \frac{F_0}{2K} + \sum_{p=1}^{\infty} X_p(w)\cos(pwt - \phi_p - \psi_p)$$

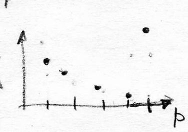
$X_p = X_{\Lambda p}\cdot\mu_p$, $\quad X_{\Lambda p} = \dfrac{F_p}{K_{eq}}$

w_p: freq. do harmónico p $\quad w_p = w\cdot p$ (freq. de excitação; nº do harmónico) $\quad \beta_p = \dfrac{pw}{w_n}$

espectros de
- magnitude
- fase



da força



da resposta

se $pw \approx w_r$, X_p pode ser a maior, comparar c/ X_1

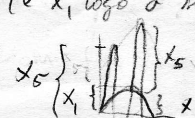
se $pw = w_r$, X_p é a amplitude predominante

se $F_p \downarrow \rightarrow X_p \downarrow\downarrow$

X_p diminui c/ $\frac{1}{p^2}$ (razão inversa do quadrado de p)

se X_1 é predominante →

se X_5 é predominante (e X_1 logo a seguir)



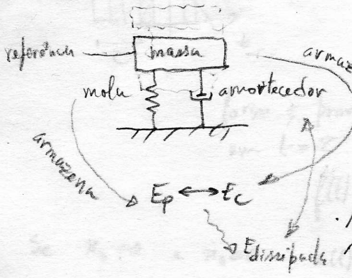
zoom $\quad X_5 > X_1$

Sistema semi-definido:

- movimento é, em geral, combinação dos modos de corpo rígido e dos elásticos.
- matriz $\underline{K}$ é singular
- u_1 é ~~⊥~~ a u_2 (o 1° modo nat. é ortogonal ao 2° modo nat.)

Sistema vibratório

vibração: movimento alternado relativamente a 1 posição de referência



$\cdot\ \mu = 0$: $\Delta E_{mec} = 0 \Rightarrow$ sistema é conserva energia mecânica (conservativo)

$EI(x)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = M_f(x)$

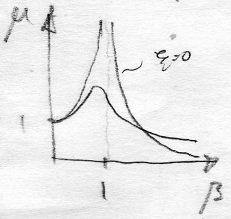
$P(x) = EA(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}$ $\qquad$ $M_t = GI_p(x)\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$

GRÁFICOS

μ

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

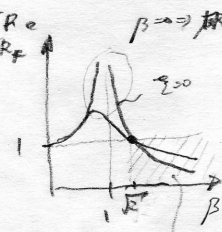
$\beta = 0 \Rightarrow \mu = 1$



TR e $TR_{força}$

$$\frac{TR}{TR_F} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$\beta = 0 \Rightarrow TR = 1$

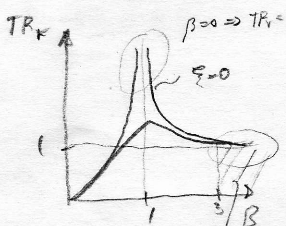


isolador de vibrações

TR_r

$$TR_r = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

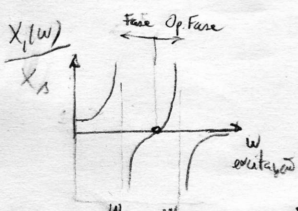
$\beta = 0 \Rightarrow TR_r = 0$



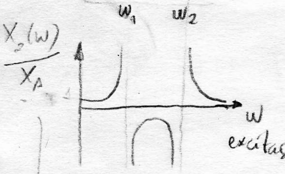
vibrómetros

- todos estes 3 gráficos têm centro em 1 e se começam em 1 tendem p/ zero.
- todos menos o TR_r têm máximo antes de $\beta = 1$

para $\omega \approx \omega_r \Rightarrow \uparrow$ sensibilidade ao amortecedor

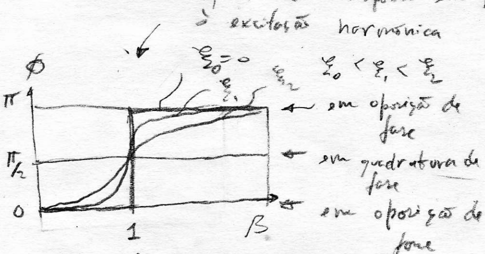


amplitude da resposta adimensional a 1 solicitação harmónica, 2GL no 1°GL



não aprendemos a calcular isto p/ + do que 1G.L.

desfasamento da resposta em relação à excitação harmónica



é o ω p/ o qual isto acontece chama-se ω_r de fase

p. 204

COORDENADA GENERALIZADA

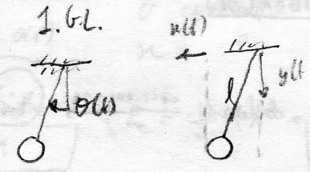
deslocato [R ↔ linear, ↺ ~~lar~~]

costumam ser representados por q_i

coordenada independente ~~q~~ descreve o movito do sistema 2° um G.L.

i.e. ela sozinha consegue descrever o movito do sist. 2° um G.L.

1. G.L.



o θ descreve total/a posição da massa, veloc/// e aceleração. i.e. a sua config. dinâmica

o x e o y tb descrevem a posição da massa mas dependem um do outro p/ o fazer

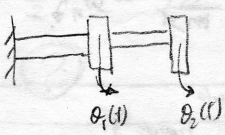
$x^2 + y^2 = \ell^2$

se nº GL > 1

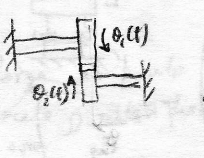
sistema de coordenadas generalizadas

cada q_i descreve o seu G.L.

em conjunto descrevem de forma única a config. dinâmica do sistema. e são independentes da condição de restrições.



2 G.L.



1 G.L.

$\theta_1(t) = n\,\theta_2(t)$

↑ escolher uma delas p/ ser generalizada

CARATERÍSTICAS DAS ENERGIAS CINÉTICA E POTENCIAL

$E_p = \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{K}\, \underline{x}$ $\qquad E_c = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}}^T \underline{M}\, \dot{\underline{x}}$ → é sup ≥ 0 e só é zero se $\dot{x} = 0$

é função quadrática dos deslocatos

é função quadrática das velocid//

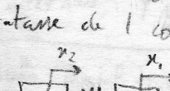
designam-se por formas quadráticas

definida positiva

semi-definida

porque pode acontecer: $E_p = 0$, $\underline{x} \neq 0$ — acontece em sistemas semi-definidos

apresentam ligações ao exterior q permitem q se movimente como se tratasse de 1 corpo rígido



$x_1 = x_2 \neq 0 \Rightarrow E_p = 0$

definida positiva

Se quisermos ser + generalistas

$E_c = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T \underline{M}\, \dot{\underline{q}}$ e $E_p = \frac{1}{2} \underline{q}\, \underline{K}\, \underline{q}$

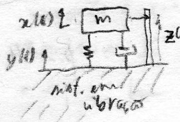
onde $\dot{\underline{q}}$ é o vetor de velocid// generalizadas
$\underline{q}$ 〃 dos deslocatos 〃

esta descrição tb serve p/ caraterizar as matrizes $\underline{K}$ e $\underline{M}$.
Só fica a faltar dizer q

- $\underline{K}$ e $\underline{M}$ são $\begin{bmatrix} \cdot & \square \\ \square & \cdot \end{bmatrix}$ simétricas

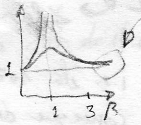
- $\underline{M}$ valores próprios > 0
  $\underline{K}$ 〃 〃 ≥ 0

TRANSDUTORES DE VIBRAÇÕES.

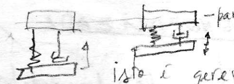


TRANSDUTORES DE VIBRAÇÕES Medem

- deslocamento $\xrightarrow{\text{chamam-se}}$ vibrómetros



para $TR_r \approx 1 \Rightarrow \beta \gg 3 \Rightarrow \omega = 3\omega_n \Rightarrow \omega_n \downarrow \Rightarrow \frac{K\downarrow}{m\uparrow}$ molas } flexíveis; massa grandes



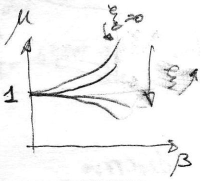
isto é queremos o transdutor parado enqto a base se mexe

- aceleração $\longrightarrow$ acelerómetros $- \underset{\uparrow}{Z(t)}\omega_n^2 = \mu \cdot \ddot{y}(t) \rightarrow$ se $\mu = 1$ o acel. mede a aceleração s/ erro

medido pelo acelerómetro

queremos q $TR_r \approx 1$ p/ q o transdutor acompanhe o melh possível a vibração

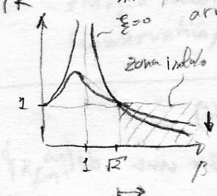
$\frac{K\downarrow}{m\uparrow} \Leftarrow \frac{\omega}{\omega_n \downarrow} \Leftarrow \downarrow\beta \longleftarrow$



CONTROLO DE VIBRAÇÕES

CONTROLO DE VIBRAÇÕES

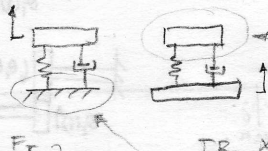
- por isolamento



reduz os picos de $X(\omega)$ qdo sist. passa por ω_r no arranque e paragem

$\downarrow\xi \downarrow \xi$ diminui a eficiência do isolam mas

$\overrightarrow{TR < 1}$:)



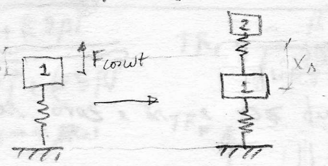
deslocamento transmitido p/

$TR = \frac{F_T}{F_{eq}}$ força transmitida p/ base

!

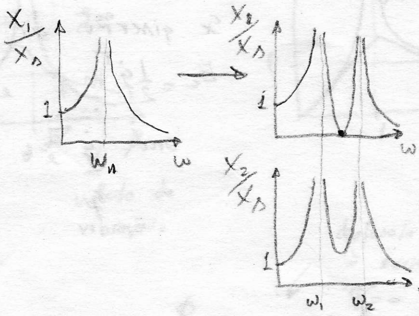
$TR = \frac{X(\omega)}{Y}$

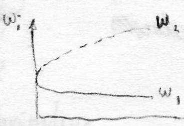
- usando absorsor



Qto + pesado o absorsor relativat ao sist. principal, mais ω_1 e ω_2 se afastam.

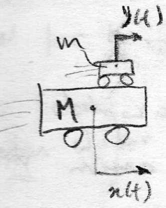
$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$





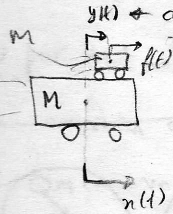
$\varepsilon \uparrow \frac{m_2}{m_1}\uparrow$ $\omega_1 \longleftrightarrow \omega_2$

! Ao calcular E_c.



as 2 coordenadas absolutas

$$E_c = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2$$



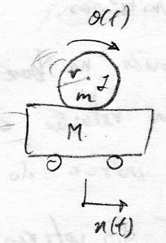
$y(t)$ ← distância

y coordenada relativa

x " absoluta

$$E_c = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}+\dot{y})^2$$

$$\delta W = f(t) \cdot \delta y(t)$$?



θ coordenada relativa

x " absoluta

$$E_c = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}+\dot{\theta}r)^2 + \frac{1}{2}\gamma\dot{\theta}^2$$

a roda tem movimento composto (rotação + translação)

o carro tem movimento simples (apenas 1 tipo de movimento)

COEFICIENTES DE INFLUÊNCIA

COEFICIENTES DE INFLUÊNCIA DE

- rigidez, K_{ij} → força no ponto i devida a 1 deslocamento unitário em j qdo todos os pontos exceto j estão fixos $x_\ell = 0, \forall \ell \neq j$

  $\boxed{F_i = K_{ij} \cdot x_j}$

- deslocamento, a_{ij} → deslocamento no ponto i devido a 1 força unitária aplicada em j

  $\boxed{x_{ij} = a_{ij} \cdot F_j}$

$\underline{K} = \underline{a}^{-1}$, ambas as matrizes são simétricas, i.e., $K_{ij} = K_{ji}$ e $a_{ij} = a_{ji}$

deslocamento no G.L. i devido a 1 força aplicada no G.L. j

MÉTODO DE LAGRANGE

* a equação do movimento é + do q a expressão do $\sum F$ eq. dinâmico do sistema. ($\sum F = Q$ ou $\sum M_o = \dot{K}_o$)

Definição do F viscoso

$$Q_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \qquad F = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} c_{rs}\,\dot{q}_r\,\dot{q}_s$$

forças de amort. do tipo viscoso

lineares

função de dissipação de Rayleigh

princípio → utiliza: 1 - $E_{c\,total}$ 2 - $\Delta E_p = E_p - E_{estáticas}$ 3 - q_i 4 - W das F não (forças não conservativas)

$\sum F$ do sistema sob a forma *

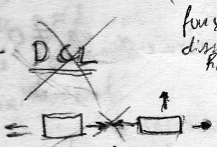
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

vantagens

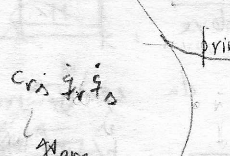
1 - ~~DCL~~

2 - forças internas

3 - ⇒ ↑ eficiência p/ ↑ nº GL



Resposta p/ sobreposição modal truncada consiste em escolher base c/ dimensão $p \ll n$] se a base for bem escolhida ↓ erro



fazer nova base

filtro

n base

tem todos os modos

↓ Energia ⇒ geral/ contribuem muito p/ resposta ⇒ incluí-los na base p

↑ Energia ⇒ geral/ contribuem pouco p/ resposta ⇒ não os incluir na base p

isto no fundo é escolher os modos VIP e só os analisar.

q não tenha modos c/ ↓ Energia ou ↓ω e q pertençam à gama de freq. de solicitações

↓ CPU TIME (esforço computacional)

fazendo isto ↑ o erro por se descartar modos de vibração base formada pelos vetores modais normalizados p/ M=1 massas modais unitárias.

ANALISE MODAL

· consiste na projeção das eqs. do movim. na base modal, q̄, em conjunto c/ as propried. de ortonormalid. dos vetores modais em relação às matrizes $\underline{M}$ e $\underline{K}$ se consegue o desacoplado simultâneo em termos elásticos e de inércia do sistema de eqs. do movim. Obtém-se assim

· ortonormalid. qdo a normalização dos vetores modais é feita p/ massas modais unitárias, s/ n fossem unitárias era só ortogonalid.

eqs do movim. independentes, cada 1 igual à eq. do mov. do sist. c/ 1 G.L. Se o sistema tiver amortecedor, só se cons. desacoplar os termos de amortecim. se a matriz $\underline{C}$ verificar a condição de Caughey.

desacoplado em ação: $$\underbrace{\Phi^T m \Phi}_{I} \ddot{\eta}(t) + \underbrace{\Phi^T K \Phi}_{\Omega^2} \eta(t) = \underbrace{\Phi^T f(t)}_{N(t)}$$

ver versão em ingl. p. $\boxed{48}$

RAYLEIGH

Uso: 1- maneira de estimar ω_1 s/ usar $(K - m\omega^2)\underline{u} = 0$ eq. caraterística

Suposições: 2- assume q. $\Delta E_{mec} = 0 \Rightarrow$ ~~C~~ ∝ desprezar

$\Downarrow$

$\Delta E_c + \Delta E_{p\,el} = 0$ — Δcota a 1 valor ref : E_{pg} — ΔE dos el. elásticos $\Delta E_{p\,el}$

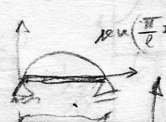
Energia

Método da Energia (nas aulas TP ñ usamos em sist. contínuos, na seb. tb tem p/ 1G.L., p. n n aparece)

$$E_{c\,max} - \cancel{E_{c\,min}}^{=0} + E_{p\,max} - \cancel{E_{p\,min}}^{=0} = 0$$

$$\boxed{E_{c\,max} = E_{p\,max}}$$

3- utiliza



função deslocam. (de aproximação) e assume q. a forma dela a forma do sistema em vibração livre.

4- em $v(x,t)$ sistemas contínuos a função de aproximação admissível deve respeitar as C.F. geométricas e ser derivável pelo menos ½ da ordem da eq. do movim.

5- igual ao 3 do quociente. $$\omega_n^2 = \frac{\frac{1}{2}\int_0^l k \ldots}{\frac{1}{2}\int_0^l \ldots} = \frac{E_{p\,max}}{\omega_n^2 E_{c\,max} + E_{c\,max\ c/m}}$$, p/ sist. contínuos.

Quociente

p. 225

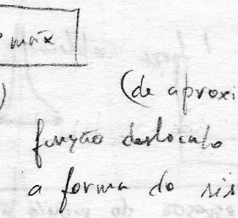
uso: 1- aplicado p/ obter $\approx \omega_1$ a partir de vetores arbitrários

$$\omega_r^2 = \frac{\underline{\Phi}^T \underline{K}\, \underline{\Phi}}{\underline{\Phi}^T \underline{m}\, \underline{\Phi}} \approx R(\underline{v}) = \frac{v^T K v}{v^T m v}$$ ← para sistemas discretos

vindo da eq. caraterística $(\underline{K} - \underline{m}\omega^2)\underline{u} = 0$

vetor arbitrário $\neq 0$

3- Princípio de Rayleigh



num sistema conservativo as estimativas de possui valor estacionário na vizinhança das u_i formas nat.

2 - sistemas

discretos: $\omega_1^2 \leq R(\underline{v}) \leq \omega_n^2$ sempre $\geq$ q. a freq. fundamental e sempre $\leq$ q. a + alta das frequências

admissíveis de teste

contínuos: $\omega_1^2 \leq R(\Phi(x))$ ~ função de aproximação

existem ∞ modos de vibração e pt ∞ formas e freq., pelo q. aqui o R ñ é minorante das ω_n.

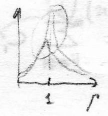
← para $\phi(x,t)$ sistemas contínuos

$$\omega_r^2 = R(\Phi(x)) = \frac{\int_0^l \mathcal{L}(\Phi(x))\, K(x)\, \mathcal{L}(\Phi(x))\, dx}{\int_0^l \mathcal{L}(\Phi(x))\, m(x)\, \mathcal{L}(\Phi(x))\, dx}$$

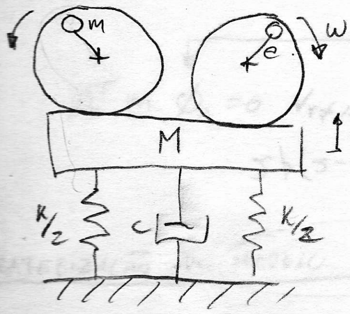
Comentário relativo a como a $X(\omega)$ é controlada a

$\downarrow \omega$ por K : $\Rightarrow X(\omega) = X_1 \cdot \mu_{\simeq 1} \approx \frac{F}{K}$

médias ω por ξ : $\lim_{\beta \to 1} X(\omega) = X_1 \cdot \frac{1}{\xi}$



$\uparrow \omega$ por m : $m\ddot{x} = F$



$y = e \operatorname{sen}\theta$ $\quad \frac{d}{dt}\theta = \omega \Rightarrow \theta = \int \omega\, dt \Rightarrow \theta = \omega t$

$y = e \operatorname{sen}\omega t$

$\ddot{y} = -\omega^2 e \operatorname{sen}\omega t$ $\quad F = ma \Rightarrow F_y(t) = 2me\omega^2 \operatorname{sen}\omega t$

$M\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 2me\omega^2 \operatorname{sen}\omega t$

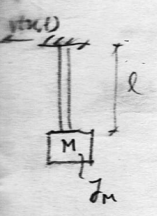
$x(t) = X(\omega) \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$ $\quad \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$

$X_1 = \frac{F_{eq}}{K_{eq}} = \frac{2me\omega^2}{K} = \frac{2me\,\omega_n^2\,\omega^2}{K\,\omega_n^2} \quad X_1 \cdot \mu = \frac{2me}{M} \cdot \beta \cdot \mu$

$\frac{1}{M}$ $\quad \beta$

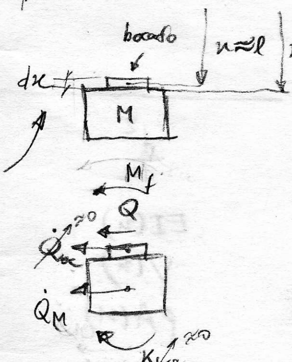
$X_1 = \frac{2me}{M} \cdot \beta$

EQILÍBRIO DINÂMICO p/ DETERMINAÇÃO DE C.F. NATURAIS

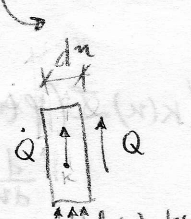


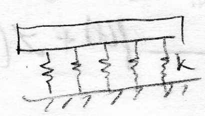
para $x \approx l$

Exemplo 1 ; Exemplo 2



ao dizer q̃ a espessura é dx estamos a dizer q é como se fosse $x \approx l$ visto q̃ é 1 elemento infinitesimal





$\Sigma F = Q + f_x(x)dx = \cancel{Q}^{\approx 0}$

$\Sigma M = \cancel{K}^{\approx 0}$

$EI \frac{\partial^3 v(q,t)}{\partial x^3} = 0$

aceleração linear

(massa ≈ 0) $M\ddot{v}$

$\Sigma F = \Sigma \dot{Q} \Rightarrow Q = \dot{Q}_{boc}^{\approx 0} + \dot{Q}_M$

$\Sigma M = \Sigma K \Rightarrow M_f = \cancel{K_{boc}}^{\approx 0} + K_M \quad J_M \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2}$

(aceleração angular).

$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$

ficam então

$$\begin{cases} EI \dfrac{\partial^3 v(l,t)}{\partial x^3} = M \dfrac{\partial^2 v(l,t)}{\partial t^2} \\[2ex] EI \dfrac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2} = J_M \dfrac{\partial^3 v(l,t)}{\partial x \partial t^2} \end{cases}$$

CONCLUSÕES

1- p/ CF naturais analiza-se o equilíbrio dinâmico $\Sigma F = \dot{Q}$, $\Sigma M_0 = K_0$ do corpo p/ a dimensão infinitesimal em estudo

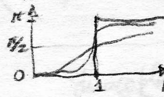
2- Se numa eq. tivermos algo a multiplicar por dx a + q̃ os outros termos ≈ 0 pq é mto + pequeno. dx =

$a + b\cancel{dx}^{\approx 0} = c \qquad a\,dx + (b + \cancel{c\,dx}^{\approx 0})dx = g\,dx$

3- como o bocado do elemento é infinitesimal dizemos q̃ é ≈ à secção

COMPARAÇÃO — SISTEMA

	1 G.L.	n GL
eq. movi/o	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$	$\underline{m}\ddot{\underline{x}} + \underline{k}\,\underline{x} = \underline{f}(t)$ — ñ fizemos c/ amort. nas práticas — p. 158
Livre $f(t)=0$	$x(t) = A e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)$ — das cond. iniciais	$\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{u}_i \cos(\omega_i t - \phi)$ — das cond. iniciais
Harmonico $f(t) = F_{eq}\cos\omega t$	$x(t) = X(\omega)\cos(\omega t - \phi)$ — $\neq$! desfazado em relação à excitação — $\phi = tg^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$ — $X_\Lambda \cdot \mu$, $\frac{F_{eq}}{K_{eq}}$, μ $F_{eq} = (\omega)F$ — ver p.65	$\underline{x}(t) = \underline{X}(\omega)\cos(\omega t - \phi)$ — $\neq$ desfasado em relação às excitações — $X_i(\omega) = \frac{z \cdot F - z\, F}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}$
transiente	$x(t) = \int_0 f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$	se K e/ou M acoplados: $\eta_i(t) = \frac{1}{\omega_i^2}\int_0 N_i(\tau)\operatorname{sen}\omega_i(t-\tau)\, d\tau$; $\underline{x}(t) = \underline{\Phi}\,\eta(t)$
periodica	$x(t) = \frac{F_0}{2k} + \sum_{p=1}^{\infty} X_p(\omega)\cos(p\omega t - \psi_p - \phi_p)$	
eq. carat.	$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$	$(\underline{K} - \underline{M}\omega^2)\underline{u} = 0$
prop. ortogonalid		$\underline{\phi}_r^T \frac{\underline{M}}{\underline{K}} \underline{\phi}_s = 0$



	BARRAS	VEIOS	VIGAS
eq. movi/o	$f(t) + \mathcal{L}\left(K(x)\,\mathcal{L}(\varphi(x,t))\right) = m(x)\,\ddot{\varphi}(x,t)$		
eq. caraterística	$-\mathcal{L}\left(K(x)\,\mathcal{L}(\varphi(x))\right) = \omega^2 m(x)\,\varphi(x)$		
$\mathcal{L}(\ ) =$	$\frac{d}{dx}$	$\frac{d}{dx}$	$\frac{d^2}{dx}$
$K(x) =$	$EA(x)$	$GI_p(x)$	$EI(x)$
$\varphi(x) =$	$U(x)$	$\Theta(x)$	$V(x)$
$m(x) =$	$\rho A(x)$	$J(x)$	$\rho A(x)$

prop. ortogonalid em relação

- à massa: $\int_0^l m(x)\,\varphi_r(x)\,\varphi_s(x)\, dx = \delta_{rs}$
- à rigidez: $\int_0^l \mathcal{L}(\varphi_s(x))\, K(x)\, \mathcal{L}(\varphi_r(x))\, dx = \omega^2 \delta_{rs}$

$\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{se } r \\ 0 & \text{se } r \end{cases}$

PROBLEMAS CARATERÍSTICOS

n GL

função valor par

caraterística(o)

$\underline{K}\,\underline{u} = \underline{m}\,\omega^2\underline{u} \xrightarrow{\text{resolver}} \begin{cases} \omega_i \\ \underline{u}_i \end{cases}$ $i=1\ldots n$

$\begin{rmatrix} \omega_n \\ U_n(x) \end{rmatrix}$ $n=1\ldots\infty$ $\xleftarrow{\text{resolver}}$

SISTEMAS CONTÍNUOS

$$\mathcal{L}(K(x)\mathcal{L}(\varphi(x))) = -m(x)\,\omega^2\,\varphi(x) \quad (U(x))$$

as soluções da eq. caraterística de sistemas cont. devem verificar/respeitar eq. movito e C.F. *'

como são independentes a sua combinação linear tb é solução da eq. $m\ddot{x}+kx=0$ do movito

· representam a configuração espacial do sistema em regime livre no modo de vibração i/n.

— têm propriedades de ortogonalid. relativa/ à $\underline{m}$ / $m(x)$ isto é

$$\phi_r^T\,\underline{m}\,\phi_s = 0 \quad \forall_{r\neq s}$$

$$\int_0^l m(x)\,\varphi_r(x)\,\varphi_s(x)\,dx = 0 \quad \forall_{r\neq s}$$

*' pex. C.F. $\frac{d\varphi(0)}{dx}=0$ $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$ verifica essa C.F.

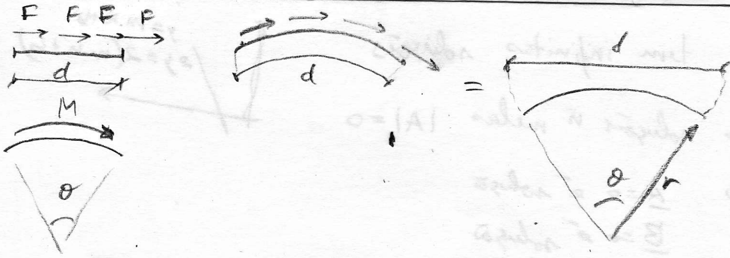
CARATERIZAÇÃO DO MODELO ESPACIAL — modelo espacial é o sistema escrito sob a forma matemática,

DE SISTEMAS

DISCRETOS: obtenção de $\underline{K}, \underline{c}, \underline{m}$, n $kx + m\ddot{x}$ eq. do movito q caraterizam a resposta $x(t)$ em todos os G.L. — pode ser obtida: Newton ($\Sigma F = Q$, $\Sigma M = K$); Lagrange ($\frac{\partial E_c}{\partial q_i} - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i}$)

CONTÍNUOS: análise ao nível dx (infinitesimal) e estabelecer $V(x) = \cos\left(\frac{E a\alpha}{x}\right)$ (função contínua) eq. do movito, c/ base nas C.F. e funções de aproximação no caso de métodos aproximados

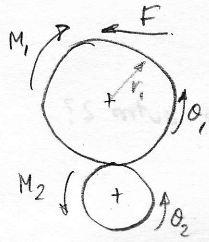
$$\boxed{\begin{aligned} W &= F \cdot d \\ W &= M \cdot \theta \end{aligned}}$$



$d = \theta r \Rightarrow$

$W = F \cdot \theta r$

Exemplo



$\delta W = \underbrace{F \cdot r_1} \cdot \delta\theta_1$

$\delta W = \underbrace{-M_1} \cdot \delta\theta_1 + \underbrace{M_2}\,\delta\theta_2$

$Q_1 = \underline{F_1 \cdot r_1 - M_1}$ forças/momentos q atuam no GL 1

$Q_2 = \underline{M_2}$ forças/momentos q atuam no GL 2

Relativo/ ao facto de se conseguir separar a resposta de um sistema contínuo em 2 parcelas cada uma dependente apenas de 1 variável:

$$\begin{aligned} V(x,t) &\quad V(x)\, g(t) \\ u(x,t) &= U(x)\, g(t) \\ \theta(x,t) &\quad \underbrace{\Theta(x)}\ \underbrace{g(t)} \end{aligned}$$

Esta separação permite

$\int \Theta(x)\,dx = \int g(t)\,dt$ (V, U)

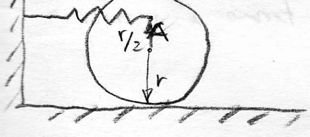
integrar pelo método de variáveis separáveis para obter

$\Theta(x,t)$ (V, U)

solução da eq. (diferencial) do movimento

influência da [forma natural de vibração } evolução de ao longo do tempo] na resposta

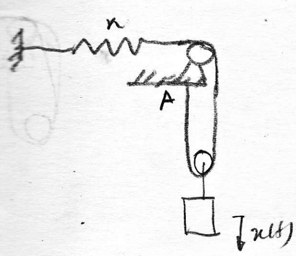
---



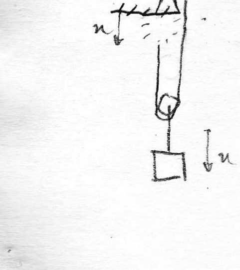
O deslocamento do ponto A é $r\theta$ (movimento de translação) + $\frac{r}{2}\theta$ movimento de rotação

Então

$F_k = k\left(r\theta + \frac{r}{2}\theta\right)$



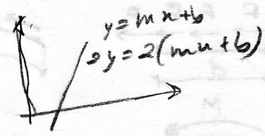
Para o corpo descer o fio tem q esticar $2x$ senão parte em A. Estica x para o corpo descer e mais x para o fio se manter em A



Se todo o fio descer x ↗

$F_k = K \cdot (2x(t))$

Sistema possível indeterminado tem infinitas soluções



$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ p/ termos soluções ñ nulas $|A| = 0$

$\underline{A}\,\underline{B} = 0$ $\underline{A} = 0$ é solução
$\underline{B} = 0$ é solução

Vetores linear/ dependentes e independentes

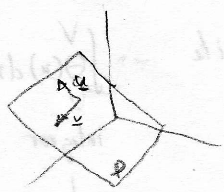
$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ há alguma maneira de obter um dos vetores partindo dos outros 2?

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ => são linear/ dependentes

Se os vetores forem ortogonais entre si ($\perp$) são linear/ independentes

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ Um conjunto de n vetores linear/ ind. formam uma base de dimensão n.

Se os vetores, p/ além de ortogonais, estiverem normalizados, são ortonormais; caso desses 3



Os vetores $\underline{u}$ e $\underline{v}$ são L.I. e formam uma base p/ plano P. Ddo tipo, a partir deles podemos trabalhar em P, já temos uma base sob a qual trabalhar. Neste caso a base é de dimensão 2.

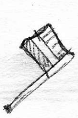
Uma equação algébrica é do tipo $xy^4 + e^{\frac{1}{t}} + \text{sen}\, z - 2 = 0$

Definição de forma quadrática: é um polinômio homogêneo de grau 2.

quando a soma dos expoentes de cada termo é a mesma

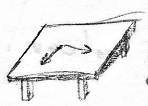
ex: $\underset{5}{x^5} + \underset{5}{2x^3y^2} + \underset{5}{9xy^4}$

vetores →



→ combinação linear lb é solução

→



formam base de dimensão _